Università di Cagliari

CORSO **ANALISI MATEMATICA 1** - **A.A. 2026/2027**

Docente: Loi Roberto

1

1

Ricevimento e Contatti

Mail: roberto.loi69@unica.it

Gruppo Microsoft Teams **5bpcttl**

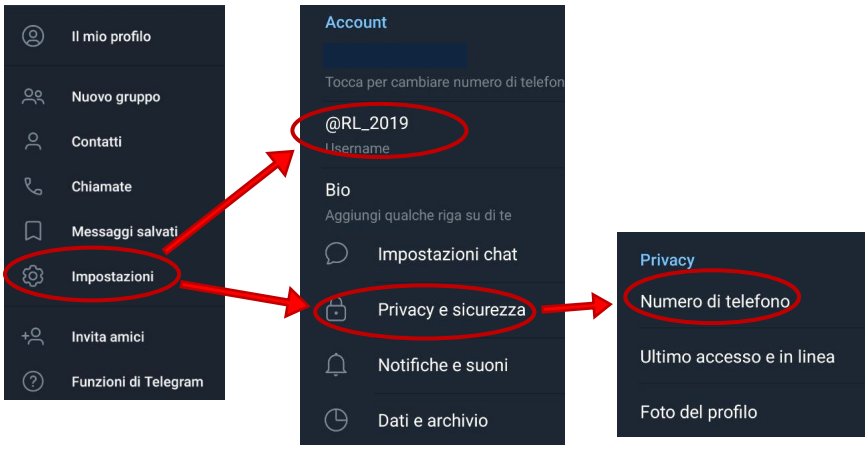
Gruppo TELEGRAM

Analisi 1 2026/2027

https://t.me/+Ip3rgJsDFe5jYTA8

2

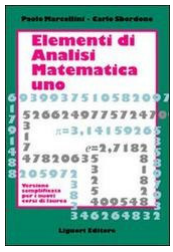
Ricevimento e Contatti



3

Testi consigliati

- **Elementi di analisi matematica 1.**
  Versione semplificata per i nuovi corsi di laurea P. Marcellini, C. Sbordone
  Editore Liguori



- **Esercitazioni di matematica vol.1.2**
  P.Marcellini, C. Sbordone
  Editore Liguori



4

4

Materiale consigliato online

- **Pagina web UNICA LINK**

https://web.unica.it/unica/page/it/roberto_loi69



5

5

Corso di Analisi Matematica 1

Struttura delle Lezioni

- **Carico orario complessivo:** 90 ore di didattica frontale
- **Articolazione settimanale:** 3 lezioni a settimana, ciascuna della durata di 3 ore.
- **Materiale didattico:** Le dispense, esercizi e i riferimenti ai testi consigliati sono integralmente reperibili e scaricabili sulla piattaforma online del corso.
- **Modalità di esame:** scritto (con teoria e esercizi)

6

Corso di Analisi Matematica 1

Prove/Esami	Data Indicativa	Contenuto
I Prova Parziale	12 Novembre	Cenni di teoria degli insiemi, Topologia di $\mathbb{R}$, Limiti di funzioni, Calcolo Differenziale, Studio di Funzione
II Prova Parziale	Fine Dicembre, Gennaio	Polinomio di Taylor, Integrali, Equazioni Differenziali, Successioni
Appelli Ordinarie	Sessione Invernale	Prova scritta globale (Teoria e Esercizi), su tutto il programma

7

Programma del corso

- Cenni di teoria sugli insiemi.
- Topologia della retta.
- Funzioni reali a valori reali (Limiti di funzioni, Calcolo Differenziale)
- Integrali indefiniti e integrali definiti.
- Equazioni differenziali.
- Cenni sulle successioni numeriche

8

Simbologia

$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\exists$	Esiste
$\exists!$	Esiste unico
$\subset$	Contenuto strettamente
$\subseteq$	Contenuto
$\supset$	Contiene strettamente
$\supseteq$	contiene

9

9

Simbologia

$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Se e solo se
$\neq$	Diverso
$\forall$	Per ogni
$\ni$:	Tale che

10

10

Simbologia

$\leq$	Minore o uguale
$\geq$	Maggiore o uguale
α	alfa
β	beta
γ	gamma

11

Simbologia

γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ε	epsilon
σ, Σ	sigma
ρ	rho

12

Cenni di teoria sugli insiemi

13

Rappresentazione di un insieme

Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1) Rappresentazione estensiva

