

Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Sistemi lineari 2×2 e intersezione di rette

due equazioni, due incognite, un punto in comune

A che cosa serve

Una domanda di mercato

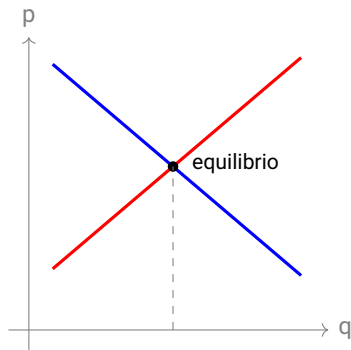
Quando il prezzo sale, i compratori vogliono meno:
⇒ la **domanda** scende.

E i venditori offrono di più:
⇒ l'**offerta** cresce.

Lo strumento

Domanda e offerta sono due relazioni lineari, cioè due rette. Il **prezzo di equilibrio** è quello in cui si incontrano.

Trovare quel punto significa risolvere un **sistema**: due condizioni vere allo stesso tempo.



blu = domanda, rosso = offerta

Obiettivo della lezione

1. Risolvere un **sistema lineare 2×2** con due metodi: sostituzione e riduzione.
2. Interpretarlo come **intersezione di due rette**.

*Lo stesso problema, due punti di vista:
il calcolo dà la coppia di numeri,
il grafico ne dà il significato.*

Che cos'è un sistema 2×2

Da una a due incognite

Nella lezione scorsa risolvevamo una equazione in una incognita. Ora abbiamo **due equazioni in due incognite**, x e y , da soddisfare insieme:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Soluzione del sistema: una coppia (x, y) che rende vere *entrambe* le equazioni allo stesso tempo.

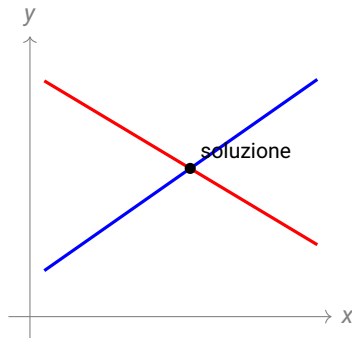
Non basta che funzioni in una: deve funzionare in tutte e due.

Interpretazione geometrica

Ogni equazione di primo grado in x e y , nel piano, è una **retta**.

Risolvere il sistema vuol dire trovare il punto che appartiene a *entrambe* le rette: la loro **intersezione**.

⇒ le coordinate di quel punto sono proprio la coppia (x, y) che cerchiamo.



il punto comune alle due rette

Due metodi per lo stesso punto

Sostituzione

Isolo un'incognita in una equazione e la sostituisco nell'altra. Resta una sola equazione in una incognita.

Riduzione

Sommo o sottraggo le due equazioni, se serve dopo averle moltiplicate per un numero, in modo da **eliminare** un'incognita.

Sono trasformazioni equivalenti: portano alla stessa soluzione. Scegli la più comoda.

Esempio d'esame: impostazione

Il sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 20 = 0 \\ -x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

Portiamo i termini noti a destra:

$$\begin{cases} x + 3y = 20 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

Cerchiamo il punto di intersezione delle due rette.

Lo risolviamo in due modi, per confrontarli.

Esempio d'esame: metodo della riduzione

Sommo le due equazioni: la x si elimina.

$$\begin{aligned}(x + 3y) + (-x + 2y) &= 20 + (-5) \\ 5y &= 15 \Rightarrow y = 3\end{aligned}$$

Sostituisco $y = 3$ nella prima:

$$x + 3(3) = 20 \Rightarrow x = 11$$

Soluzione: $(x, y) = (11, 3)$

Esempio d'esame: metodo della sostituzione

Dalla prima ricavo x : $x = 20 - 3y$

Sostituisco nella seconda:

$$-(20 - 3y) + 2y + 5 = 0$$

$$-20 + 3y + 2y + 5 = 0$$

$$5y - 15 = 0 \Rightarrow y = 3$$

e quindi $x = 20 - 3(3) = 11$

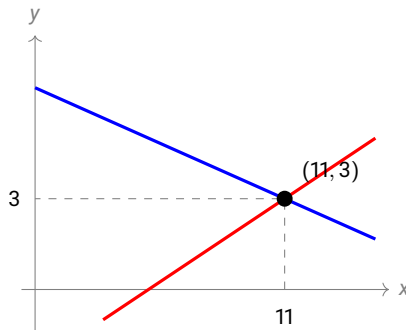
Soluzione: $(x, y) = (11, 3)$ stesso punto

Esempio d'esame: verifica e lettura grafica

Verifica nelle due equazioni:

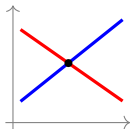
- prima: $11 + 3(3) - 20 = 0$, **torna**
- seconda: $-11 + 2(3) + 5 = 0$, **torna**

Il punto $(11, 3)$ appartiene a entrambe le rette: è la loro **intersezione**.



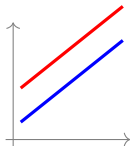
le due rette si incontrano in $(11, 3)$

Tre possibilità



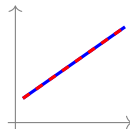
Rette incidenti

un punto: **una** soluzione



Rette parallele

nessuna soluzione



Rette coincidenti

infinite soluzioni

Nel problema iniziale dell'equilibrio di domanda e offerta, le rette sono incidenti:
c'è un unico punto di intersezione.

Metti in pausa e prova da solo

Risolvi il sistema
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Come fare: usa il metodo che preferisci, poi **verifica** e leggi il risultato come intersezione di due rette.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

- Riduzione: sommo le due equazioni,
 $3x = 6 \Rightarrow x = 2$
- Sostituisco: $y = 3 - 2 = 1$
- Verifica: $2(2) - 1 = 3$ e $2 + 1 = 3$, **torna**
- Soluzione: $(x, y) = (2, 1)$

Errori da evitare

- Errore:** sbagliare un **segno** quando si combinano le equazioni
- Errore:** trovare una sola incognita e fermarsi: servono **entrambe**

Verifica sempre la coppia in tutte e due le equazioni.

Consigli pratici e prossimi passi

Il metodo, in breve

1. Scegli **sostituzione** o **riduzione**.
2. Riduci a una sola equazione in una incognita e risolvi.
3. Ricava l'altra incognita.
4. **Verifica** la coppia in entrambe le equazioni.

Geometricamente, hai trovato dove si incontrano due rette.

Prossima lezione: le equazioni di secondo grado, il discriminante e la fattorizzazione, per risolvere anche ciò che non è di primo grado.