

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

1

Funzioni di una variabile

Def.

Dati A e $B \subseteq R$ una funzione di A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B.

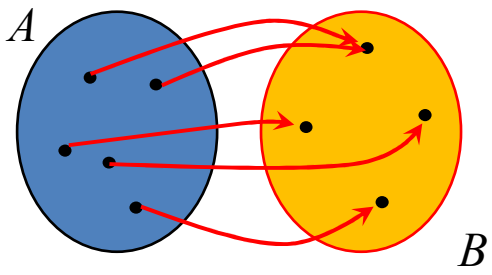
$f: A \to B$ *oppure* $y = f(x)$

$x \in A \quad e \quad y = f(x) \in B$

2

Funzioni di una variabile

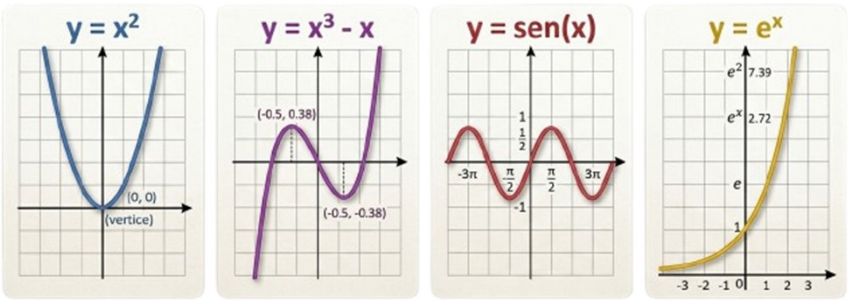
A = dominio o insieme di definizione di f.
B = codominio di f



3

Funzioni di una variabile

Il ***grafico di f*** *è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB costituito da (x, f(x)) con x∈A, f(x)∈ B*



4

Funzioni di una variabile

Def.
L'immagine di A *tramite* f*, indicata con* $f(A)$ *(o* $\mathrm{Im}(f)$*), è l'insieme dei valori* $y \in B$ *tali che esiste almeno un* $x \in A$ *per cui* $y = f(x)$.

In notazione matematica:

$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ tale che } f(x) = y\}$$

In forma più sintetica:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Es.
$Sef: A \to B, \quad f(x) = x^2 \quad A, B \in R, \quad f(A) = [0, +\infty)$

5

Funzioni di una variabile

In una funzione matematica $f: A \to B$*:*

- ***Codominio*** *(*B*):* *è l'insieme di* ***arrivo*** *dichiarato per la funzione, cioè l'insieme di tutti i valori che potrebbero teoricamente essere restituiti.*

- ***Immagine*** *(*$Im(f)$ ***o*** $f(A)$*):* *è il sottoinsieme del codominio formato dai soli valori che vengono* ***effettivamente raggiunti*** *dalle frecce a partire dagli elementi del dominio* (A).

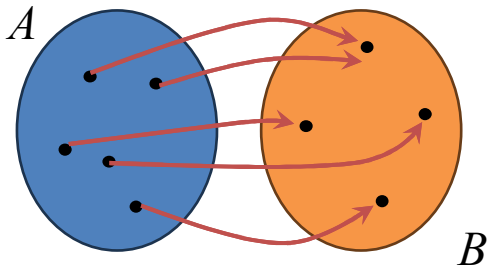
6

Funzioni di una variabile

Def.

Si dice che $f: A \to B$ è ***suriettiva*** *se* $f(A) = B$

$\left(cio\text{è } f issato\ y \epsilon B \ \Rightarrow x \in A : y = f(x)\right)$



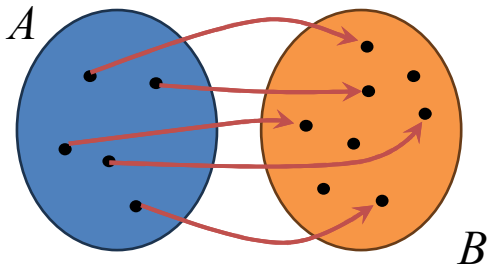
7

Funzioni di una variabile

Def

Si dice che $f: A \to B$ è ***iniettiva*** *se*:

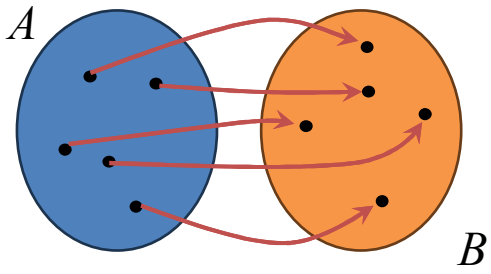
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$



