

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Operazioni in $\mathbb{R}$

frazioni, potenze e radici: le proprietà che servono

A che cosa serve

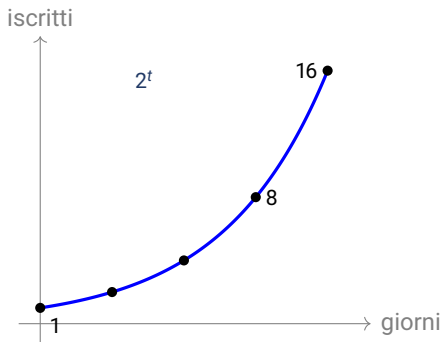
Un canale che raddoppia

Aprire un canale social.
Ogni giorno gli iscritti raddoppiano.
Dopo t giorni sono 2^t : una **potenza**.

La domanda inversa

Fra quanti giorni raggiungo
un certo numero di iscritti?
L'incognita è l'esponente t :
serve il **logaritmo**, l'operazione inversa.

Le frazioni, le potenze e le radici sono il
programma di oggi. Il logaritmo, che risponde
alla domanda inversa, sarà la prossima lezione.



la potenza fa crescere gli iscritti

Obiettivo della lezione

1. **Semplificare** espressioni con frazioni, potenze e radici.
2. Farlo **applicando le proprietà**, non andando a memoria.
3. Riconoscere il **dominio** e gli **errori di segno** più comuni.

*Strumenti che tornano in ogni esercizio del corso,
anche all'esame.*

Tre operazioni, una sola idea

- **La potenza** costruisce: a^n , cioè a moltiplicato per sé stesso.
- **La radice** torna indietro dalla potenza: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.
- **Il logaritmo** chiede l'esponente: $\log_a x$ è l'esponente a cui elevare a per ottenere x .

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^y = x \iff y = \log_a x$$

Oggi lavoriamo su frazioni, potenze e radici; il logaritmo avrà la sua lezione. Ripartiamo dalle **frazioni**, il terreno comune.

Ripasso lampo: le frazioni

- **Somma e differenza:** stesso denominatore (il mcm), poi si sommano i numeratori.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

- **Prodotto:** numeratori per numeratori, denominatori per denominatori.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

- **Divisione:** si moltiplica per il reciproco.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Alla fine **semplifica** sempre, dividendo per il MCD. Il denominatore non può mai essere zero.

Esempio guidato: una frazione di frazioni

Semplifica: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$

- **Prima il numeratore:** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
- **Poi il denominatore:** $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$
- **Divido** (moltiplico per il reciproco): $\frac{5/6}{7/12} = \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{60}{42}$

Semplifico per il MCD 6: $\frac{60}{42} = \frac{10}{7}$

Le proprietà delle potenze

Con la stessa base a (con $a \neq 0$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\text{prodotto: esponenti sommati})$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{quoziente: esponenti sottratti})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (\text{potenza di potenza: esponenti moltiplicati})$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (\text{potenza di un prodotto})$$

Esponente frazionario: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ (per $a > 0$)

È la chiave che collega potenze e radici: una radice è solo una potenza con esponente frazionario.

Perché $a^0 = 1$

Una conseguenza della regola del quoziente.

Prendiamo $\frac{a^n}{a^n}$ (con $a \neq 0$) e leggiamola in due modi.

- **Semplificando:** numeratore e denominatore sono uguali, quindi $\frac{a^n}{a^n} = 1$.
- **Con la regola del quoziente:** gli esponenti si sottraggono, $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$.

I due risultati devono coincidere:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Dalla stessa regola deriva anche l'esponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

Radici: dominio e il segno

- **Indice pari** ($\sqrt{}$, $\sqrt[4]{}$, ...): il radicando deve essere ≥ 0 . Il risultato è sempre ≥ 0 .
- **Indice dispari** ($\sqrt[3]{}$, ...): va bene ogni numero reale, anche negativo.
- **Prodotto e quoziente:** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Attenzione: $\sqrt{a^2}$ **non** è a . La radice di indice pari restituisce un valore non negativo, quindi il risultato è il **valore assoluto** di a .

Esempio guidato: potenze e radici

Semplifica: $\frac{a^3 \cdot a^{-1}}{\sqrt{a^2}}$ (con $a \neq 0$)

- **Dominio:** il denominatore $\sqrt{a^2} = |a|$ non deve annullarsi, quindi $a \neq 0$.
- **Numeratore:** $a^3 \cdot a^{-1} = a^{3-1} = a^2$.
- **Denominatore:** $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Metto insieme:** $\frac{a^2}{|a|} = |a|$, perché $a^2 = |a|^2$.

Ricordiamo che $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$

Scrivere il risultato uguale ad a è l'**errore** tipico: perde il segno.

Errori comuni da evitare

Errore: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Falso: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, ma $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Errore: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Manca il doppio prodotto:
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Errore: $\sqrt{a^2} = a$. Il risultato corretto è $|a|$.

Errore: dimenticare il dominio: radicando di indice pari ≥ 0 ,
denominatori $\neq 0$.

*Corretto e sbagliato si riconoscono dal segno e dalle condizioni,
non a memoria.*

Metti in pausa e prova da solo

1. Semplifica $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}$.
2. Semplifica $\frac{x^4 \cdot x^{-2}}{\sqrt{x^2}}$ (con $x \neq 0$).

Segui i passi: dominio, operazioni tra frazioni, proprietà di potenze e radici, semplifica.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione della prova tu

Esercizio 1

- Numeratore: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.
- Divido per il reciproco: $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{30}{60}$.
- Risultato: $\frac{1}{2}$

Esercizio 2

- Dominio: $x \neq 0$.
- Numeratore: $x^4 \cdot x^{-2} = x^2$.
- Denominatore: $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Risultato: $\frac{x^2}{|x|} = |x|$

Nell'esercizio 2 il valore assoluto è il dettaglio che fa la differenza.

Consigli pratici e prossimi passi

I passi, in ordine

1. **Prima il dominio:** denominatori $\neq 0$, radicandi di indice pari ≥ 0 .
2. Riscrivi tutto come **potenze** quando puoi: la radice è un esponente frazionario.
3. Applica le **proprietà** un passo alla volta, scrivendo i passaggi.
4. Controlla i **segni**: $\sqrt{a^2} = |a|$, e il doppio prodotto in $(a + b)^2$.

Queste proprietà sono la base di domini, derivate e limiti: averle automatiche fa risparmiare tempo, anche all'esame.

Prossima lezione: il logaritmo, l'operazione che risponde alla domanda inversa di oggi.