

Il probabilismo

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2026-27

- Esprimere i gradi di credenza mediante numeri reali compresi tra 0 e 1, di per sé, non ci dice molto su come questi gradi di credenza debbano essere effettivamente calcolati.
- Il *probabilismo* è la tesi secondo cui i gradi di credenza debbano obbedire alle leggi della probabilità.

Gli assiomi della probabilità

Fissiamo un agente A e un istante t .

- *Assioma di non-negatività.* Per ogni enunciato H , $C_{A,t}(H) \geq 0$.
- *Assioma di normalizzazione.* Se H è una tautologia, $C_{A,t}(H) = 1$.
- *Assioma di additività finita.* Se H_1 e H_2 sono enunciati relativi a eventi incompatibili, $C_{A,t}(H_1 \vee H_2) = C_{A,t}(H_1) + C_{A,t}(H_2)$.

Da qui in avanti, quando l'agente A e l'istante t sono fissati contestualmente, scriveremo $C(H)$ invece di $C_{A,t}(H)$.

- *Assioma di non-negatività.* Appare ovvio. Nessun grado di credenza può scendere al di sotto di quello posseduto da enunciati che rigettiamo completamente.
- *Assioma di normalizzazione.* Anche questo appare ragionevole. E le tautologie complicate? Ricordiamo che stiamo descrivendo il comportamento di credenza di agenti razionali idealizzati. Inoltre, questo assioma ci consente di usare il calcolo delle probabilità con tutto il suo potere di semplificazione.
- *Assioma di additività finita.* E' estremamente importante perché collega i gradi di credenza gli uni agli altri e ci dà una regola matematica esatta per il loro calcolo.

Conseguenze degli assiomi

- $C(\neg H) = 1 - C(H)$;
- se H è una contraddizione, $C(H) = 0$;
- se $H_1 \models H_2$, allora $C(H_2) \geq C(H_1)$;
- se H_1 e H_2 sono logicamente equivalenti, allora $C(H_1) = C(H_2)$;
- $C(H_1 \vee H_2) = C(H_1) + C(H_2) - C(H_1 \wedge H_2)$ (senza nessuna ipotesi di incompatibilità su H_1, H_2 !)
- se $H_1, \dots, H_n$ sono enunciati a due a due incompatibili, $C(H_1 \vee \dots \vee H_n) = C(H_1) + \dots + C(H_n)$; se sono anche *congiuntamente esaustivi*, tale somma è uguale a 1.

Due argomenti per il probabilismo

- 1 L'argomento della scommessa olandese
- 2 L'argomento dell'accuratezza

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930)



La scommessa olandese (1)

- Una *scommessa olandese* è una serie di scommesse nelle quali lo scommettitore perde denaro qualsiasi cosa accada. Ramsey dimostra che ogni agente i cui gradi di credenza violano gli assiomi della probabilità è suscettibile di subire una scommessa olandese.
- Definiamo il *prezzo di scommessa* su H ($PS(H)$) come la massima somma che un agente A è disposto a pagare per fare una scommessa su un enunciato H nella quale l'allibratore paga 100 Euro se H è vero e 0 Euro se H è falso (oppure come la minima somma che A , in qualità di allibratore, si aspetta di incassare per far partecipare un altro agente a una scommessa su un enunciato H nella quale lui stesso pagherà 100 Euro se H è vero e 0 Euro se H è falso).

Theorem (Teorema della scommessa olandese)

Sia $\mathcal{H}$ un insieme di enunciati. Se $\mathcal{P} = \{PS(H) : H \in \mathcal{H}\}$ viola gli assiomi della probabilità, allora esiste una scommessa olandese che consiste di scommesse sugli enunciati in $\mathcal{H}$ ai prezzi stabiliti in $\mathcal{P}$.

- *Assioma di non-negatività.* Per ogni enunciato H , $PS(H) \geq 0$ Euro.
- *Assioma di normalizzazione.* Se H è una tautologia, $PS(H) = 100$ Euro.
- *Assioma di additività finita.* Se H_1 e H_2 sono enunciati relativi a eventi incompatibili, $PS(H_1 \vee H_2) = PS(H_1) + PS(H_2)$.