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

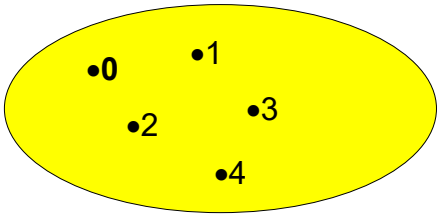
14

Rappresentazione di un insieme

2) Rappresentazione intensiva

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \ e \ x < 5\}$$

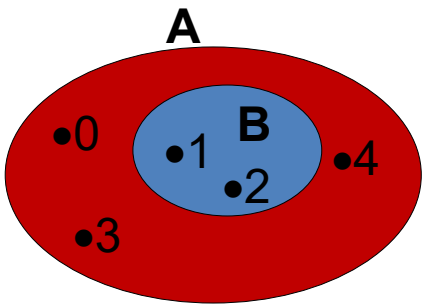
3) Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



15

Rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere contenuto in un altro



16

Operazioni tra gli insiemi

Si dice allora che B è un sottoinsieme di A:

$$B \subset A$$

$\varnothing$ Insieme vuoto (insieme privo di elementi)

17

Operazioni tra gli insiemi

Diagrammi di Eulero - Venn

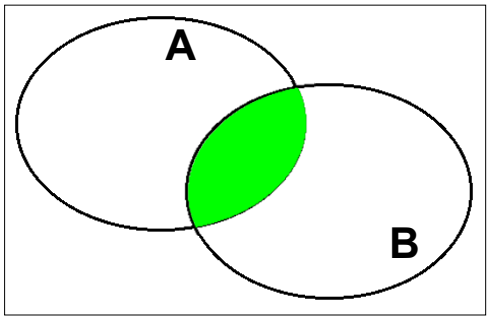
- **Intersezione**
- **Unione**
- **Complementare**

18

Operazioni tra gli insiemi

Si definisce **intersezione** di due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$



19

Operazioni tra gli insiemi

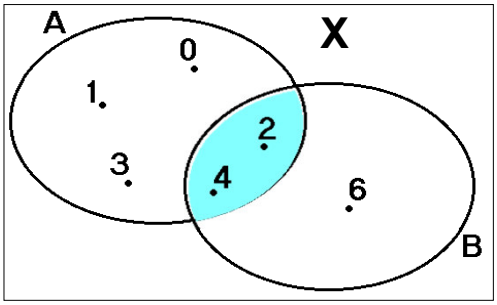
Dati ad esempio i due insiemi **A = {0,1,2,3,4}** e **B = {2,4,6}**, l'intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

20

Operazioni tra gli insiemi

Dati ad esempio i due insiemi **A = {0,1,2,3,4}** e **B = {2,4,6}**, l'intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

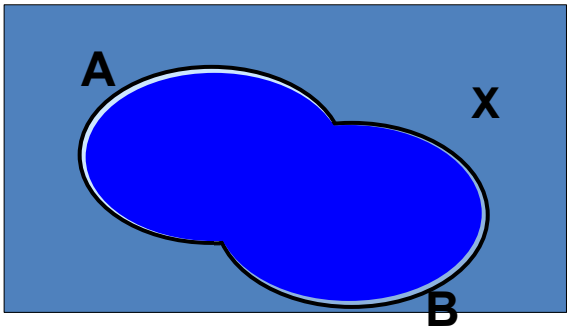


21

Operazioni tra gli insiemi

Si definisce **unione** di due insiemi A e B, l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati.

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \ o \ x \in B\}$$



22

Operazioni tra gli insiemi

Dati ad esempio i due insiemi **A = {1,2,3,5}** e **B = {2,3,4,6}**, l'unione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme

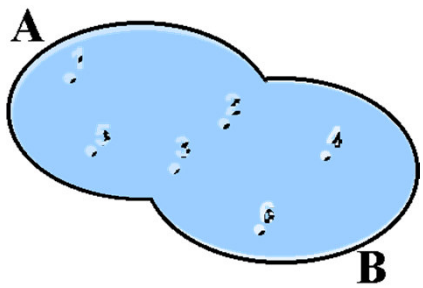
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

23

Operazioni tra gli insiemi

Dati ad esempio i due insiemi **A = {1,2,3,5}** e **B = {2,3,4,6}**, l'unione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$A \cup B = \{x: \ x \in A \ o \ x \in B\}$$

