

Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Equazioni di secondo grado

discriminante, formula risolutiva, fattorizzazione

A che cosa serve

Una domanda di gestione

Il profitto dipende dal livello di produzione x :

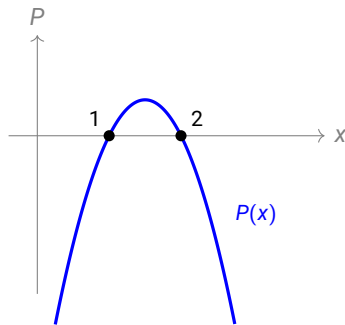
$$P(x) = -2x^2 + 6x - 4$$

Non è una retta: è una **parabola**.

La domanda

Per quali livelli di produzione il profitto **si azzerà**? Sono i **punti di pareggio**.

Cerchiamo gli x con $P(x) = 0$:
un'equazione di **secondo grado**.



il profitto si azzerà in due punti

Obiettivo della lezione

1. Risolvere le **equazioni di secondo grado** con il discriminante e la formula risolutiva.
2. Usare le soluzioni per **fattorizzare** il trinomio $ax^2 + bx + c$.

Il discriminante ci dice quante soluzioni aspettarci, la formula ce le consegna, la fattorizzazione le riutilizza.

La forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

- $a \neq 0$: se $a = 0$ sparisce il termine x^2 e si torna al **primo grado**.
- Prima di tutto: **portare tutto a sinistra** e riordinare per grado decrescente.

Esempio: $2x^2 = 6x - 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$.

Solo in forma normale leggiamo correttamente a , b e c .

Casi incompleti: manca b oppure manca c

Manca b ($ax^2 + c = 0$)

$$x^2 = k \Rightarrow \begin{cases} k > 0 : & x = \sqrt{k} \text{ oppure } x = -\sqrt{k} \\ k < 0 : & \text{nessuna soluzione} \end{cases}$$

Passo implicativo: da $x^2 = k$ escono **due** soluzioni, con segno $\pm$.

Manca c ($ax^2 + bx = 0$)

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } x = -\frac{b}{a}$$

Raccoglimento e **annullamento del prodotto** (Lezione 6):
un prodotto è zero quando almeno un fattore è zero.

Il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

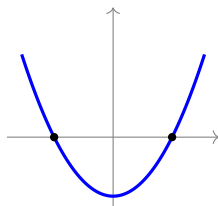
Prima ancora di risolvere, Δ ci dice **quante** soluzioni reali aspettarci:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: una sola soluzione (doppia)
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

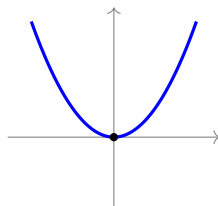
È il primo conto da fare: pochi secondi che orientano tutto il resto.

Lettura grafica: la parabola e l'asse x

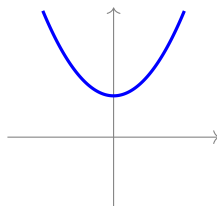
Le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ sono i punti in cui la parabola $y = ax^2 + bx + c$ **tocca l'asse x** .



$\Delta > 0$
due intersezioni



$\Delta = 0$
un solo punto



$\Delta < 0$
nessuna intersezione

Il segno di Δ e la posizione della parabola raccontano la stessa cosa.

La formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $-b$: attenzione al segno di b
- $\pm\sqrt{\Delta}$: il doppio segno genera le **due** soluzioni
- $2a$: al denominatore c'è tutto il blocco $-b \pm \sqrt{\Delta}$

La formula vale sempre, con $\Delta \geq 0$. Si enuncia e si usa:
i casi incompleti restano più rapidi con i metodi diretti.

Esempio d'esame: impostazione e discriminante

Equazione: $2x^2 - 6x + 4 = 0$

- **Forma normale:** già in ordine. Leggo i coefficienti:

$$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 4$$

- **Discriminante:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$$

$\Delta = 4 > 0$: mi aspetto due soluzioni reali distinte

Esempio d'esame: soluzioni e verifica

Applico la formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$$

$$x_1 = \frac{6 - 2}{4} = 1 \quad x_2 = \frac{6 + 2}{4} = 2$$

Soluzione: $x = 1$ oppure $x = 2$

Verifica (sostituisco $x = 1$): $2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 4 = 0$
corrisponde.

Stessa verifica con $x = 2$: $8 - 12 + 4 = 0$, corrisponde.

Metti in pausa e prova da solo

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$

2. $x^2 + x + 1 = 0$

Segui i passi: forma normale, coefficienti, discriminante, poi formula solo se serve.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzioni

- 1. $\Delta = 16 - 16 = 0$:
una sola soluzione (doppia)
 $x = \frac{4}{2} = 2$. Soluzione: $x = 2$
- 2. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$:
equazione impossibile,
nessuna soluzione

Errori da evitare

- Errore:** dimenticare il doppio segno $\pm$ e trovare una sola soluzione
- Errore:** sbagliare i segni in Δ : con b negativo, b^2 è comunque positivo
- Errore:** in $ax^2 + bx = 0$, dividere per x e perdere la soluzione $x = 0$

Dalle radici alla fattorizzazione

Se x_1 e x_2 sono le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Non dimenticare il coefficiente **a** davanti.
- Nei fattori compare **x meno la radice**: attenzione ai segni.

A che cosa serve: semplificare frazioni algebriche e studiare il segno del trinomio, come vedremo nelle prossime lezioni.

Fattorizzazione: l'esempio guida e i casi particolari

Esempio guida ($x_1 = 1, x_2 = 2, a = 2$):

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$$

Controllo rapido: sviluppando il prodotto ritrovo il trinomio di partenza.

- $\Delta = 0$: le due radici coincidono e resta un **quadrato**:
 $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
- $\Delta < 0$: il trinomio **non si fattorizza** con numeri reali:
 $x^2 + x + 1$ resta così com'è

Ritorno al profitto, consigli e prossimi passi

Il profitto dell'inizio $P(x) = -2x^2 + 6x - 4 = 0$

Cambio segno a entrambi i membri: $2x^2 - 6x + 4 = 0$.

I punti di pareggio sono le radici: $x = 1$ e $x = 2$.

I quattro passi, in ordine

1. Forma normale e coefficienti a, b, c .
2. **Discriminante**: quante soluzioni aspettarsi.
3. Formula risolutiva (o metodi rapidi se manca b o c).
4. **Verifica** per sostituzione.

Prossimo passo: Nelle prossime lezioni, useremo radici e fattorizzazione per studiare disequazioni e domini.