Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Fisica

Metodi Matematici per la Fisica - A.A. 2025/2026

Terzo appello - 21/07/2026

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{z-2}{z^3 - 4z^2 + 4z}$$

- identifica e classifica le singolarità della funzione
- calcola i residui di tutte le singolarità
- determina i primi tre termini della serie di Laurent intorno a $z = 0$
- calcola l'integrale $\oint f(z)dz$ su un cerchio di raggio 3 centrato nell'origine

Esercizio 2. Una corda vibrante di lunghezza π all'istante iniziale è descritta dalla funzione $u(x) = x$.

- Determina i coefficienti c_n dell'espansione di $u(x)$ nei modi normali della corda $u_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin nx$
- Verifica la relazione di completezza $\sum_1^\infty |c_n|^2 = \langle u|u\rangle$

(Formule utili: $\int dx(x \sin \alpha x) = \frac{1}{\alpha^2}(\sin \alpha x - \alpha x \cos \alpha x) + C$, $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Esercizio 3. Considera l'equazione differenziale definita su tutto l'asse reale

$$u''(x) - u(x) = \theta(x+1) - \theta(x-1)$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino (vale 0 per $x < 0$ e 1 per $x \geq 0$).

- Calcola la trasformata di Fourier della forzante
- Ricava la soluzione $u(k)$ nello spazio coniugato di Fourier
- Ricava la soluzione $u(x)$ nello spazio di partenza (suggerimento: convoluzione e funzione di Green)

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

determina il coefficiente $\alpha \in \mathbb{C}$ in modo che

- A ammetta autovettori ortogonali
- A sia hermitiana
- $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ sia unitaria
- trova autovalori e autovettori per gli ultimi due casi
- per il primo caso, trova autovettori e autovalori di A, diagonalizzala e scrivi la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione (scrivi autovalori e autovettori utilizzando la notazione esponenziale complessa)