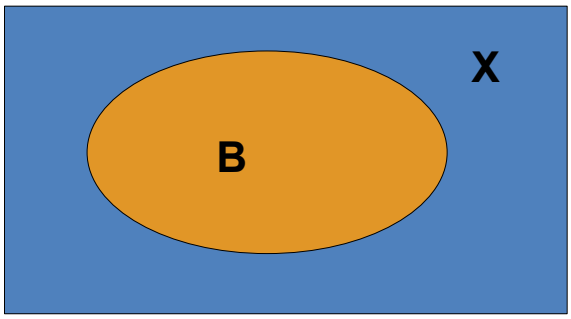


24

Operazioni tra gli insiemi

Si definisce complementare di B rispetto all'insieme X, l'insieme degli elementi che stanno in X ma non in B.

$$X \setminus B = B^c = \{x \in X \text{ e } x \notin B\}$$



25

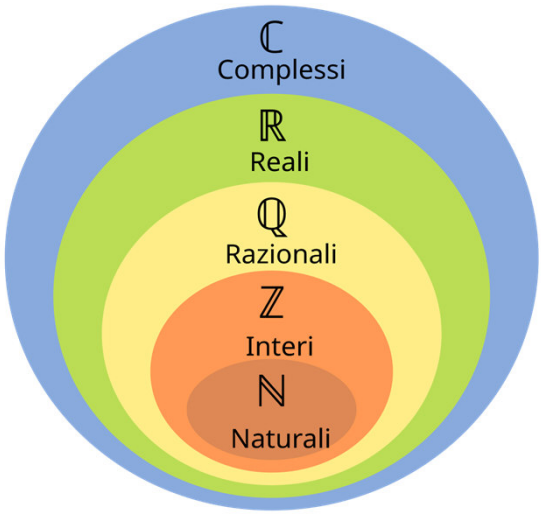
Operazioni tra gli insiemi

Dati due insiemi non necessariamente distinti A e B, si definisce prodotto cartesiano il nuovo insieme costituito da tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

26

Gli insiemi numerici



27

Numeri naturali - ℕ

L'insieme dei numeri naturali è così denominato perché viene spontaneamente utilizzato per associare agli oggetti il concetto astratto di numero

$$\{0,1,2,3,4,\ldots,+\infty\}$$

28

Numeri naturali - N

L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni ben definite (interne) in N (il risultato è sempre un numero naturale)

3+4=7 3x4=12 6+8=14

6x8=48 10x3=30 10+3=13

29

Numeri interi - I

Per permettere la sottrazione tra numeri naturali si introduce l'insieme dei numeri interi

L'insieme Z dei numeri interi:

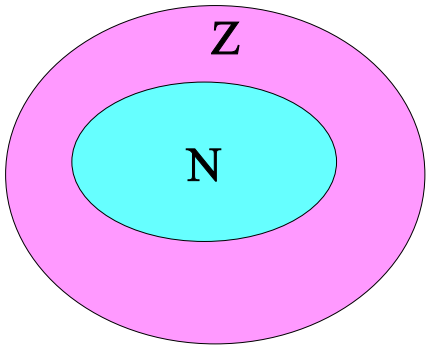
$$\{-\infty,....-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,....+\infty\}$$

L'INSIEME dei numeri interi Z

30

Numeri interi - I

$$N \subset Z$$



31

Numeri interi - I

L'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione sono operazioni ben definite (interne) in Z (il risultato è sempre un numero intero relativo)

$-3+4= +1 \qquad -3- 4 = -7 \qquad +3+4 =+7$

$(-3)\cdot(-4)= +12 \qquad (+3)\cdot(+4)= +12$

$(+3)\cdot(-4) = -12$

32

Numeri interi - I

La divisione non è ben definita: non sempre si può eseguire

(-30) : (-10) = +3

(+4) : (+5) = ?

33

Numeri razionali - Q

Per dare una risposta a qualsiasi divisione (con denominatore diverso da zero), si introduce l'insieme dei numeri razionali

$$Q := \left\{ \frac{m}{n}, \qquad n \neq 0, \qquad m, n \in Z \right\}$$

34

Numeri razionali - Q

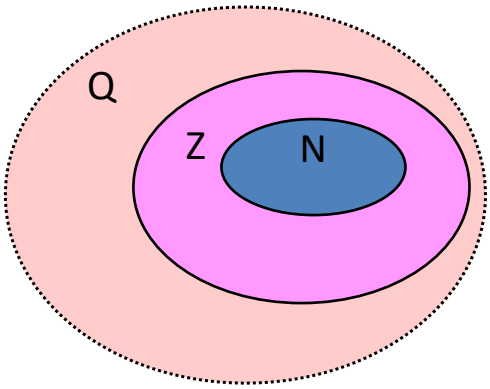
L'INSIEME Q dei numeri razionali

- Naturali
- Interi relativi
- Decimali finiti relativi
- Decimali infiniti periodici semplici relativi
- Decimali infiniti periodici misti relativi

