

Prova Intera del 18.09.2026 – (150 minuti)

Cognome	
Nome	
N.matricola	

- Svolgere il compito solo in questo foglio. Utilizzare altri fogli solamente se necessari e comunque, dopo averli chiesti al docente.
- Esercizio 1, 2, 3, 4 : **7.5** punti.
- L'esame sarà considerato superato se il punteggio totale ottenuto raggiunge almeno 18/30

1) Disegnare il grafico della seguente funzione, illustrando tutti i passaggi fondamentali:

$$y = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}$$

2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x [(1 + \sin(2x))]}{3x + \arctg(2x^2)}$$

3) Calcolare l'area della regione di piano D compresa tra le due curve di equazione $y = \ln(x)$ e $y = -x^2 + 1$ con $1 \leq X \leq 4$.

4) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$1) y = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}$$

* C.E. (Dominio)

$$\begin{cases} e^{(\sim)} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{2x-1}{x} \Rightarrow & x \neq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$

$(-\infty; 0), (0; +\infty)$

* Simmetria:

- $f(x)$ è Pari? $f(x) = \underline{f(-x)}$

$$f(-x) = e^{\left(\frac{e(-x)-1}{-x}\right)} = e^{\left(\frac{-2x-1}{-x}\right)} \neq f(x)$$

- $f(x)$ è Dispari? $f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -e^{\left(\frac{-2x-1}{-x}\right)} \neq f(x)$$

$f(x)$ ne Pari ne Dispari.

* Inters.:

* con l'asse x $\begin{cases} y=0 \\ e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mai}$

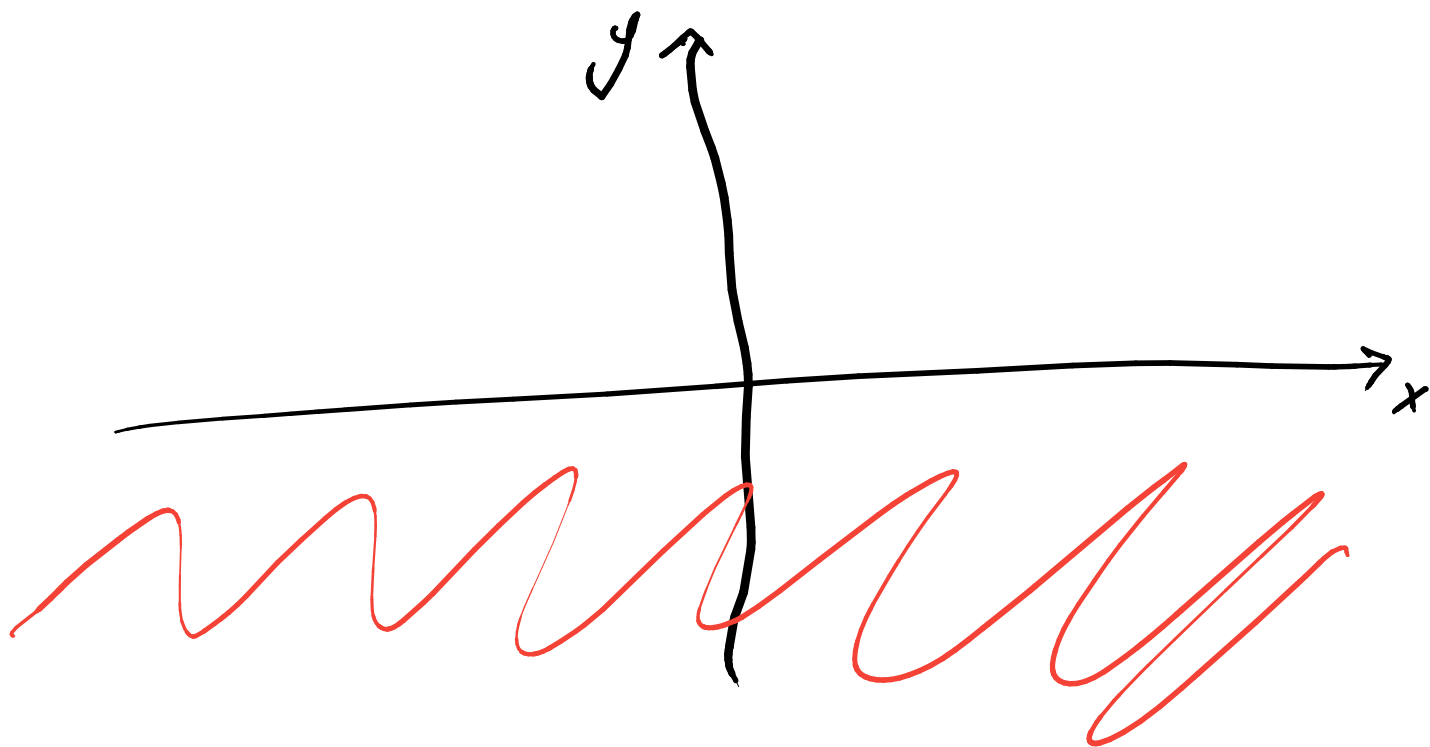
perché e^x è sempre positiva

- con l'asse y $\begin{cases} x=0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ Dom } f(x)$

