

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Operazioni, prodotto cartesiano, relazioni

combinare insiemi, costruire coppie,
collegare elementi

Riprendiamo da dove eravamo

Nella lezione scorsa

Abbiamo messo ordine tra i numeri: le famiglie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,

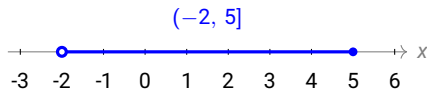
la **retta reale**,

e gli insiemi di numeri scritti come **intervalli**.

Avevamo anche usato un **diagramma di Venn** per vedere le inclusioni a colpo d'occhio.

E ci eravamo lasciati con una promessa:
le operazioni tra insiemi.

Oggi la manteniamo, e andiamo oltre.



dalla lezione scorsa:
gli intervalli sulla retta reale

A che cosa serve

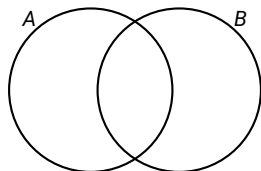
Una domanda di organizzazione

Immagina di avere l'insieme dei tuoi prodotti e l'insieme dei mercati in cui vendi.

Spesso ti serve **metterli insieme**, trovare ciò che hanno **in comune**, oppure considerare **tutte le combinazioni** prodotto-mercato.

Gli strumenti

Gli insiemi servono a *organizzare* i dati,
le operazioni a *combinare gli insiemi*,
il prodotto cartesiano a generare tutte le *coppie*.



due insiemi:

da unire, intersecare, combinare

Obiettivo della lezione

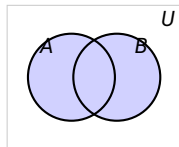
1. **Eeguire** le operazioni tra insiemi: unione, intersezione e complemento.
2. **Costruire** il prodotto cartesiano $A \times B$.
3. **Riconoscere** una relazione, e vedere quando diventa una funzione.

*Sono le basi su cui poggiano il piano cartesiano
e l'idea di funzione.*

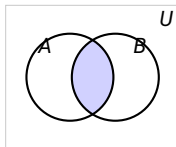
Le operazioni tra insiemi

- $A \cup B$ (unione): gli elementi che stanno in A **oppure** in B , anche in entrambi.
- $A \cap B$ (intersezione): gli elementi che stanno in A **e contemporaneamente** in B .
- A^c (complemento): gli elementi dell'universo U che **non** stanno in A .

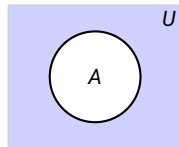
Il complemento richiede sempre l'**insieme universo** U : prima fissi U , poi togli A .



$$A \cup B$$



$$A \cap B$$



$$A^c$$

Esempio: due insiemi numerici

Dati: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$,
universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- **Unione:** tutti gli elementi, i comuni una sola volta
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Intersezione:** solo i comuni
 $A \cap B = \{3, 4\}$
- **Complemento:** in U ma non in A
 $A^c = \{5, 6, 7, 8\}$

Verifica per elencazione: il 3 e il 4 stanno in entrambi, quindi sono nell'intersezione, e nell'unione compaiono una volta sola. Senza l'universo U , il complemento non avrebbe senso.

Coppia ordinata e prodotto cartesiano

La coppia ordinata (a, b)

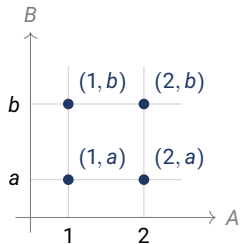
L'ordine conta: $(1, 2)$ è diverso da $(2, 1)$.

Il prodotto cartesiano $A \times B$

è l'insieme di **tutte le coppie ordinate** (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Esempio: $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$



le quattro coppie di $A \times B$

Due avvertenze sul prodotto cartesiano

- $A \times B \neq B \times A$: l'**ordine degli insiemi** conta, proprio come conta nella singola coppia.
- Quante coppie? Tante quanto il prodotto delle **cardinalità**:
 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Nell'esempio, $2 \cdot 2 = 4$.