35

Numeri razionali - Q

$$N \subset Z \subset Q$$



36

Numeri razionali - Q

Le operazioni in Q

L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione sono operazioni ben definite in Q (il risultato è sempre un numero razionale)

$$3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

37

Numeri razionali - Q

Le operazioni in Q

L'operazione di estrazione di radice non è ben definita, non sempre si può eseguire

$$\sqrt{9} = 3,$$

$$\sqrt{3} = ?$$

38

Numeri Irrazionali

L'INSIEME dei numeri Irrazionali

Per dare una risposta a qualsiasi radicale con radicando positivo, si introduce l'insieme dei numeri irrazionali

$$\sqrt[4]{5} \qquad \sqrt{7} \qquad \sqrt[3]{15}$$

39

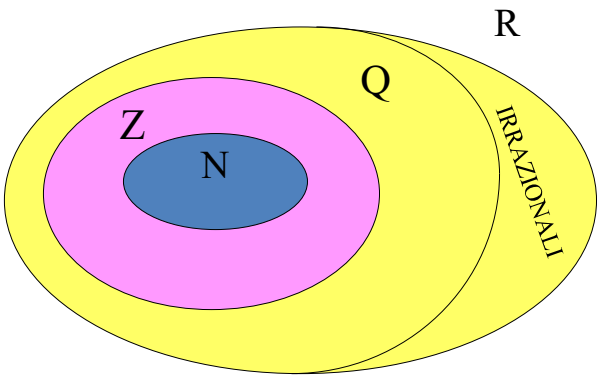
Numeri Reali - R

L'insieme R è costituito dall'unione dei numeri razionali con i numeri irrazionali

$$R = Q \cup \{irrazionali\}$$

40

Numeri Reali - R



41

Numeri Reali - R

Le operazioni in R

L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e la radice ennesima con radicando positivo sono operazioni ben definite (interne) in R

(il risultato è sempre un numero reale)

42

Numeri Reali - R

Le operazioni in R

L'estrazione di radice non è ancora ben definita:
non sempre si può eseguire cioè in R non si possono risolvere tutte le equazioni

La radice pari di un reale negativo non si può eseguire in R:

$\sqrt{-2}$ $\sqrt[4]{-7}$

$x^2 + 1 = 0$ non ha soluzione in R

43

Numeri Complessi - C

Si definisce l'unità immaginaria i e si introduce l'insieme dei numeri complessi

I numeri complessi possono essere espressi nella forma algebrica : $z = a + ib$

Con a e b numeri reali e

$$i^2 = -1$$

44

Numeri Complessi - C

Un numero complesso, con il coefficiente della parte immaginaria nullo, è un numero reale puro

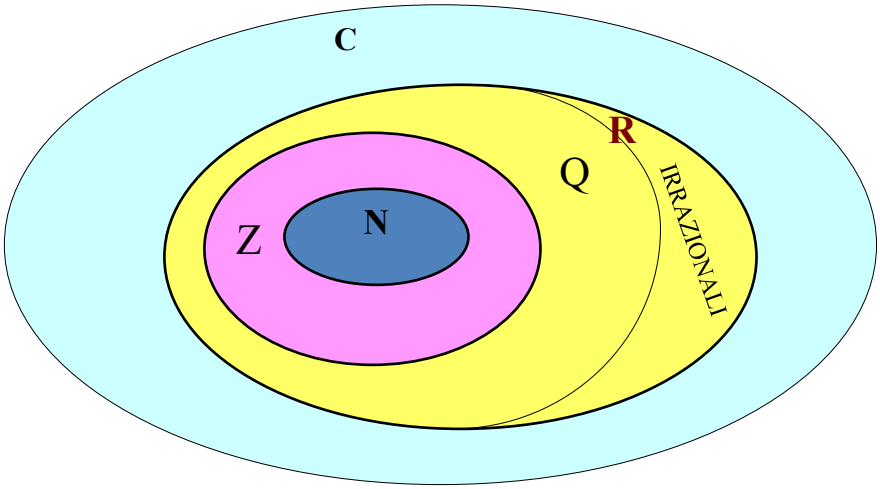
$$a + ib = a, \qquad (b = 0)$$

$$\mathrm{R} \subset \mathrm{C}$$

$x^2 + 1 = 0$ in C ha soluzione: $x = \pm i$

45

Numeri Complessi - C



46



47

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Dati due numeri reali a e b, $a \leq b$, si definisce