No Inter. con gli assi

* Il Segno: ($y > 0$)

$e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} > 0$ sì, sempre verificata



* I limiti (agli estremi del Dominio)

$$(-\infty; 0), (0; +\infty)$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\frac{-\infty}{-\infty}} \quad \text{f.i.}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2 - \frac{1}{x}}{1}}$

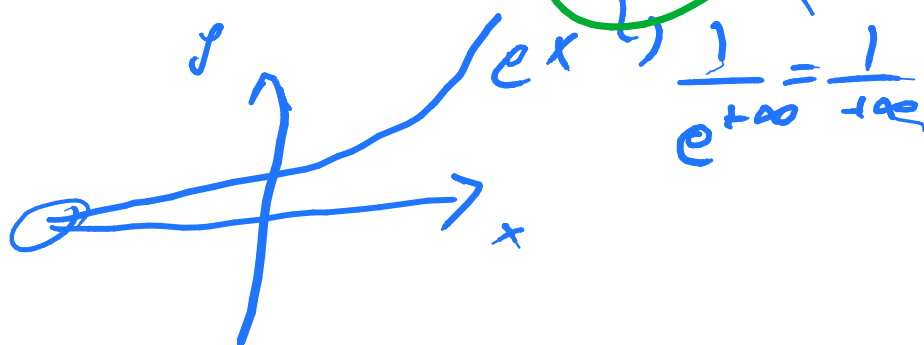
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(2 - \frac{1}{x})} = \frac{e^2}{\frac{1}{\infty} = 0}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\left(\frac{-1}{0^-}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

$0^- \approx -0,1$

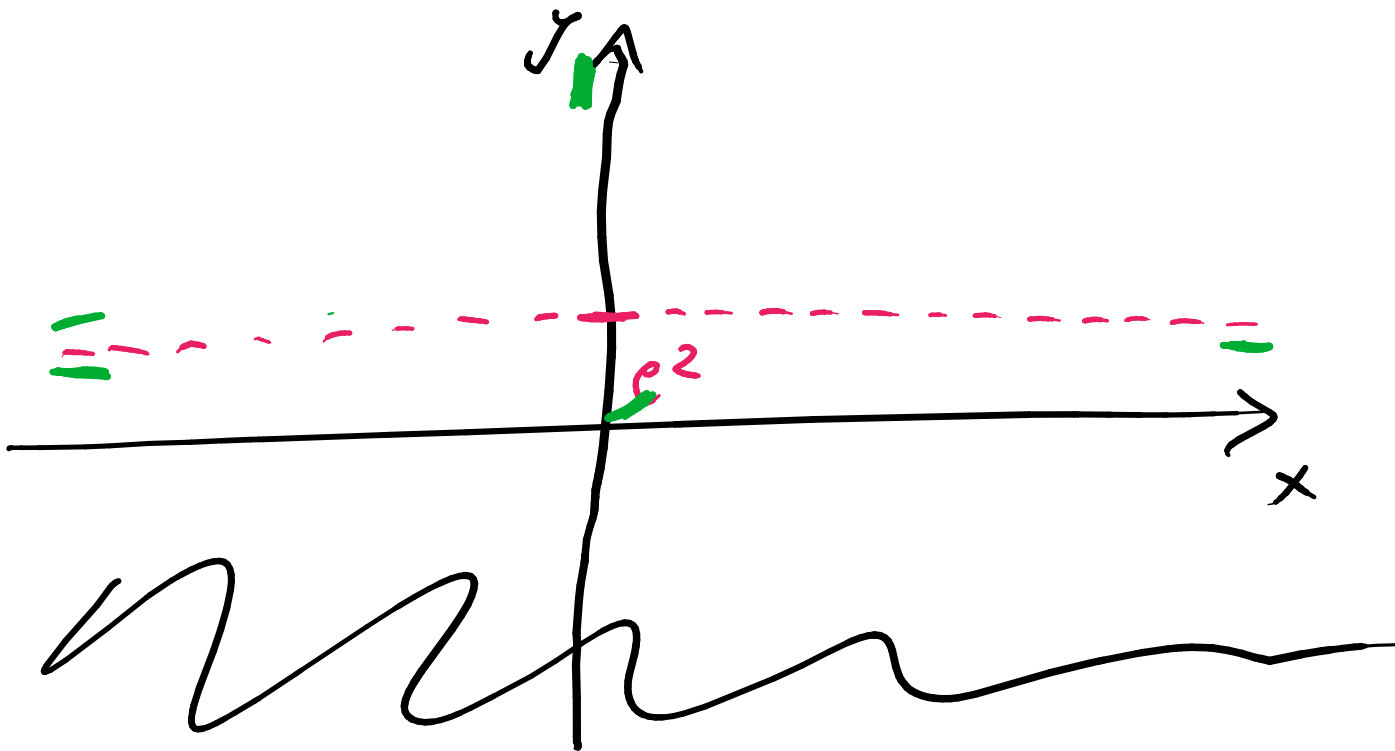
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$

