

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Disequazioni e sistemi di disequazioni

risolvere con la tabella dei segni

A che cosa serve oggi

Una domanda economica

Per quali livelli di produzione il **profitto è positivo**?

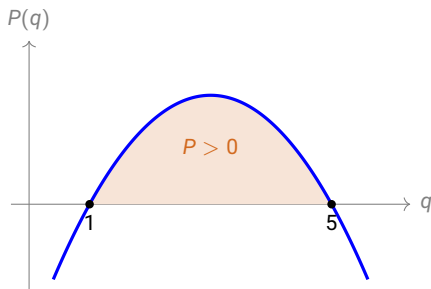
Significa chiedersi dove

$$P(q) > 0.$$

È una **disequazione**.

E più avanti

Vedremo durante il corso che lo stesso strumento dirà dove una funzione cresce: $f'(x) > 0$. Quello che impari oggi torna lì.



il profitto è positivo tra i due punti di pareggio

Obiettivo della lezione

Alla fine saprai **risolvere**:

- disequazioni di **primo grado**
- disequazioni di **secondo grado**
- disequazioni **fratte**
- **sistemi** di disequazioni

Lo strumento comune è la **tabella dei segni**.

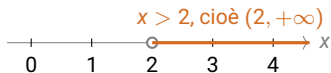
*La soluzione non è un punto,
ma un insieme di valori che leggi sulla retta.*

Che cos'è una disequazione

Un'**equazione** cerca i valori che rendono due espressioni *uguali*.

Una **disequazione** cerca i valori per cui una espressione è *maggiore o minore* dell'altra.

La soluzione è quindi tipicamente un **intervallo**, o un'unione di intervalli, sulla retta reale.



La regola del verso

Trasformando una disequazione, il **verso** ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) non sempre resta uguale:

- Sommare o sottrarre la stessa quantità: il verso **resta**.
- Moltiplicare o dividere per un numero **positivo**: il verso **resta**.
- Moltiplicare o dividere per un numero **negativo**: il verso **si inverte**.

È l'errore più comune: quando dividi per un coefficiente negativo, ricordati di girare il verso.

Disequazioni di primo grado

Si isola x come in un'equazione, applicando la regola del verso.

Esempio: $1 - 2x < 5$.

- Porto i termini noti: $-2x < 4$.
- Divido per -2 (negativo): **inverto il verso**, $x > -2$.

Soluzione: $x > -2$, cioè $(-2, +\infty)$



La tabella dei segni: lo strumento

Per il secondo grado e per le fratte serve un solo strumento.

1. Trova gli **zeri** di ciascun fattore.
2. Mettili **in ordine** sulla retta.
3. In ogni intervallo segna il **segno** di ciascun fattore.
4. **Combina** i segni nella riga finale



Disequazioni di secondo grado: il metodo

Si studia il **segno della parabola** $ax^2 + bx + c$.

1. Trova gli **zeri**, risolvendo l'equazione associata.
2. Guarda il segno di a : se $a > 0$ la parabola è positiva **fuori** dagli zeri e negativa **tra** gli zeri; se $a < 0$ vale il contrario.
3. Leggi gli intervalli che soddisfano il verso richiesto.

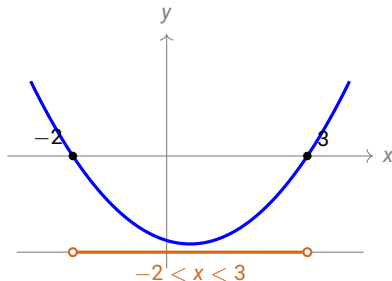
Caso $\Delta < 0$: nessuno zero reale, la parabola ha sempre lo stesso segno, quello di a .

Secondo grado: esempio

Risolvi $x^2 - x - 6 < 0$.

- Zeri: $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$, quindi $x = -2$ e $x = 3$.
- $a = 1 > 0$: la parabola è negativa **tra** gli zeri.
- Cerchiamo dove è < 0 : tra -2 e 3 .

Soluzione: $-2 < x < 3$, cioè $(-2, 3)$



Disequazioni fratte: il metodo

1. **Dominio**: il denominatore deve essere $\neq 0$.
2. Studia il **segno** di numeratore e denominatore con la tabella dei segni.
3. **Combina** i segni (regola del quoziente) e leggi gli intervalli.

Attenzione agli estremi

Con $\geq$ o $\leq$ si **includono** gli zeri del numeratore, ma si **escludono** sempre gli zeri del denominatore.

Fratte: esempio

Risolvi $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$.

- Dominio: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$.
- Zeri: numeratore $x = 1$, denominatore $x = -2$.
- Segno del quoziente: positivo per $x < -2$, negativo tra -2 e 1 , positivo per $x > 1$.
- Cerchiamo ≥ 0 : includo $x = 1$, escludo $x = -2$.

Soluzione: $x < -2$ oppure $x \geq 1$,
cioè $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$



cerchio vuoto: escluso cerchio pieno: incluso

Sistemi di disequazioni: il metodo

Un sistema chiede che **tutte** le condizioni valgano insieme.

1. Risolvi **ogni** disequazione separatamente.
2. Riporta le soluzioni sulla **stessa retta**.
3. La soluzione del sistema è l'**intersezione**: dove tutte le righe si sovrappongono.

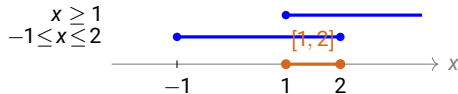
*Nei sistemi si interseca; non confondere con l'unione, che invece
terrebbe tutto.*

Sistemi: esempio

Risolvi
$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ (x - 2)(x + 1) \leq 0 \end{cases}$$

- Prima: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.
- Seconda: $(x - 2)(x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$.
- Intersezione: i valori comuni vanno da 1 a 2.

Soluzione: $1 \leq x \leq 2$, cioè $[1, 2]$



Verifica al volo

Metti in pausa e rispondi

Per ciascuna, qual è il **primo passo** o la condizione da non dimenticare?

1. $3 - x > 0$

2. $\frac{x+1}{x-4} \leq 0$

3. $\begin{cases} x > 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

Pensa al metodo, non al risultato. Quando hai risposto, riprendi.

Metti in pausa e prova da solo

Risolvi $\frac{x+3}{x-1} < 0$.

Segui i passi: dominio, zeri di numeratore e denominatore, tabella dei segni, attenzione agli estremi.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

- Dominio: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.
- Zeri: numeratore $x = -3$, denominatore $x = 1$.
- Segno del quoziente: $+$ per $x < -3$, $-$ tra -3 e 1 , $+$ per $x > 1$.
- Cerchiamo < 0 : tra -3 e 1 (estremi esclusi).

Soluzione: $-3 < x < 1$, cioè $(-3, 1)$

Errori da evitare

- Errore:** non invertire il verso dividendo per un numero negativo.
- Errore:** includere lo zero del denominatore tra le soluzioni.
- Errore:** mettere gli zeri sulla retta in ordine sbagliato.

Disegna sempre la retta dei segni: rende visibile la soluzione.

Consigli pratici e prossimi passi

Una checklist che vale per tutte

1. Porta tutto a un lato e **riconosci il tipo**.
2. Per le fratte, prima il **dominio**.
3. Trova gli **zeri** e ordinali sulla retta.
4. Costruisci la **tabella dei segni** e leggi gli intervalli, con attenzione agli estremi.
5. Nei **sistemi**, interseca.

È un metodo che ritrovi spesso all'esame.

Prossima lezione: il dominio delle funzioni, dove radici, frazioni e logaritmi si combinano in un'unica procedura.