$[a,b] = \{x \in \mathrm{R} : a \leq x \leq b\}$ Intervallo Chiuso



$(a,b) = \{x \in \mathrm{R} : a < x < b\}$ Intervallo Aperto $]a,b[$



48

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

$(a,b]$ e $[a,b)$ né **CHIUSO** né **APERTO**

Si può anche dire che $(a,b]$ è chiuso a destra e aperto a sinistra (viceversa per $[a,b)$

49

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

$[a,b) = \{x \in \mathrm{R} : a \leq x < b\}$



$(a,b] = \{x \in \mathrm{R} : a < x \leq b\}$



50

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo chiuso · Intervallo aperto · Insieme Aperto · Insieme Chiuso · Frontiera

Intervallo Illimitato superiormente, chiuso

$[b,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} : x \geq b\}$



Intervallo Illimitato superiormente, aperto

$(b,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} : x > b\}$



51

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo chiuso · Intervallo aperto · Insieme Aperto · Insieme Chiuso · Frontiera

Intervallo Illimitato inferiormente, chiuso

$(-\infty, a] = \{x \in \mathrm{R} : x \leq a\}$



Intervallo Illimitato inferiormente, aperto

$(-\infty, a) = \{x \in \mathrm{R} : x < a\}$



52

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

Intervallo Illimitato

$(-\infty, +\infty) = \{x \in R\}$

$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$

53

Sottoinsiemi di R - Intorno

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

Def: Intorno di centro x_0 e raggio δ

$I(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ cioè $\{x \in R : |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$

Intorno destro di x_0

$(x_0, x_0+\delta)$ cioè $\{x \in R : x_0 < x < x_0 + \delta, \delta > 0\}$

Intorno sinistro di x_0

$(x_0 - \delta, x_0)$ cioè $\{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0, \delta > 0\}$

54

Sottoinsiemi di R - Intorno

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

Intorno di ∞: un qualunque intervallo del tipo

$(-\infty , a)$ cioè $\{x \in \mathrm{R} : x < a \}$

oppure

$(a,+\infty)$ cioè $\{x \in \mathrm{R} : x > a \}$

55

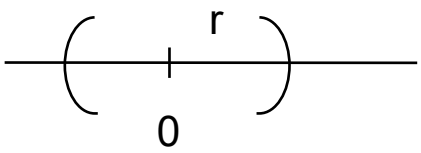
55

Sottoinsiemi di R - Intorno

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

Def.

A ⊂ R è **limitato** se ∃ I(0,r) che lo contiene



56

Sottoinsiemi di R - Intorno

Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

Def.

$k \in \mathrm{R}$ è maggiorante (minorante) per A se:

1) k è confrontabile con ogni $x \in \mathrm{A}$;

2) $\forall\, x \in \mathrm{A} : x \leq k \; (x \geq k)$

Es. i maggioranti di intervalli del tipo (a,b), $(a,b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ stanno nella semiretta:



57

Sottoinsiemi di R - Intorno

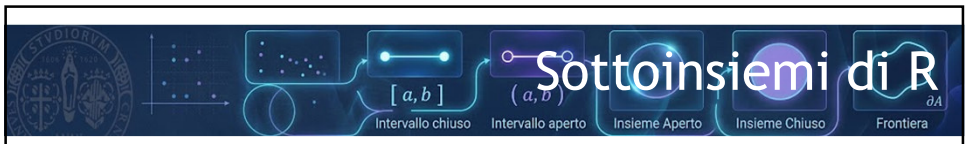
Intervallo chiuso | Intervallo aperto | Insieme Aperto | Insieme Chiuso | Frontiera

Es. i minoranti di intervalli del tipo (a,b), $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ stanno nella semiretta:



58

58



Def.

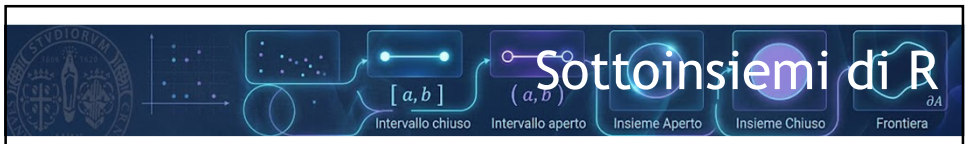
A è limitato superiormente se

$\exists\, k \in \mathrm{R} : x \leq k,\ \forall x \in \mathrm{A},$ k maggiorante di A