Violazione degli assiomi e perdite finanziarie (1)

- *Assioma di non-negatività.* Supponiamo che un agente A abbia un grado di credenza in H per cui $PS(H) < 0$ Euro. Allora vuol dire che A è disposto a *pagare* un altro agente B per consentirgli di partecipare a una scommessa in cui A non incasserà niente in caso di vittoria, mentre dovrà pagare altro denaro a B in caso di sconfitta. Comunque vadano le cose, A perderà denaro.
- *Assioma di normalizzazione.* Supponiamo che H sia una tautologia e che A abbia un grado di credenza in H per cui $PS(H) > 100$ Euro. Allora sarà disposto a pagare più di 100 Euro per partecipare a una scommessa sicuramente vinta, ma che gli frutterà solo 100 Euro (perdita finanziaria certa). Se invece $PS(H) < 100$ Euro, allora A è disposto a incassare meno di 100 Euro per far partecipare un altro agente a una scommessa su H nella quale lui pagherà 100 Euro se H è vero e 0 Euro se H è falso. Poiché H è sicuramente vero, si ha di nuovo una perdita finanziaria certa.

Violazione degli assiomi e perdite finanziarie (2)

Assioma di additività finita. Supponiamo che un agente A abbia un grado di credenza in $H_1, H_2, H_1 \vee H_2$ per cui $PS(H_1) = PS(H_2) = 40$ Euro, ma $PS(H_1 \vee H_2) = 60$ Euro. Costruiamo allora una scommessa olandese su $H_1, H_2, H_1 \vee H_2$ che consiste di tre scommesse.

- 1 La *prima scommessa* è una scommessa su H_1 che frutta 100 Euro se H_1 è vero e 0 Euro se H_1 è falso. Per ipotesi, A sarà disposto a pagare 40 Euro per parteciparvi.
- 2 La *seconda scommessa* è una scommessa su H_2 che frutta 100 Euro se H_2 è vero e 0 Euro se H_2 è falso. Per ipotesi, A sarà disposto a pagare 40 Euro per parteciparvi.
- 3 Nella *terza scommessa*, l'allibratore offre ad A 60 Euro per partecipare a una scommessa su $H_1 \vee H_2$ che frutta 100 Euro se $H_1 \vee H_2$ è vero e 0 Euro se $H_1 \vee H_2$ è falso. Per ipotesi, A accetterà l'offerta.

Violazione degli assiomi e perdite finanziarie (3)

	$H_1, \neg H_2$	$\neg H_1, H_2$	$\neg H_1, \neg H_2$
Prima scommessa	+60	-40	-40
Seconda scommessa	-40	+60	-40
Terza scommessa	-40	-40	+60
Totale	-20	-20	-20

L'argomento della scommessa olandese

Fissiamo un agente A .

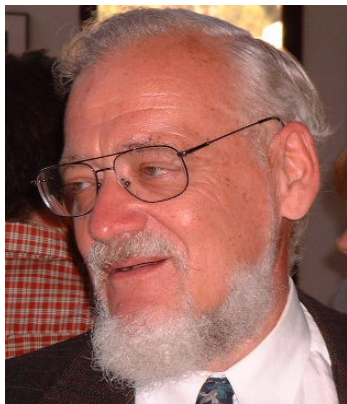
- P1 I gradi di credenza di A sono adeguatamente rispecchiati dai suoi prezzi di scommessa.
- P2 Se i prezzi di scommessa di A violano gli assiomi della probabilità, A incorre volontariamente in una perdita finanziaria certa.
- P3 Se A incorre volontariamente in una perdita finanziaria certa, allora A è irrazionale.
- C Se i gradi di credenza di A violano gli assiomi della probabilità, allora A è irrazionale.

- L'*utilità* di un evento espresso da H per agente A è una proprietà psicologica che indica quanto A è felice se H si verifica. Si può ragionevolmente sostenere che il comportamento di scommessa di un agente è il risultato dell'interazione tra i suoi gradi di credenza e le sue utilità. Queste ultime, però, non sono proporzionali al denaro.
- Supponiamo che Marco sia a Milano ma voglia tornare a Cagliari per incontrare Alice, di cui sente enormemente la mancanza. Il biglietto per Cagliari costa 100 Euro, ma Marco ne ha solo 60. Un allibratore chiede 60 Euro a Marco per partecipare a una scommessa che frutta 100 Euro se e solo se lanciando una moneta (non truccata) esce testa. Per Marco può essere razionale accettare anche se la probabilità che esca testa è solo del 50%, e quindi il prezzo di scommessa viola le leggi della probabilità.

