

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

**Equazioni con valore
assoluto,
radicali, esponenziali e
logaritmiche**

A che cosa servono oggi

Una domanda concreta

Un investimento cresce nel tempo.
Tra quanti anni **raddoppia**?

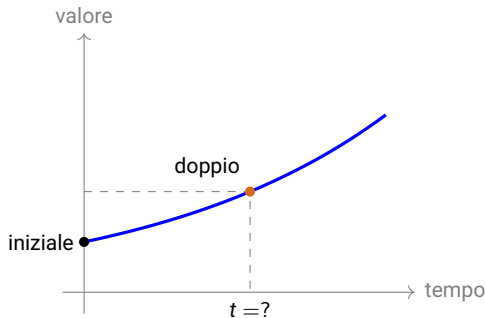
La risposta vive *nell'esponente*:

$$2 = (1,05)^t.$$

Il problema comune

L'incognita è "intrappolata":
dentro un valore assoluto, sotto una radice,
oppure **nell'esponente**.

Per liberarla serve uno strumento
mirato per ciascun caso.



il logaritmo libera l'esponente

Obiettivo della lezione

Alla fine saprai **risolvere** quattro famiglie di equazioni:

- con **valore assoluto**: $|A(x)| = B(x)$
- con **radicali**: $\sqrt{f(x)} = g(x)$
- **esponenziali**: $a^{f(x)} = b$
- **logaritmiche**: $\log_a f(x) = c$

E soprattutto saprai **riconoscere le condizioni** che dicono quali soluzioni accettare.

*Una regola d'oro le attraversa tutte:
prima il dominio, poi la verifica.*

Il metodo, in tre mosse

1. **Dominio.** Dove l'equazione ha senso: denominatori $\neq 0$, radicandi ≥ 0 (indice pari), argomenti dei logaritmi > 0 .
2. **Trasformazioni.** Alcune conservano le soluzioni; altre, dette implicative, possono aggiungerne di false: elevare al quadrato, togliere il valore assoluto, moltiplicare per espressioni di segno incerto.
3. **Verifica.** Dopo un passo implicative, sostituisci nell'equazione iniziale e scarta le soluzioni **spurie**.

Tieni a mente queste tre mosse: torneranno in ogni caso.

Valore assoluto: che cos'è

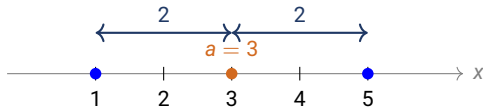
Definizione

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Lettura geometrica

$|x - a|$ è la **distanza** tra x e a .

Esempio: $|x - 3| = 2$ sono
"i punti che distano 2 da 3":
cioè $x = 1$ e $x = 5$.



Valore assoluto: come si risolve

Per risolvere $|A(x)| = B(x)$:

1. Imponi $B(x) \geq 0$. Se $B(x) < 0$ non ci sono soluzioni: un valore assoluto non è mai negativo.
2. Apri due casi: $A(x) = B(x)$ oppure $A(x) = -B(x)$.
3. Risolvi entrambi e **verifica** le soluzioni nella condizione del passo 1.

Togliere il valore assoluto è un passo implicativo: la verifica non è opzionale.

Valore assoluto: esempio

Risolvi $|2x - 1| = 5$.

- Condizione: il secondo membro è $5 \geq 0$, quindi procediamo.
- Due casi:

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3, \quad 2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2.$$

- Verifica: $|2 \cdot 3 - 1| = 5$ e $|2 \cdot (-2) - 1| = 5$.
Entrambe corrispondono.

Soluzione: $x = 3$ oppure $x = -2$

Valore assoluto: quando la condizione conta

Risolvi $|x - 2| = x + 1$.

- Condizione: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.
- Caso $x - 2 = x + 1 \Rightarrow -2 = 1$: **impossibile**, niente soluzioni da qui.
- Caso $x - 2 = -(x + 1) \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.
- Verifica: $\frac{1}{2} \geq -1$ e $|\frac{1}{2} - 2| = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$.
Corrisponde.

Soluzione: $x = \frac{1}{2}$

Radicali a indice pari: le condizioni

Per $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (radice quadrata, e in generale indice pari):

1. **Esistenza:** $f(x) \geq 0$ (il radicando non può essere negativo).
2. **Concordanza dei segni:** $g(x) \geq 0$ (una radice pari non è mai negativa, quindi nemmeno il membro a destra).
3. **Elevamento al quadrato:** $f(x) = [g(x)]^2$. È un passo implicativo.
4. Risolvi e **verifica:** accetta solo le soluzioni che rispettano le due condizioni.