Es. (0,3), es: $k = 3$, etc

$\{x \in R:\ x + 3 \leq 2\}$, es: k= -1, k=0….etc

59



A è limitato inferiormente se

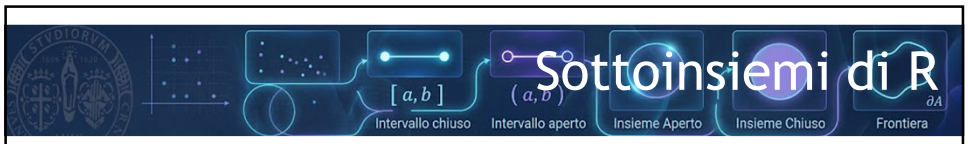
$\exists\, \mathrm{H} \in \mathrm{R} : \mathrm{H} \leq x,\ \forall x \in \mathrm{A},$ H minorante di A

Es. (0,2), H=0, etc

$\{x \in R:\ x^3 + 3 \geq 0\}$, H= $-\sqrt[3]{3}$, etc

A è limitato se è limitato superiormente e inferiormente

60



Def.

Si definisce estremo superiore di A, e si indica con supA, il minimo dei maggioranti di A, se esiste.

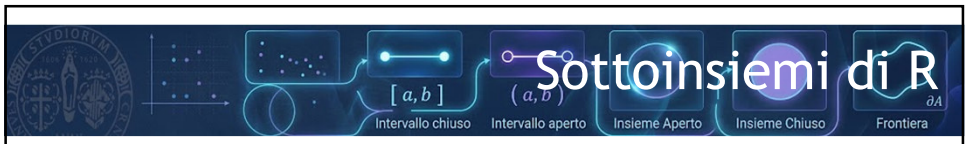
Es. [0, 5), 5 è l'estremo superiore,

[3,7], 7 è l'estremo superiore (=max)

(-∞, 1), 1 è l'estremo superiore

$\{x \in R: \ x^3 < 16\}$, x=$2\sqrt[3]{2}$ è il sup.

61



Si definisce estremo inferiore di A, e si indica con infA, il massimo dei minoranti di A, se esiste.

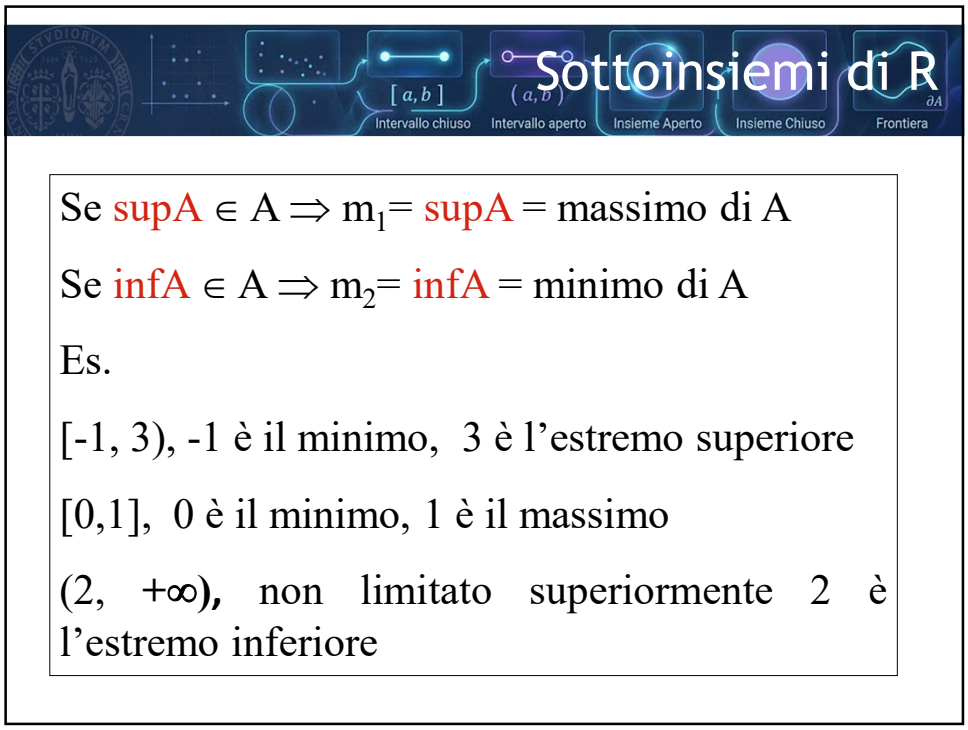
Es. (1, +∞) , 1 è l'estremo inferiore

[2,6], 2 è l'estremo inferiore

$\{x \in R: \ x^3 + 1 > 2\}$, $x = 1$ è l'estremo inferiore

supA e inf A se esistono sono unici.

