

1 Esercizi di Analisi Matematica 2 - Lista 1

Esercizio 1.1 (Esempi riguardanti la teoria). Siano date le seguenti serie numeriche e di funzioni:

- Condizione necessaria della convergenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + (2x^2 + 1)n^3 + 9} - \sqrt{n^4 + 5xn^3 + 4})$$

- Criterio del rapporto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{2}{n})}{n}$$

- Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

- Serie Telescopica (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

- Convergenza puntuale

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2 \log n}$$

- Convergenza uniforme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [0, 1]$$

- Convergenza totale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 x^n}, \quad x \in [1, \infty); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1.2 (Serie di potenze). Verificare che le seguenti serie di potenze hanno raggio di convergenza $r = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4}$$

Studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esercizio 1.3. Determinare il raggio di convergenza r delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+2/n)^n}$$

Esercizio 1.4. Determinare l'intervallo di convergenza I della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^n}{n4^n} x^n$$

Esercizio 1.5. Determinare l'intervallo di convergenza I delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+2)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n n^2}$$

Serie di potenze e convergenza uniforme.

Esercizio 1.6. Determinare l'intervallo di convergenza I delle seguenti serie di potenze (compreso lo studio del comportamento agli estremi):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+2} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n} (x-2)^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{ne^n} (x+1)^n.$$

Esercizio 1.7. Trovato un intervallo opportuno in cui poter integrare termine a termine, calcolare:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n dx$$

Esercizio 1.8. Trovato un intervallo opportuno in cui poter derivare termine a termine, calcolare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} \right)$$

Domini e superfici.

Esercizio 1.9. Rappresentare graficamente i seguenti domini normali del piano:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 2 \right\}; \\ B &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x^3 \right\}; \\ C &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{2y} \leq x \leq e^2, \quad 0 \leq y \leq 1 \right\}; \\ D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \leq 0 \right\} \end{aligned}$$

Esercizio 1.10. Rappresentare graficamente le seguenti (porzioni di) superfici dello spazio:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z + 2 = 0 \right\};$$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 16 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0 \right\};$$

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0 \right\}.$$