$0^+ \approx +0,1$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\frac{+\infty}{+\infty}} \text{ f.T.}$$

$$e^{\left(\frac{x(2 - 1/x)}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2 - \cancel{1/x} \rightarrow 0} = e^2$$



- Derivata Prima $f'(x)$:

$$f(x) = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}$$

$\uparrow$ f
 $\nwarrow$ g

$$e^x \xrightarrow{D} e^x$$

$$\frac{f}{g} \xrightarrow{D} \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f' = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{2x - (2x-1) \cdot 1}{x^2} \right)$$

$$f' = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{\cancel{2x} - \cancel{2x} + 1}{x^2} \right)$$

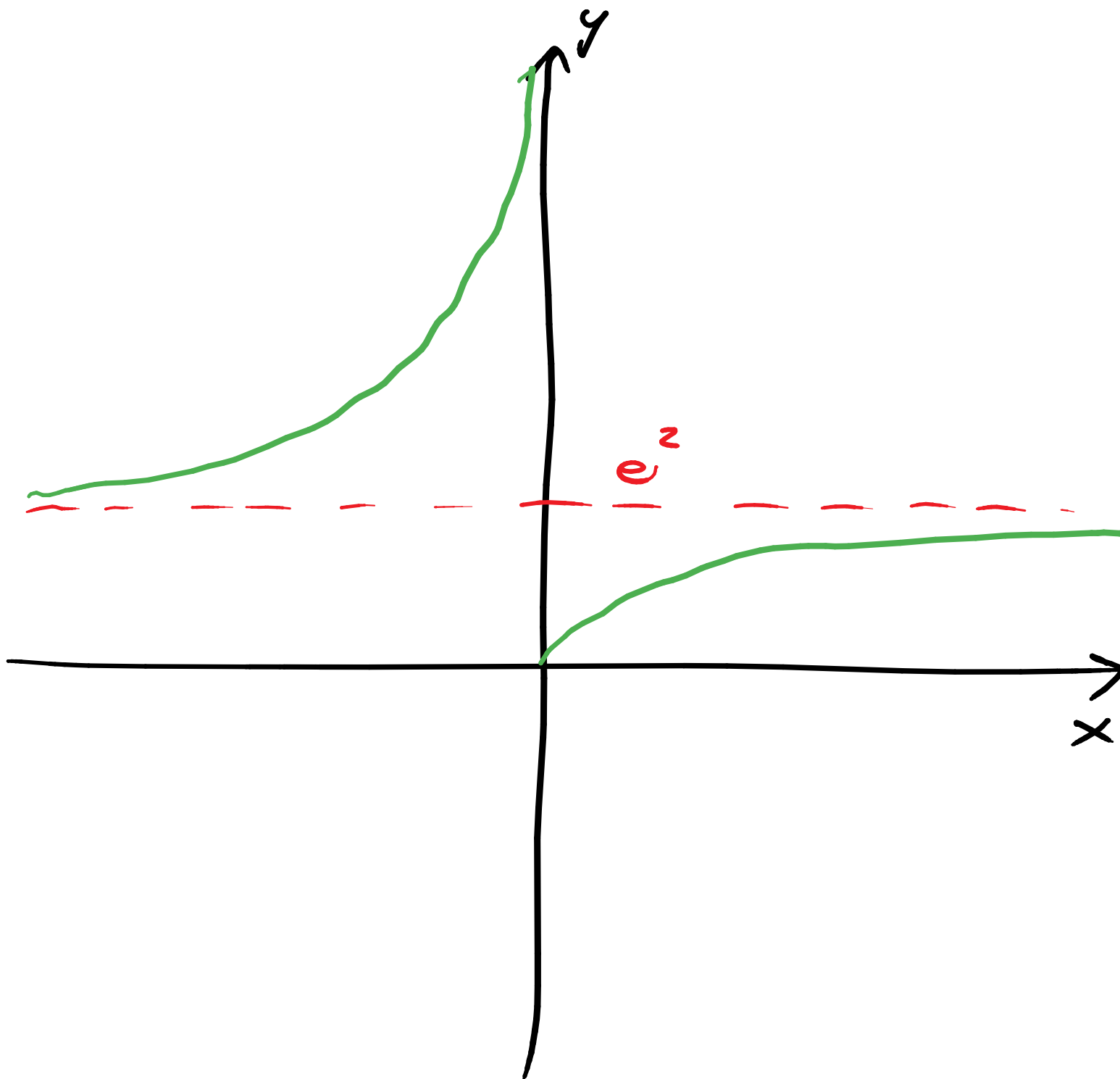
$$f' = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