62



Se supA ∈ A ⇒ m_1= supA = massimo di A

Se infA ∈ A ⇒ m_2= infA = minimo di A

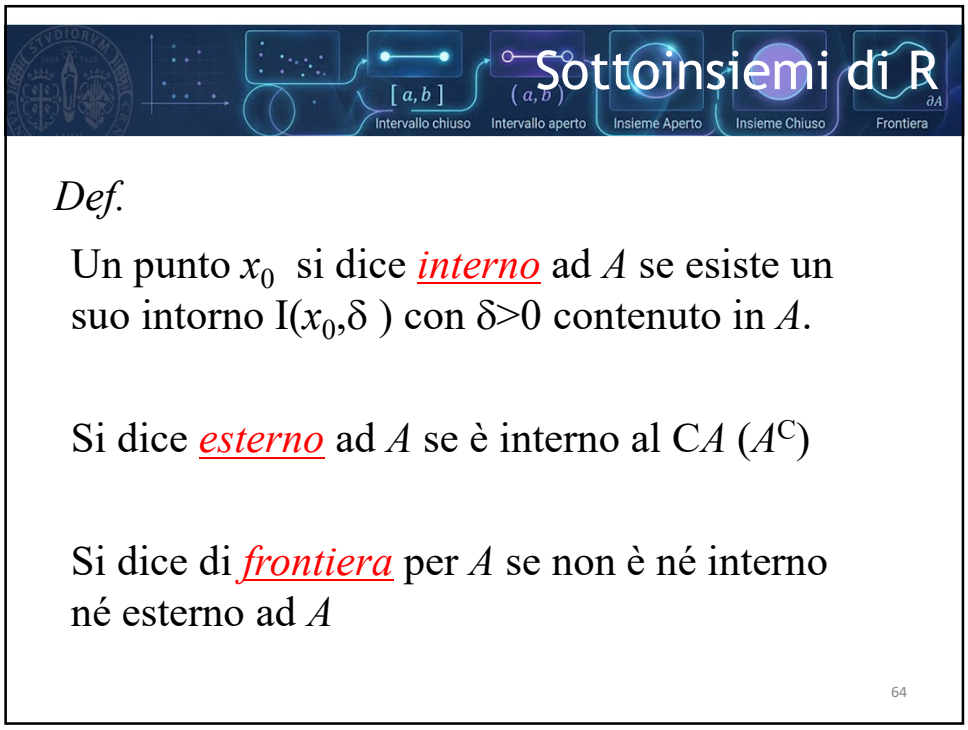
Es.

[-1, 3), -1 è il minimo, 3 è l'estremo superiore

[0,1], 0 è il minimo, 1 è il massimo

(2, +∞), non limitato superiormente 2 è l'estremo inferiore

63



Def.

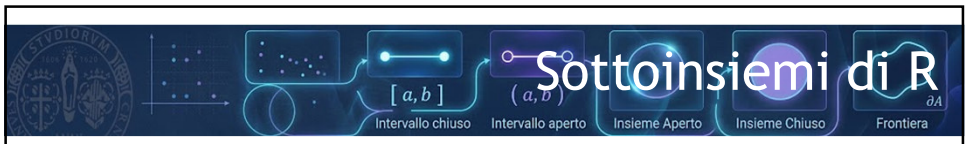
Un punto x_0 si dice *interno* ad A se esiste un suo intorno $I(x_0,\delta)$ con $\delta>0$ contenuto in A.

Si dice *esterno* ad A se è interno al CA (A^C)

Si dice di *frontiera* per A se non è né interno né esterno ad A

64

64



Interno di A

$\mathring{A}$ Insieme dei punti interni ad A

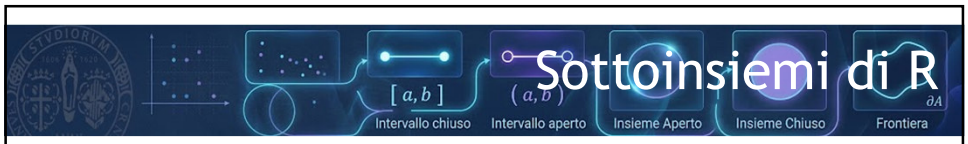
Es. se A=(1,3], $\mathring{A}$=(1,3)

∂A, FA Insieme dei punti di frontiera di A

Es. se A=(1,3], i punti di frontiera sono i punti x =1 e x = 3

65

65



Osservazioni

$se\ x_0 \in \mathring{A} \Rightarrow x_0 \in A$

$se\ x_0 \notin \mathring{A}$ (esterno) $\Rightarrow x_0 \notin A$

$se\ x_0 \in \partial A$ (frontiera)

può essere $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$, in ogni caso per $\forall$ I(x_0,δ) contiene sia punti di A sia punti di CA.

