Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Fisica

Metodi Matematici per la Fisica - A.A. 2025/2026

Quarto appello - 09/09/2026

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{4z^4 + 5z^2 + 1}$$

- identifica e classifica le singolarità della funzione (al finito e all'infinito)
- determina i residui dei poli situati nel semipiano superiore del piano complesso
- usando il lemma di Jordan, calcola l'integrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ con x reale

Esercizio 2. Data la funzione di $L^2(0, 2\pi)$

$$f(x) = 1 - x \tag{1}$$

- Trova i coefficienti c_n dello sviluppo nella base di Fourier $u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$
- Verifica la relazione di completezza per i coefficienti ottenuti

(Ricorda la serie notevole: $\sum_1^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$].

Esercizio 3. Considera l'equazione differenziale definita su tutto l'asse reale

$$u''(t) - u(t) = -e^{-|t|}$$

con la condizione che $u(t)$ e le sue derivate tendano a zero per $|t| \to \infty$.

- Calcola la trasformata di Fourier della forzante
- Ricava la soluzione $u(\omega)$ nello spazio coniugato di Fourier
- Ricava la soluzione $u(t)$ nello spazio di partenza

Esercizio 4. Dato uno spazio vettoriale V di dimensione 2 sul campo complesso, e data una sua base ortonormale $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, si definiscono gli operatori A, B tramite la loro azione sulla base:

$$\begin{aligned} A|u_1\rangle &= |u_1\rangle + i\beta|u_2\rangle \\ A|u_2\rangle &= i\gamma|u_1\rangle - |u_2\rangle \\ B|u_1\rangle &= -|u_1\rangle - i\alpha|u_2\rangle \\ B|u_2\rangle &= -i|u_1\rangle + |u_2\rangle \end{aligned}$$

con α, β, γ numeri reali.

- Determina le rappresentazione matriciali degli operatori A, B nella base $\{|u_i\rangle\}$
- Determina i coefficienti β, γ, α in modo tale che le matrici A, B siano hermitiane e siano diagonalizzabili simultaneamente
- Trova autovalori ed autovettori di A, B