

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Proposizioni, connettivi, quantificatori

Leggere e scrivere il linguaggio della matematica

A che cosa serve

Le regole parlano per enunciati

Una clausola di un contratto è un enunciato che può essere *rispettato* oppure *violato*.

Se l'ordine supera una certa soglia,
allora la spedizione è gratuita.

Una condizione di sconto può chiedere che valga una cosa **e** un'altra insieme.

La logica serve a leggere queste regole senza ambiguità, e a scriverle in modo preciso.



Obiettivo della lezione

1. Leggere e scrivere enunciati matematici usando i **connettivi**: non, e, o, se... allora.
2. Usare i **quantificatori** “per ogni” ed “esiste”, e stabilire se un enunciato è vero o falso.

*È l'alfabeto con cui sono scritte
tutte le definizioni e i risultati del corso.*

Che cos'è una proposizione

Definizione

Una **proposizione** è un enunciato che è *vero* oppure *falso*, mai entrambi.

- $2 + 3 = 5$ (vera)
- 7 è un numero pari (falsa)
- $\forall n \in \mathbb{N}, n(n + 1)$ è pari (vera)

Non è una proposizione una domanda come “che ore sono?”:
non ha un valore di verità.

I connettivi: dalle parole ai simboli

- **Negazione** $\neg P$ "non P "
- **Congiunzione** $P \wedge Q$ " P e Q "
- **Disgiunzione** $P \vee Q$ " P o Q " (almeno una)
- **Implicazione** $P \Rightarrow Q$ "se P allora Q "
- **Equivalenza** $P \Leftrightarrow Q$ " P se e solo se Q "

La **e** è vera solo quando entrambe sono vere; la "o" della matematica è **inclusiva**: è vera quando almeno una è vera, anche entrambe.

Quando “se... allora” è falsa

La promessa: se l'ordine supera la soglia, allora la spedizione è gratuita.

Quando è **violata**, cioè falsa? Solo in un caso:

- | | |
|--|------------------------|
| • ordine sopra soglia, spedizione gratuita: | mantenuta (vera) |
| • ordine sopra soglia, spedizione a pagamento: | violata (falsa) |
| • ordine sotto soglia, spedizione gratuita: | non violata (vera) |
| • ordine sotto soglia, spedizione a pagamento: | non violata (vera) |

Se la premessa è falsa, la promessa non viene tradita: l'implicazione resta **vera**. È un punto che sorprende: lo chiariamo subito.

La verità vacua: lingua comune e lingua matematica

Nella lingua di tutti i giorni

se la premessa non si avvera, la promessa ci sembra “non applicabile”: diciamo che il discorso “non vale”, e ci pare strano chiamarlo vero.

Nella lingua della matematica

l'implicazione $P \Rightarrow Q$ è dichiarata **vera** ogni volta che P è falsa, qualunque sia Q . Questo si chiama **verità vacua**.

Una promessa “se... allora” si può tradire solo quando la premessa si avvera davvero.

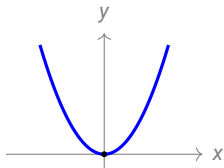
Esempio: “se piove, porto l'ombrello”. Nei giorni in cui non piove non hai mancato alla parola, qualunque cosa tu faccia: la promessa resta vera.

I quantificatori: per ogni ed esiste

- **Per ogni** $\forall$ vale per *tutti* gli elementi.
- **Esiste** $\exists$ vale per *almeno un* elemento.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \quad \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$$

La prima è vera: ogni quadrato è non negativo. La seconda è vera: basta $x = 2$ oppure $x = -2$.



$y = x^2$ non scende mai sotto zero

Tradurre una frase in simboli

- “per ogni x reale, $x^2 \geq 0$ ”
 $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- “esiste un numero naturale pari”
 $\rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n \text{ è pari}$
- “ x è compreso tra 0 e 5”
 $\rightarrow (x > 0) \wedge (x < 5)$, cioè $x \in (0, 5)$
- “se $x > 2$, allora $x > 0$ ”
 $\rightarrow (x > 2) \Rightarrow (x > 0)$

Prima individua le proposizioni semplici, poi scegli il connettivo o il quantificatore giusto.

Metti in pausa e prova da solo

1. Traduci in simboli:

“per ogni numero reale x , se $x > 3$ allora $x^2 > 9$.”

2. Vera o falsa?

(a) “se $2 + 2 = 5$, allora 3 è pari.”

(b) “se Tokyo è in Spagna, allora il Big Ben è in Cina.”

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 3) \Rightarrow (x^2 > 9)$
2. In entrambe le frasi, “se $2 + 2 = 5 \dots$ ” e “se Tokyo è in Spagna...”, premessa e conclusione sono false e slegate tra loro: basta che la premessa sia falsa perché l’implicazione sia **vera** (verità vacua).

Errori da evitare

- Errore:** intendere la “o” come esclusiva: in matematica è inclusiva.
- Errore:** credere falsa un’implicazione con premessa falsa: per verità vacua è vera.
- Errore:** negare male un “per ogni”: la negazione di “per ogni x vale P ” è “esiste un x per cui P non vale”.

Consigli pratici e prossimi passi

Per leggere e scrivere un enunciato, in ordine

1. Individua le **proposizioni semplici** (vere o false).
2. Riconosci i **connettivi**: non, e, o, se... allora.
3. Aggiungi i **quantificatori**: per ogni, esiste.
4. Verifica il **valore di verità**: con premessa falsa l'implicazione è vera (verità vacua).

Prossima lezione: gli insiemi numerici $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,
gli intervalli e la retta reale.