Se conti le coppie e non tornano $|A| \cdot |B|$, ne hai saltata qualcuna.

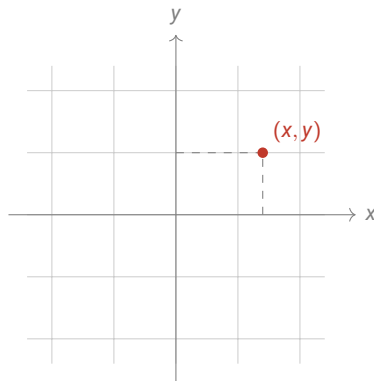
Dal prodotto cartesiano al piano

Il collegamento più importante

Quando $A = B = \mathbb{R}$, il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è il **piano cartesiano**: ogni punto è una coppia ordinata (x, y) .

L'ascissa x e l'ordinata y sono le due coordinate del punto.

È il piano dove disegneremo i grafici delle funzioni.



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: il piano cartesiano,
un punto è la coppia (x, y)

Le relazioni

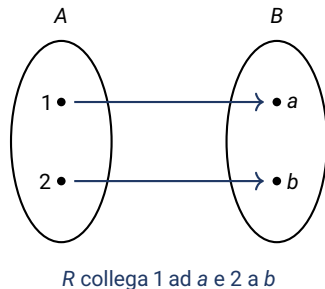
Una relazione da A a B

è un **sottoinsieme** di $A \times B$:
tra tutte le coppie possibili, ne seleziona
alcune.

Esempio: $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$.

$$R = \{(1, a), (2, b)\}$$

Le coppie scelte sono i *collegamenti*: ad
esempio “il prodotto 1 è venduto nel mercato a ”.



Dalla relazione alla funzione

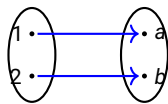
Una funzione è una relazione speciale:

a **ogni** elemento di A associa **un solo** elemento di B .

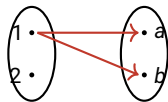
Se da uno stesso elemento di A partono due frecce, non è una funzione.

Questo diventa il **test della retta verticale**: ogni verticale incontra il grafico al più una volta.

La coppia $(x, f(x))$ è un punto del piano: ecco perché ci serviva il prodotto cartesiano.



funzione



non è una funzione

Metti in pausa e prova da solo

1. Dati $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, con universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
calcola $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c .
2. Dati $C = \{x, y\}$ e $D = \{1, 2\}$,
scrivi il prodotto cartesiano $C \times D$ e conta le coppie.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione ed errori comuni

Soluzione

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2, 3\}$
- $A^c = \{4, 5\}$ (in U ma non in A)
- $C \times D = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$
- Coppie: $|C| \cdot |D| = 2 \cdot 2 = 4$.

Errori da evitare

- Errore:** confondere l'unione ("oppure") con l'intersezione ("e").
- Errore:** fare il complemento senza aver fissato l'universo U .
- Errore:** trattare la coppia (a, b) come l'insieme $\{a, b\}$: nella coppia l'**ordine conta**, e $A \times B \neq B \times A$.

Conta sempre le coppie: devono essere $|A| \cdot |B|$.

Consigli pratici e prossimi passi

I passi, in ordine

1. Per le operazioni: prima fissa l'**universo** U , poi unisci, interseca o complementa.
2. **Verifica** per elencazione: i comuni nell'intersezione, nessun elemento ripetuto nell'unione.
3. Per il prodotto cartesiano: scrivi **tutte** le coppie, e controlla che siano $|A| \cdot |B|$.
4. Una relazione è un sottoinsieme di coppie: è una **funzione** se a ogni x corrisponde un solo y .

Sono le basi su cui poggiano il piano cartesiano e le funzioni.

Prossima lezione: le operazioni in $\mathbb{R}$, frazioni, potenze, radici e logaritmi.