Si può riformulare l'argomento della scommessa olandese sostituendo le utilità alle somme in denaro. E' un approccio scivoloso, perché non è chiaro come le utilità possono essere misurate. Più ragionevole è sostenere che l'argomento della scommessa olandese si applica solo agli agenti *semplici*, le cui utilità sono proporzionali al denaro.

- Si può sostenere che l'agente non probabilistico A può beneficiare di opportunità che l'agente probabilistico B si perde.
- Supponiamo che un miliardario eccentrico doni un milione di Euro a chi violerà le regole della probabilità in una qualche scommessa. Allora A non dovrà fare altro che cercare un allibratore che gli offra una scommessa olandese, pagargli i suoi 20 Euro, e poi passare all'incasso dal suddetto miliardario. Perché chiamare A irrazionale?
- In letteratura, tuttavia, ci sono varianti dell'argomento della scommessa olandese *de-pragmatizzate*, ovvero basate unicamente su criteri epistemici (credenza, verità o evidenza).

Brian Skyrms (n. 1938)



Scommessa olandese: la variante de-pragmatizzata

- Secondo Skyrms (1987), il fatto che un agente sia suscettibile a una scommessa olandese non è che un *sintomo* di un'incoerenza a livello più profondo nel sistema delle sue credenze.
- Supponiamo che io abbia un grado di credenza di 0.7 nel fatto che domani piovra (H), e un grado di credenza di 0.7 nel fatto che domani non piovra ($\neg H$). Quindi sarei disposto a scommettere 70 Euro sia su H che su $\neg H$, e perderei 40 Euro qualsiasi sia il meteo di domani.
- Questo comportamento rivela un'incoerenza di fondo. Poiché $C(H) = 0.7$, acquistare una scommessa su H a un prezzo di 50 Euro dovrebbe essere un affare; poiché però $C(\neg H) = 0.7$, *vendere* una scommessa su $\neg H$ a un prezzo di 50 Euro dovrebbe essere svantaggioso. Ma in entrambi i casi si tratta della stessa transazione!

James M. Joyce (n. 1958)



L'argomento dell'accuratezza (1)

- L'*accuratezza* della credenza in un enunciato H (da parte di un agente A) è la distanza tra il grado di credenza di A in H e il valore di verità di H :

$$Acc(H) = |C(H) - VV(H)|$$

- Ad esempio, se H = "L'erba è verde" e $C(H) = 0.9$, allora $Acc(H) = |0.9 - 1| = 0.1$; se H = "L'erba è rossa" e $C(H) = 0.3$, allora $Acc(H) = |0.3 - 0| = 0.3$. Più alto è il numero, minore è l'accuratezza.
- La nozione di accuratezza si estende a insiemi di credenze mediante il *punteggio di Brier*:

$$Acc(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} Acc(H).$$

L'argomento dell'accuratezza (2)

- Un insieme di credenze $\mathcal{H}$ *domina* un insieme di credenze $\mathcal{K}$ se in qualsiasi circostanza $\mathcal{H}$ è più accurato di $\mathcal{K}$.

Theorem (Teorema di accuratezza)

Ogni insieme di credenze i cui gradi violano gli assiomi della probabilità è dominato da un insieme che non le viola.

Quindi, agenti i cui gradi di credenze violano gli assiomi della probabilità sono irrazionali.

- Carr (2017): è ragionevole misurare la razionalità di una credenza attraverso la sua distanza dal valore di verità effettivo? Questo sembra presupporre una visione teleologica delle credenze, viste come atteggiamenti che *mirano* alla verità e vengono valutati a seconda di quanto bene approssimano tale finalità. Si tratta però di un approccio controverso.
- Fitelson e Easwaran (2015) sostengono che può essere razionale avere delle credenze dominate: il paradosso della lotteria ce ne fornisce un esempio.