8

Funzioni di una variabile

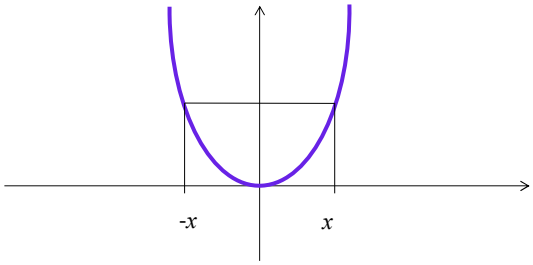
Def.
Se f è sia suriettiva che iniettiva allora si dice ***biiettiva*** *(cioè si ha una corrispondenza biunivoca tra A e B)*



9

Funzioni di una variabile

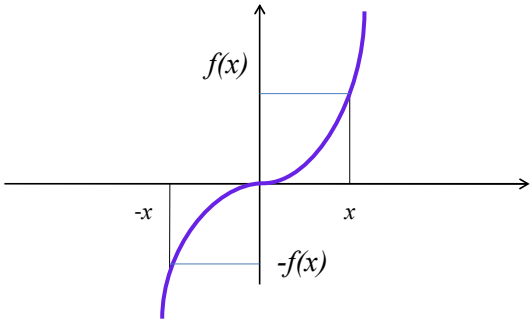
Def.
f è **pari** se $\forall\ x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)



10

Funzioni di una variabile

Def.
f è **dispari** se $\forall\, x \in A : f(-x) = -f(x)$, quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)

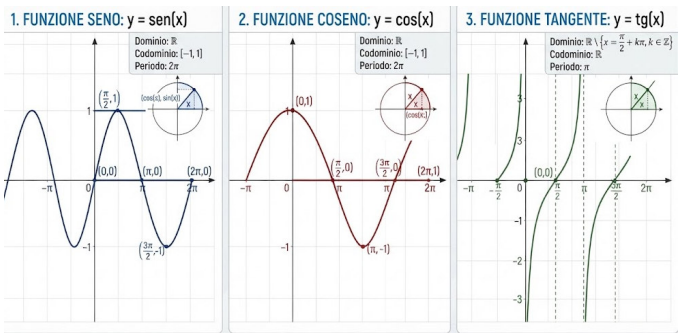


11

Funzioni di una variabile

Def.
Una funzione f: $A \to B$ è periodica di periodo T > 0, se $\forall x \in A, x + T \in A \; e \; f(x + T) = f(x)$

Es. Funzioni goniometriche



12

Funzioni di una variabile

Def. Data la funzione $f: A \to B$,

f si dice limitata superiormente se $\exists\, M \in R: f(x) \leq M \;\forall x \in A$
(il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y=M$)

Analogamente, f si dirà limitata inferiormente se
$\exists\, m \in R: f(x) \geq m \;\forall x \in A$
(il grafico di f sta sopra la retta orizzontale $y = m$)
La funzione f si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente.

13

Funzioni di una variabile

Def.
Date $f: A \to B$ e $g: B \to C$
Si definisce funzione composta di f e g :
$y = g(f(x))$
la funzione $h: A \to C$ $h = g \circ f$

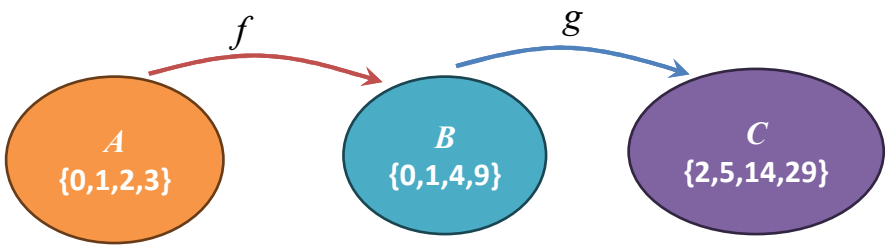
Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$, $(A \equiv B \equiv C \equiv R)$
$g \circ f = 3x^2+2$

14

Funzioni di una variabile

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$

$$g \circ f = 3x^2 + 2$$

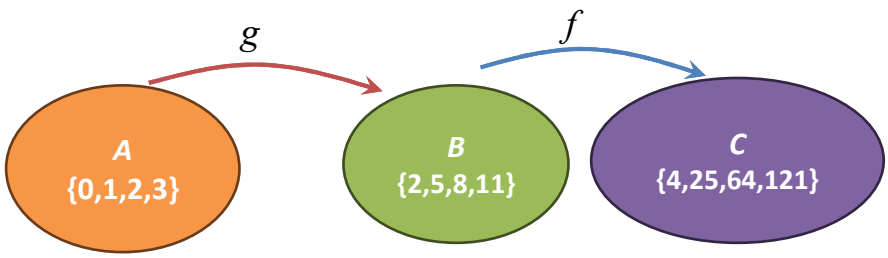


15

Funzioni di una variabile

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x + 2$

$$f \circ g = (3x + 2)^2$$



16

Funzioni di una variabile

Proprietà della Composizione

Non è Commutativa

$g \circ f \neq f \circ g$

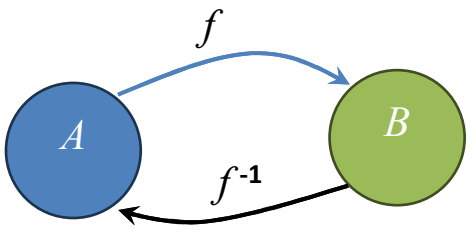
Conservazione della Biettività

La composizione di due funzioni biettive è una funzione biettiva.