- $f'(x) > 0$

$$\underbrace{e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{>0} > 0$$

sempre positiva > 0 sempre crescente

- $f(x)$ è sempre crescente,
Non ci sono punti critici (Max/min)



2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x [(1 + \sin(2x))]}{3x + \operatorname{arctg}(2x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(0) \cdot [1 + \sin(2(0))]}{\cancel{3(0)} + \cancel{\operatorname{arctg}(2(0)^2)}} = \frac{0}{0} \text{ f.I.}$$

I limiti Notevoli:

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \leadsto \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{?x} = 1$$

$$\sin(x) \sim x$$

$$\sin(2x) \sim ?x$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1 \quad \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{2x^2} = 1$$

$$\operatorname{arctg}(x) \sim x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x [1 + 2x]}{3x + 2x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \cancel{12x^2}}{3x + \cancel{2x^2}}$$

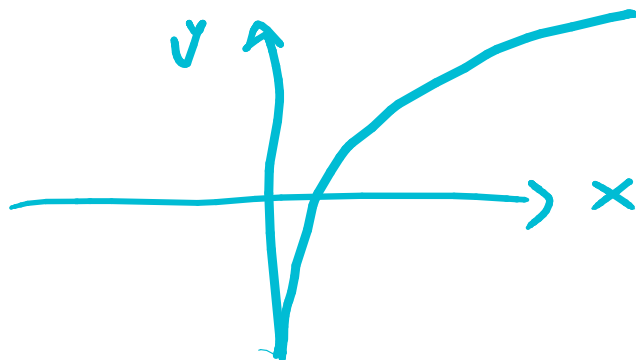
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{3x} = \frac{6}{3} = 2$$

Confronto tra
Infinitesimi?

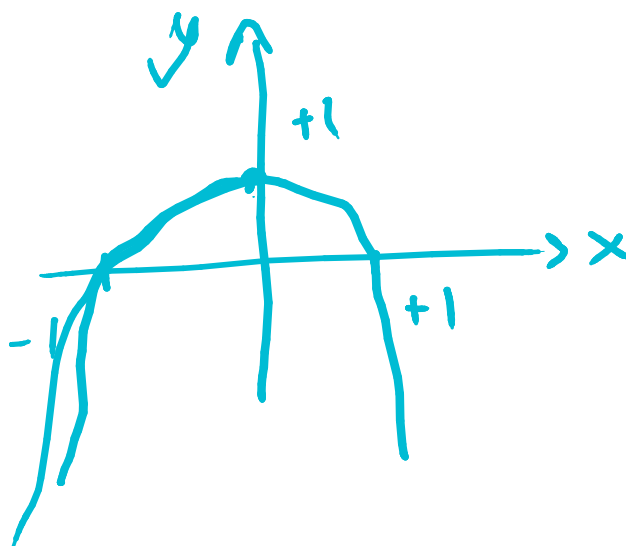
3) Calcolare l'area della regione di piano D compresa tra le due curve di equazione $y = \ln(x)$ e $y = -x^2 + 1$ con $1 \leq X \leq 4$.

