

LEZIONE 05-10-2026

Svolgimento esercizi:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

r	s	t	$r \wedge s$	$(r \wedge s) \Rightarrow t$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

AVVISO: NO LEZIONE MER 07-10

Statistica e probabilità

DEF: Dato un numero naturale $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ si definisce FATTORIALE il numero

"n fattoriale" $\rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

ovvero il prodotto tra n e tutti i suoi naturali precedenti (tranne zero).

$$0! = 1 \quad (\text{per definizione})$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

DEF: Dati due numeri naturali n, k, si definisce il COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

"n sceglie k"

Esempi:
$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! (5-3)!} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$

$$= 5 \cdot 2 = 10$$

Esercizio: calcolare $10!$ e $\binom{90}{6}$.

Il calcolo combinatorio si occupa di analizzare i modi di riordinare / raggruppare gli elementi di un insieme finito di oggetti.

Domande: quante targhe di auto possono esistere?

G C 4 4 7 M W

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
2 lettere iniziali 3 numeri 2 lettere finali

$$\Rightarrow 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \quad \text{possibilit\`e}$$

(circa 456 mln!)

DEF: Una PERMUTAZIONE di un insieme A , con $\#(A) = n$, \u00e9 l'insieme dei modi di ordinare tutti i suoi elementi.

Le targhe viste prima NON sono un esempio di permutazione.

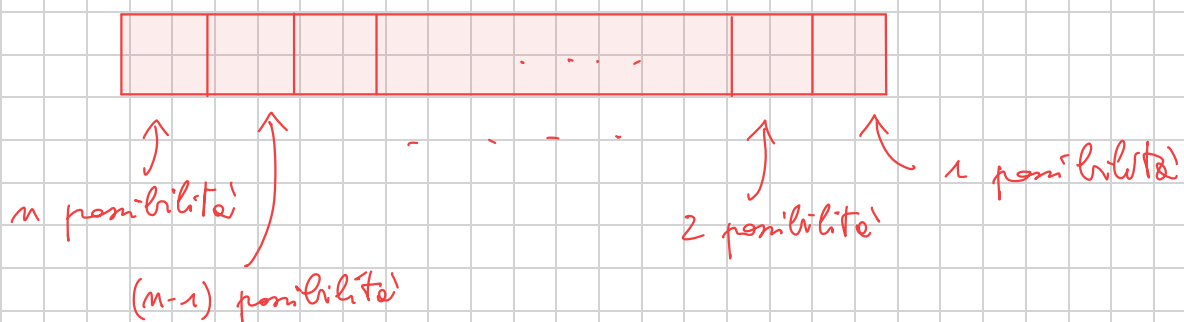
Esempio: $A = \{p, \star, 2\}$ le sue permutazioni sono:

$p\star 2$, $p2\star$, $\star p2$, $2p\star$, $\star 2p$,
 $2\star p$

In effetti, $P_n = n!$ (nell'esempio $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$)

"le permutazioni di
n elementi"

perché ...



$$\rightarrow n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Esercizio: scrivere tutte le possibili permutazioni delle lettere che compongono la parola ROMA, ome dell'insieme $A = \{R, O, M, A\}$, $\#(A) = 4$

DEF: Una DISPOSIZIONE (SENZA RIPETIZIONI) di k elementi di un insieme A (con n elementi) è una k -upla ordinata, ma non necessariamente tutti.

Esempio: una sequenza di lettere dell'insieme $B = \{u, p, b\}$ a formare coppie:

up, ub, pb, pu, bu, bp

In generale, le disposizioni che posso formare di k elementi da un insieme con cardinalità n sono

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \left(\text{nell'esempio } D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \right)$$

"disposizione di n in k "

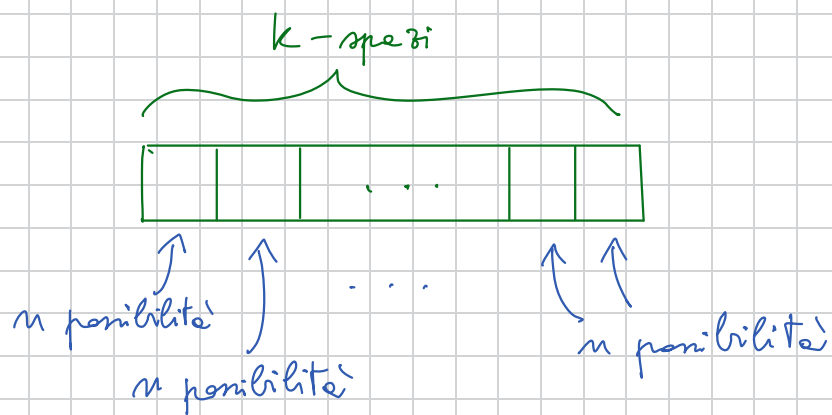
Note: l'ordine CONTA! Le coppie pb é diverse dalle coppie bp.

DEF: Nelle DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE posso trovare uno stesso elemento più volte.

