

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Equazioni di primo grado e fratte

trasformazioni equivalenti e soluzioni da verificare

A che cosa serve

Una domanda di gestione

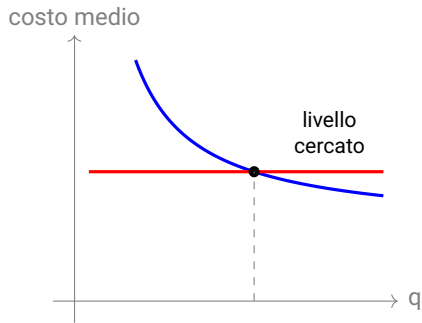
Il costo medio per unità prodotta cala man mano che la produzione cresce.

A quale livello di produzione il costo medio scende al **valore che mi sono prefissato**?

Lo strumento

Rispondere significa risolvere un'**equazione**: trovare il valore dell'incognita che rende vera un'uguaglianza.

Qui l'incognita compare al denominatore: una equazione **fratta**.



curva = costo medio, retta = valore obiettivo

Obiettivo della lezione

1. Risolvere **equazioni di primo grado e fratte**.
2. Distinguere le trasformazioni **equivalenti** da quelle **implicative**.
3. Riconoscere e **scartare** le soluzioni spurie.

*Un metodo solido vale più di un risultato veloce:
all'esame conta arrivare alla soluzione giusta
e saperla verificare.*

Primo grado: trasformazioni equivalenti

Cosa posso fare senza cambiare le soluzioni

- sommare o sottrarre la **stessa quantità** ai due membri
- moltiplicare o dividere i due membri per uno stesso **numero $\neq 0$**

Esempio

$$3x + 5 = 11$$

$$3x = 6 \quad (\text{sottraggo } 5)$$

$$x = 2 \quad (\text{divido per } 3)$$

Soluzione: $x = 2$

Ogni passaggio è reversibile: le soluzioni restano le stesse.

Il passaggio delicato

Moltiplicare per un **numero** $\neq 0$ è sempre sicuro.

Moltiplicare per un'**espressione che contiene l'incognita** non lo è: quell'espressione potrebbe valere zero per certi valori di x .

È un **passo implicativo**: $\Rightarrow$ può introdurre valori che *non* risolvono l'equazione di partenza, le **soluzioni spurie**.

*Conseguenza: dopo questo passaggio,
le soluzioni vanno verificate.*

Equazioni fratte: prima il dominio

Prima di tutto: dove l'equazione ha senso

In una equazione fratta l'incognita compare al denominatore. Un denominatore non può valere zero.

Condizione di esistenza: poni ogni denominatore $\neq 0$ e tieni da parte i valori esclusi.

Esempio: per $\frac{x}{x-2}$ il denominatore
 $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$

Le soluzioni che troverai dopo vanno confrontate con queste condizioni.

Una fratta con soluzione valida

Equazione: $\frac{x+1}{x-3} = 2$

- **Dominio:** $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
- **Elimino il denominatore** (passo implicativo):
 $x + 1 = 2(x - 3)$
- **Risolve:** $x + 1 = 2x - 6 \Rightarrow x = 7$
- **Verifica:** $7 \neq 3$ (accettabile); $\frac{7+1}{7-3} = \frac{8}{4} = 2$,
corrisponde.

Soluzione: $x = 7$

Esempio d'esame: impostazione e dominio

Equazione:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

- **Dominio:** unico denominatore $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
- Teniamo da parte il valore escluso: $x = 2$

Ora portiamo tutto allo stesso denominatore ed eliminiamolo:
è il passo da verificare.

Esempio d'esame: risoluzione e conclusione

Elimino il denominatore (moltiplico per $x - 2$):

$$x = 3 + (x - 2)$$

$$x = x + 1$$

$$0 = 1 \quad \text{uguaglianza falsa}$$

Nessun valore di x può renderla vera:
l'equazione è **impossibile**.

Equazione impossibile: nessuna soluzione

Il valore $x = 2$ era comunque escluso dal dominio:
nessuna soluzione resta valida.

Metti in pausa e prova da solo

Risolvi $\frac{2x}{x-3} = \frac{6}{x-3}$

Segui i passi: dominio, eliminazione del denominatore, risoluzione, **verifica**.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

- Dominio: $x \neq 3$
- Elimino il denominatore: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$
- $x = 3$ è escluso dal dominio: soluzione **spuria**, da scartare
- Nessuna soluzione

Errori da evitare

- Errore:** dimenticare il dominio e tenere $x = 3$ come soluzione
- Errore:** trattare la moltiplicazione per un'espressione con l'incognita come sempre equivalente

Il candidato va sempre confrontato col dominio.

Consigli pratici e prossimi passi

I passi, in ordine

1. **Dominio**: poni i denominatori $\neq 0$.
2. Trasforma con passaggi equivalenti; l'eliminazione dei denominatori è **implicativa**.
3. Risolvi l'equazione di primo grado che ottieni.
4. **Verifica**: la soluzione rispetta il dominio? Sostituiscila nell'equazione di partenza.

È un metodo che userai in tutto il corso.

Prossima lezione: da una equazione in una incognita ai sistemi di due equazioni in due incognite, che geometricamente sono l'intersezione di due rette.