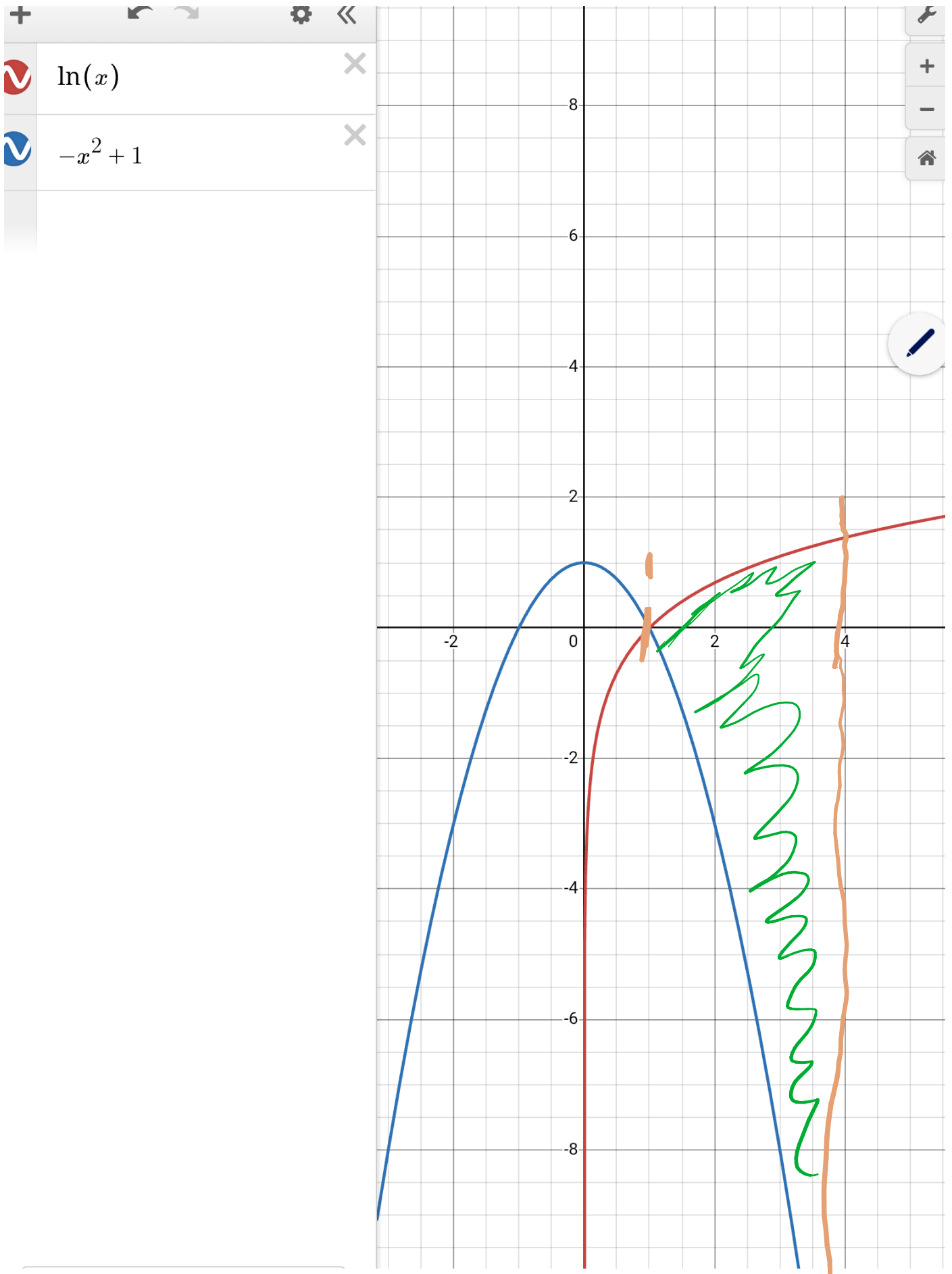
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{y_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{y_2}$$

$y_1 \Rightarrow$



$y_2 \Rightarrow$





$$\int_1^u [\log(x) - (-x^2 - 1)] \cdot dx$$

$$\int (\log(x) + x^2 - 1) \cdot dx$$

$$\underbrace{\int \log(x) \cdot dx}_{\text{Per Parti}} + \underbrace{\int x^2 \cdot dx}_{+ \frac{x^3}{3}} - \underbrace{\int 1 \cdot dx}_{-x}$$

↓

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

$$f = \log(x) \quad \xrightarrow{D} \quad f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = 1 \quad \xrightarrow{I} \quad g = x$$

$$\begin{aligned} \int \log(x) &= x \cdot \log(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x \cdot dx \\ &= x \cdot \log(x) - x \end{aligned}$$

$$\int_1^4 \sim = \left[x \cdot \log(x) - x + \frac{x^3}{3} - x \right]_1^4$$

$$\left(4 \cdot \log(4) - 4 + \frac{(4)^3}{3} - 4 \right) - \left(1 \cdot \log(1) - 1 + \frac{1}{3} - 1 \right)$$