Esempio: $B = \{p, u, b\}$ in coppie (con ripetizione)

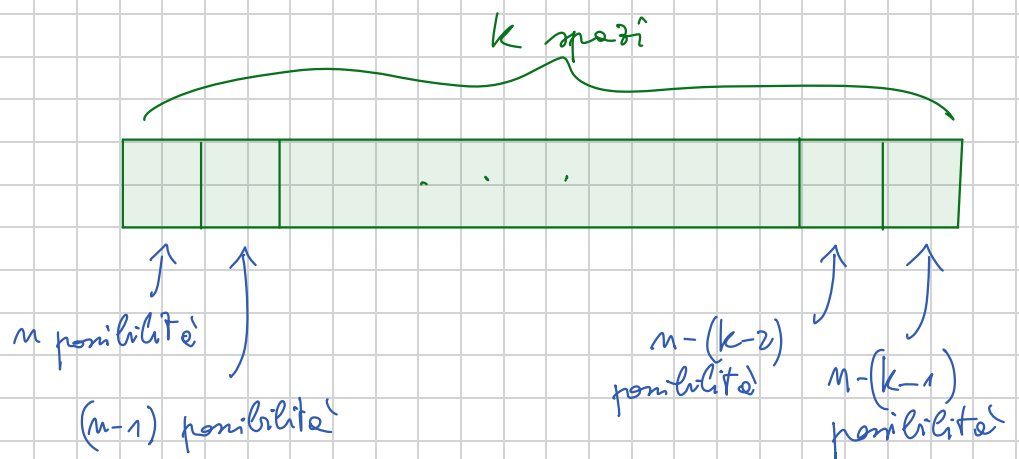
up, ub, pb, pu, bu, bp,
uu, pp, bb

In generale, $D_{m,k}^{\text{ripetizioni}} = m^k$



[Spiegazione della
formule per disposiz.
con ripetizioni]

[Spiegazione delle
disposizioni senza
ripetizioni]



$$\begin{aligned} \rightarrow D_{m,k} &= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1) = \\ &= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1) \cdot (m-k) \cdot (m-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-k) \cdot (m-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

DEF: Una COMBINAZIONE (SENZA RIPETIZIONI) è una sequenza di k elementi di A (con cardinalità n) in cui non conta l'ordine.

Esempio: estraggo 6 numeri al lotto (90 numeri), ottenendo sestine. Le possibilità sono

$$\begin{aligned} \binom{90}{6} &= \frac{90!}{6! (90-6)!} = \frac{90!}{6! 84!} = \\ &= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot \cancel{84!}}{6! \cdot \cancel{84!}} = \\ &= \frac{\overset{5}{\cancel{90}} \cdot \overset{30}{\cancel{89}} \cdot \overset{22}{\cancel{88}} \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 6\,226\,146\,300 \end{aligned}$$

Le sestine 5-28-30-89-2-12 è la stessa di 28-30-2-5-12-89.

[Esempio: vogliamo calcolare le possibili targhe di auto con caratteri tutti diversi (ovie senza ripetizioni): si tratta di disposizioni o combinazioni? Quante sono?]

In generale le combinazioni di n in k sono

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Esercizio: motivare la formula per $C_{m,k}$.

DEF: Una COMBINAZIONE CON RIPETIZIONE ammette lo stesso elemento in più posizioni. Inoltre si possono fare combinazioni di n in k con $k > n$.

Ad esempio, se $A = \{1, 2\}$ posso formare combinazioni (con ripetizioni) di 3 numeri:

111,

112, 121, 211,

è un'unica combinazione

122, 212, 221,

è un'unica combinazione

222

In generale, le combinazioni di n in k con ripetizione sono

$$C_{m,k}^{\text{ripetizione}} = \binom{n+k-1}{k}$$

Esempio: le molecole di DNA sono formate da sequenze legate di base azotate: adenine (A), guanine (G), citosine (C) e timine (T). Una sequenza di 3 basi è chiamata CODONE. Una base può apparire più di una volta in un codone.

a) Quanti differenti codoni esistono?

b) Le basi A e G sono purine, mentre C e T sono pirimidine. Quanti codoni esistono dove la prima e la terza base siano purine e la seconda pirimidine?

a) Dall'ultime frase del testo sappiamo che le ripetizioni sono annesse. Dobbiamo capire se viene chiesto di calcolare

$C_{4,3}^{\text{ripetizioni}}$

oppure

$D_{4,3}^{\text{ripetizioni}}$

ovvero se l'ordine conta.

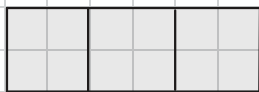
- se l'ordine conta, abbiamo

$$D_{4,3}^{\text{ripetizioni}} = 4^3 = 64 \text{ codoni}$$

- se l'ordine non conta, abbiamo

$$C_{4,3}^{\text{ripetizioni}} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! 3!} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 5 \cdot 4 = 20$$

b)



↑ 1 *purine* ↑ 1 *pirimidine* ↑ 1 *purine*

$$\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

possibilit .

Esercizio: elencarli tutti