

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Insiemi numerici, intervalli, retta reale

dove individuare i numeri e come scrivere gli insiemi

A che cosa serve

Una domanda di tutti i giorni

I pezzi che vendi si contano:
0, 1, 2, 3 e così via.

Sono **numeri naturali**.

Il tempo trascorso, la lunghezza di un
oggetto
o la distanza percorsa possono assumere
infiniti valori intermedi tra due valori
qualsiasi:
vivono su una **linea continua**.

Sapere a quale famiglia appartiene un numero ti
dice come scriverlo e come rappresentarlo.

contare: 0, 1, 2, 3 ...



misurare: ogni valore

sopra i naturali, sotto i reali

Obiettivo della lezione

1. **Collocare** un numero nelle famiglie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. **Scrivere** un insieme di numeri come **intervallo**.
3. **Rappresentarlo** sulla **retta reale**.

*Tre gesti semplici che userai
ogni volta che cerchi un dominio o risolvi una
disuguaglianza.*

Le quattro famiglie di numeri

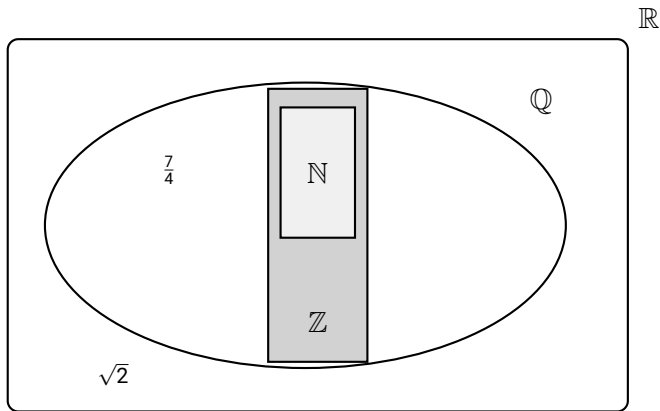
- $\mathbb{N}$ numeri **naturali**: $\{0, 1, 2, \dots\}$ (lo zero è incluso)
- $\mathbb{Z}$ numeri **interi relativi**: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ numeri **razionali**: le frazioni $\frac{p}{q}$, con $q \neq 0$
- $\mathbb{R}$ numeri **reali**: i razionali più gli irrazionali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ogni famiglia è contenuta nella successiva:

$$5 \in \mathbb{N}, \quad -3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{7}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \in \mathbb{R}.$$

Le inclusioni, a colpo d'occhio



Il riquadro chiaro è $\mathbb{N}$; la banda più scura che lo racchiude è $\mathbb{Z}$;
l'ellisse $\mathbb{Q}$ contiene tutte le frazioni;
il rettangolo $\mathbb{R}$ comprende anche gli irrazionali, come $\sqrt{2}$.

Razionali e irrazionali

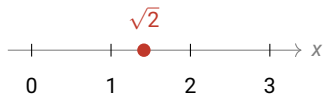
Un numero razionale è una frazione

il suo decimale è **finito** (es. $\frac{3}{4} = 0,75$)
oppure **periodico** (es. $\frac{1}{3} = 0,333\dots$).

Un numero irrazionale non lo è

il suo decimale è **illimitato e non periodico**:
 $\sqrt{2}$, π , e .

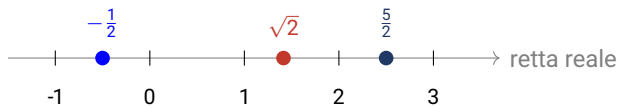
$\sqrt{2} = 1,4142\dots$ non si scrive come frazione:
vive in $\mathbb{R}$, ma **non** in $\mathbb{Q}$.



$\sqrt{2}$ cade tra 1 e 2,
ma non su nessuna frazione

La retta reale

Ogni numero reale è un **punto** della retta, e ogni punto è un numero reale.
I razionali da soli lascerebbero dei buchi: i reali li riempiono tutti.



Numeri interi, frazioni e irrazionali stanno tutti sulla stessa retta.

Gli intervalli: la notazione

- (a, b) intervallo **aperto**: estremi **esclusi**
- $[a, b]$ intervallo **chiuso**: estremi **inclusi**
- $(a, b]$ e $[a, b)$ **semiaperti**: un estremo incluso, l'altro escluso
- **illimitati**: $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Nel disegno sulla retta, l'estremo **incluso** si segna con un **pallino pieno**, quello **escluso** con un **pallino vuoto**.

Esempio d'esame: dalla condizione all'intervallo

Insieme dato: $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 5\}$

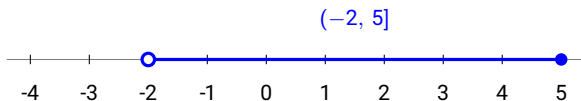
- **Estremo sinistro:** -2 con disuguaglianza stretta ($<$), quindi è **escluso** e si scrive con parentesi tonda.
- **Estremo destro:** 5 con minore o uguale ($\leq$), quindi è **incluso** e si scrive con parentesi quadra.

Intervallo: $(-2, 5]$

Esempio d'esame: il disegno e la verifica

Lo disegno sulla retta:

pallino **vuoto** su -2 (escluso),
pallino **pieno** su 5 (incluso),
segmento tra i due.



vuoto = escluso, pieno = incluso

Verifica con un valore:

- $x = 0$: vale $-2 < 0 \leq 5$, quindi **dentro**.
- $x = -2$: $-2 < -2$ è falso, quindi **fuori**.

Prova tu

Metti in pausa e prova da solo

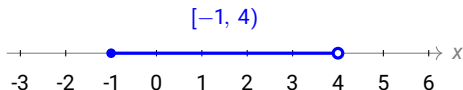
1. Scrivi $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 4\}$ come **intervallo** e disegnalo sulla retta.
2. Di' dove vivono $\frac{7}{2}$ e $\sqrt{5}$: stanno in $\mathbb{Q}$ o solo in $\mathbb{R}$?

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

- Intervallo: $[-1, 4)$ (sinistra inclusa, destra esclusa)
- $\frac{7}{2} = 3,5$ è una frazione: sta in $\mathbb{Q}$ (e quindi anche in $\mathbb{R}$).
- $\sqrt{5} = 2,236 \dots$ è irrazionale: sta in $\mathbb{R}$, non in $\mathbb{Q}$.



Errori da evitare

- Errore:** scambiare **incluso** ed **escluso**, cioè la parentesi tonda con la quadra.
- Errore:** credere che $\sqrt{5}$ sia razionale.
- Errore:** dimenticare che lo 0 appartiene a $\mathbb{N}$.

Leggi sempre il segno: è $<$ oppure $\leq$?

Consigli pratici e prossimi passi

I passi, in ordine

1. Riconosci la **famiglia**: intero, frazione o irrazionale?
2. Traduci la condizione in **estremi**: incluso (quadra) o escluso (tonda)?
3. Scrivi l'**intervallo**.
4. **Disegnalo** sulla retta e verifica con un valore.

Gli intervalli torneranno spesso: ogni dominio e ogni disequazione si scrivono così.

Prossima lezione: le operazioni tra insiemi, unione, intersezione e complemento.