66



Def.

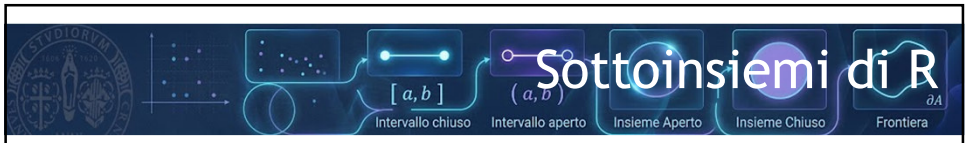
x_0 è un punto di accumulazione per A se

in $\forall$ I(x_0,δ) esiste un punto di A diverso da x_0.

(Cioè in ogni intorno di x_0 $\exists$ infiniti elementi di A)

Es. se A=(-2,3], x=-2 è di accumulazione per A, ma anche x=3, x=0, x=1,..etc, cioè è di accumulazione per A, qualunque $x \in$ [2,3]

67



DA = A' = derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A.

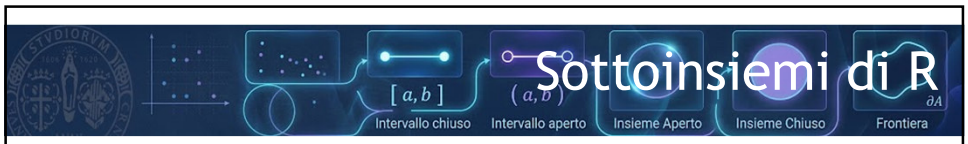
Se $x_0 \in$ DA allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Es. x = 1 e x =3 sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo (1,3], x = 3 appartiene all'intervallo dato, x = 1 NO.

Se $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in$ DA

Se $x_0 \notin$ DA allora x_0 si dice isolato

68



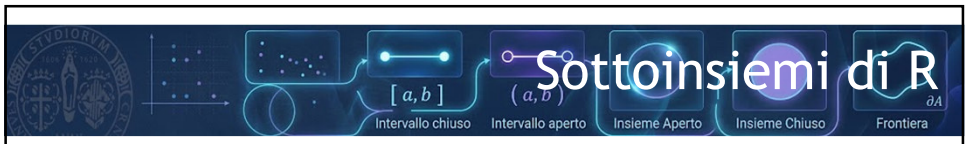
Se D$A = \varnothing \Rightarrow A$ si dice discreto

Es. $A = \{1,2,3,4\}$

Se D$A = A \Rightarrow A$ si dice perfetto

Es.: $A = [a,b]$

69



Def.

$A \subseteq$ R si dice aperto se ogni x$\in A$ è un punto interno, cioè se $A = \mathring{A}$

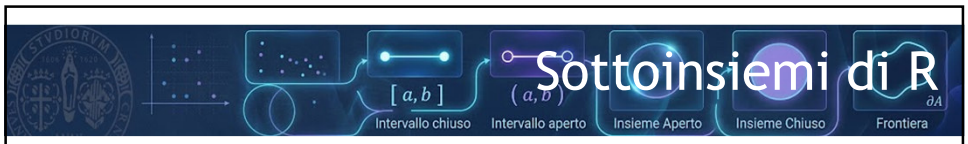
Es. (a,b)

A si dice chiuso se A^C è aperto.

Es. $[a,b]$

n.b. R e $\varnothing$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi.

70



Def.

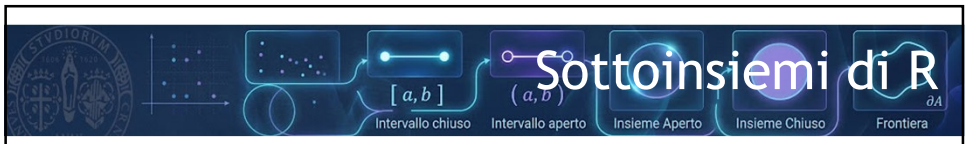
Dato $A \subset \mathrm{R}$ si definisce chiusura di A e si indica con $\overline{A}$, l'insieme :

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

A è chiuso $\Leftrightarrow$ $A=\overline{A}$

Es. se $A=(2,5]$, allora $\overline{A} = [2,5]$

71



Teorema di Bolzano Weierstrass

Ogni $A \subset \mathrm{R}^n$ limitato e infinito possiede almeno un punto di accumulazione.

Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto

Es. $A=[1,4]$, $\max(A)=4$, $\min(A)= 1$

$A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}$ $\max(A)=1$, $\min(A)= -1$

72