Funzioni di una variabile

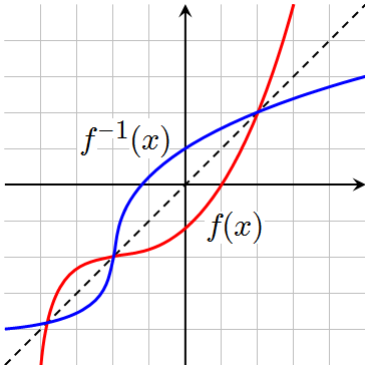
Def.

Date f: $A \to B$ biiettiva, si definisce funzione inversa di f:
$f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1} \circ f = I_A$ $f \circ f^{-1} = I_B$



Funzioni di una variabile

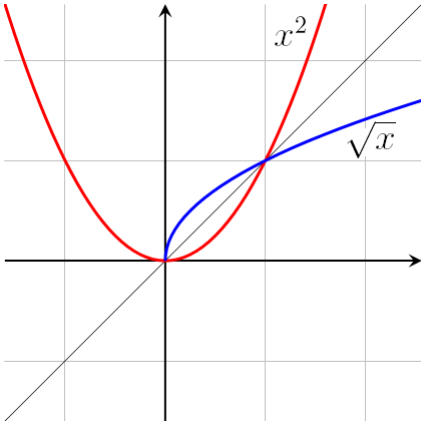
I grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante



19

Funzioni di una variabile

Es f: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $y = x^2$, f (nel dominio indicato) è biiettiva la sua funzione inversa è



20

Funzioni di una variabile

Nota. La funzione $y = x^2$ (f: R $\rightarrow$ R) non è biiettiva ma è stata "resa" biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività).

Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stato «rimpicciolito» all'intervallo massimale $[0, +\infty)$ e la funzione è diventata anche suriettiva

21

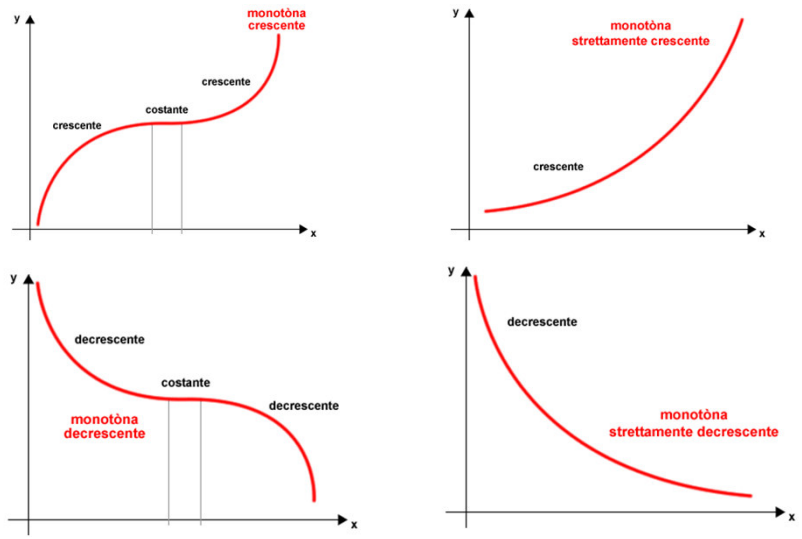
Funzioni di una variabile

Def.
Sia f: $A \rightarrow B$, f si dice monotona in A se verifica una delle seguenti condizioni ($\forall\ x_1, x_2 \in A$)

1) f strett. crescente	se $x_1 < x_2$,	$f(x_1) < f(x_2)$
2) f crescente	se $x_1 < x_2$,	$f(x_1) \leq f(x_2)$
3) f strett. decrescente	se $x_1 < x_2$,	$f(x_1) > f(x_2)$
4) f decrescente	se $x_1 < x_2$,	$f(x_1) \geq f(x_2)$

22

Funzioni di una variabile



Funzioni di una variabile

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione f(x) è strettamente monotona.

Teorema. Una funzione f: $A \to R$ strettamente monotona in A, è invertibile in A. Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.

Funzioni di una variabile

Esempio

