

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

I logaritmi

definizione e proprietà

Riprendiamo da dove eravamo

- Nella lezione precedente: un canale social i cui iscritti raddoppiano. Dopo t giorni sono 2^t , una **potenza**.
- La **domanda inversa** era rimasta aperta: fra quanti giorni raggiungo un certo numero di iscritti? Occorre trovare l'esponente t .
- Quell'operazione, che dalla potenza risale all'esponente, è il **logaritmo**.

$$a^y = x \iff y = \log_a x$$

Il logaritmo è l'operazione inversa della potenza: restituisce l'esponente. Ripartiamo da qui.

Obiettivo della lezione

1. Capire che cos'è un **logaritmo**: un esponente.
2. **Sviluppare e semplificare** espressioni applicando le proprietà.
3. Riconoscere il **dominio**: l'argomento deve essere positivo.

*Strumenti che tornano in ogni esercizio del corso,
anche all'esame.*

Che cos'è un logaritmo

Definizione: $\log_a x$ è l'esponente da dare alla base a per ottenere x .

$$\log_a x = y \text{ significa } a^y = x$$

Esempi:

- $\log_2 8 = 3$, perché $2^3 = 8$.
- $\log_3 9 = 2$, perché $3^2 = 9$.

Condizioni:

- la base a è positiva e diversa da 1;
- l'argomento x è positivo.

Esponenti frazionari e negativi

Il risultato di un logaritmo può essere anche una **frazione** o un numero **negativo**: basta ricordare le potenze a esponente frazionario e negativo.

- $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$, perché $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.
- $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, perché $(\frac{1}{2})^{-4} = 2^4 = 16$.

Un esponente frazionario è una **radice**; un esponente negativo è il **reciproco**. Il logaritmo, come sempre, restituisce quell'esponente.

Due basi che incontrerete spesso

- **Logaritmo naturale:** base e , si scrive $\ln x = \log_e x$.
- **Logaritmo decimale:** base 10, si scrive $\log x = \log_{10} x$.
- $\log_{10} 1000 = 3$, perché $10^3 = 1000$.
- $\ln e = 1$, perché $e^1 = e$.

Quando la base non è scritta, nel nostro corso $\log$ indica la base 10 e $\ln$ la base e .

Le proprietà dei logaritmi

Con base $a > 0, a \neq 1$, e argomenti positivi:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (\text{prodotto: diventa somma})$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (\text{quoziente: diventa differenza})$$

$$\log_a(x^k) = k \log_a x \quad (\text{potenza: esponente in fattore})$$

Dominio sempre: l'**argomento** del logaritmo deve essere > 0 .

Le tre proprietà valgono solo per argomenti positivi.

Esempio guidato: sviluppare un prodotto

Sviluppa applicando le proprietà: $\log_a(x^3 y)$ (con $x > 0, y > 0$)

- Il **prodotto** dentro al logaritmo diventa una somma:

$$\log_a(x^3 y) = \log_a(x^3) + \log_a y$$

- La **potenza** diventa un fattore davanti:

$$\log_a(x^3) = 3 \log_a x$$

$3 \log_a x + \log_a y$

Verifica: ricomponendo si torna a $\log_a(x^3 y)$. Le proprietà valgono perché l'argomento è positivo.

Esempio guidato: sviluppare un quoziente

Sviluppa applicando le proprietà: $\log_a \left(\frac{x^2}{y} \right)$ (con $x > 0, y > 0$)

- **Il quoziente** dentro al logaritmo diventa una differenza:

$$\log_a \left(\frac{x^2}{y} \right) = \log_a(x^2) - \log_a y$$

- **La potenza** diventa un fattore davanti:

$$\log_a(x^2) = 2 \log_a x$$

$2 \log_a x - \log_a y$

Una proprietà alla volta: prima il quoziente, poi la potenza.
Sempre con argomento positivo.

Esempio guidato: ricomporre in un solo logaritmo

Scrivi come un unico logaritmo:

$$2 \log_a x + \log_a y - \log_a z \quad (\text{con } x, y, z > 0)$$

- **Il fattore** rientra come esponente: $2 \log_a x = \log_a(x^2)$.

- **La somma** diventa un prodotto:

$$\log_a(x^2) + \log_a y = \log_a(x^2 y).$$

- **La differenza** diventa un quoziente:

$$\log_a(x^2 y) - \log_a z = \log_a\left(\frac{x^2 y}{z}\right).$$

$$\log_a\left(\frac{x^2 y}{z}\right)$$

È la **verifica inversa**: sviluppare e ricomporre sono i due versi della stessa strada.

Errori comuni e identità da ricordare

Errore: $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. La proprietà vale per il **prodotto** xy , non per la somma.

Errore: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$. Il quoziente diventa una **differenza**, non un rapporto.

Errore: dimenticare il dominio: l'argomento deve essere > 0 .

Da ricordare: $\log_a 1 = 0$ (perché $a^0 = 1$) e $\log_a a = 1$ (perché $a^1 = a$).

Corretto e sbagliato si riconoscono dalle proprietà e dal dominio, non a memoria.

Metti in pausa e prova da solo

1. Sviluppa con le proprietà $\log_a \frac{x^5}{y^2}$ (con $x > 0, y > 0$).
2. Quanto vale $\log_2 64$?

Segui i passi: per il primo, quoziente in differenza e potenze in fattori; per il secondo, cerca l'esponente.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Soluzione della prova tu

Esercizio 1

- Dominio: $x > 0, y > 0$.
- Quoziente in differenza:
 $\log_a(x^5) - \log_a(y^2)$.
- Potenze in fattori: $5 \log_a x - 2 \log_a y$.
- Risultato: $5 \log_a x - 2 \log_a y$

Esercizio 2

- Cerco l'esponente: $2^? = 64$.
- $2^6 = 64$.
- Risultato: $\log_2 64 = 6$

Un logaritmo è sempre la risposta alla domanda: a quale esponente devo elevare la base?

Consigli pratici e prossimi passi

I passi, in ordine

1. **Dominio:** l'argomento del logaritmo deve essere > 0 .
2. Prodotto in somma, quoziente in differenza, potenza in fattore.
3. Applica una **proprietà alla volta**, scrivendo i passaggi.
4. **Verifica** ricomponendo l'espressione di partenza.

I logaritmi tornano nelle equazioni esponenziali,
nei limiti e nelle derivate:

averli automatici fa risparmiare tempo, anche all'esame.

Prossima lezione: operazioni sulle lettere, polinomi,
prodotti notevoli, fattorizzazione.