Indice dispari: nessuna condizione sul radicando, l'elevamento è equivalente.

Radicali: esempio con una soluzione spuria

Risolvi $\sqrt{2x+3} = x+1$.

- Condizioni: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$ e $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. In sintesi $x \geq -1$.
- Elevo al quadrato:
 $2x+3 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ oppure $x = -\sqrt{2}$.
- Verifica: $\sqrt{2} \approx 1,41 \geq -1$, accettabile; $-\sqrt{2} \approx -1,41 < -1$,
spuria: la scarto.

Soluzione: $x = \sqrt{2}$

Equazioni esponenziali: il metodo

Per $a^{f(x)} = b$ con $a > 0$, $a \neq 1$:

- Se $b \leq 0$: **nessuna soluzione** (una potenza a base positiva è sempre positiva).
- Se $b > 0$: passa al logaritmo, $f(x) = \log_a b$.
- Caso comodo: se riesci a scrivere b come potenza di a , basta uguagliare gli esponenti.

Monotonia (utile più avanti, per le disequazioni)

Se $a > 1$ la funzione cresce; se $0 < a < 1$ decresce.

Esponenziali: due esempi

Base riconoscibile

$2^x = 8$. Scrivo $8 = 2^3$, quindi $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$.

Soluzione: $x = 3$

Base non riconoscibile

$2^x = 5$. Non è una potenza intera di 2: passo al logaritmo,

$$x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32.$$

Soluzione: $x = \log_2 5$

Equazioni logaritmiche: condizioni e metodo

Per $\log_a f(x) = c$ con $a > 0$, $a \neq 1$:

1. **Dominio:** l'argomento deve essere positivo, $f(x) > 0$.
Mettilo da parte subito.
2. **Passa alla forma esponenziale:** $f(x) = a^c$.
3. Risolvi e **accetta solo** le soluzioni che stanno nel dominio.

Quando compaiono più logaritmi, prima li riunisci con le proprietà: $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$.

Logaritmiche: primo esempio

Risolvi $\log(x - 1) = 2$ (logaritmo in base 10).

- Dominio: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.
- Forma esponenziale: $x - 1 = 10^2 = 100 \Rightarrow x = 101$.
- Verifica: $101 > 1$, sta nel dominio.

Soluzione: $x = 101$

Logaritmiche: quando il dominio scarta una soluzione

Risolvi $\log x + \log(x - 3) = 1$ (base 10).

- Dominio: $x > 0$ e $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.
- Riunisco: $\log(x(x - 3)) = 1 \Rightarrow x(x - 3) = 10$.
- $x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ oppure $x = -2$.
- Verifica nel dominio: $5 > 3$, accettabile; -2 non è > 3 , lo scarto.

Soluzione: $x = 5$

Metti in pausa e rispondi

Per ciascuna equazione, qual è la **prima condizione** da imporre?

1. $\sqrt{x-4} = x-6$

2. $\log(2x+1) = 0$

3. $|x+2| = 3x$

Pensa alla condizione, non alla soluzione. Quando hai risposto, riprendi.

Metti in pausa e prova da solo

Risolvi $\sqrt{x+4} = x-2$.

Segui i passi: dominio e concordanza dei segni, elevamento al quadrato, verifica delle spurie.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

- Dominio: $x + 4 \geq 0$ e $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
- Quadrato: $x + 4 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$.
- $x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $x = 5$.
- $x = 0$ non rispetta $x \geq 2$: **spuria**.
 $x = 5$ verifica: $\sqrt{9} = 3 = 5 - 2$.

Soluzione: $x = 5$

Errori da evitare

- Errore:** dimenticare $x - 2 \geq 0$ e tenere la spuria $x = 0$.
- Errore:** scrivere $\sqrt{x^2} = x$. Vale $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Errore:** risolvere il logaritmo senza imporre l'argomento positivo.

Scrivi i passaggi e verifica: non andare a memoria.

Consigli pratici e prossimi passi

Una checklist che vale per tutte

1. **Dominio**, sempre per primo.
2. Riconosci il tipo: valore assoluto, radice, esponenziale, logaritmo.
3. Applica il metodo del tipo: casi, elevamento, passaggio a logaritmo o a esponenziale.
4. Dopo ogni passo implicativo, **verifica** e scarta le spurie.

È uno degli argomenti che ritrovi spesso all'esame, anche dentro il calcolo del dominio.

Prossima lezione: dalle equazioni alle disequazioni: studio del segno, tabelle dei segni e sistemi.