

Precorso di Matematica Generale

Alessandro Fiori Maccioni

Polinomi e fattorizzazione

prodotti notevoli, trinomio e frazioni algebriche

A che cosa serve

Due problemi di gestione

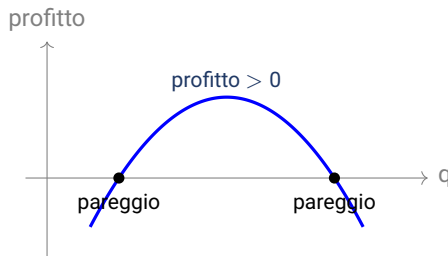
Il **profitto** in funzione della quantità è spesso un polinomio: dove si annulla? Sono i **punti di pareggio**.

Il **costo medio** è un costo totale diviso la quantità:
un rapporto di polinomi da semplificare.

La stessa abilità

Scrivere un polinomio **come prodotto**
e semplificare un **rapporto**.

Per il pareggio serve fattorizzare: un prodotto vale zero quando si annulla uno dei fattori.



dove il profitto vale zero: i punti di pareggio

Obiettivo della lezione

1. **Fattorizzare** un polinomio: raccoglimento, prodotti notevoli al contrario, trinomio di secondo grado.
2. **Semplificare** una frazione algebrica, gestendone correttamente il dominio.

Sono gli strumenti di base che ritroverete in tutto il corso e in moltissimi esercizi d'esame.

Cosa significa fattorizzare

Fattorizzare significa riscrivere un polinomio **come prodotto** di fattori più semplici.

- È l'operazione **inversa** dell'espansione dei prodotti notevoli: espandere apre le parentesi, fattorizzare le rimette.
- Serve perché un prodotto si annulla quando si annulla un fattore (**principio di annullamento del prodotto**):

$$(x - a)(x - b) = 0 \Rightarrow x = a \text{ oppure } x = b$$

Metodo 1: raccoglimento a fattore comune

Idea: mettere in evidenza il fattore presente in tutti i termini.

$$ax + ay = a(x + y)$$

Esempio:

$$6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$$

Cenno: raccoglimento per gruppi. Quando non c'è un fattore comune a tutti, lo si cerca a gruppi:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y).$$

Metodo 2: differenza di quadrati

Forma da riconoscere: un quadrato meno un quadrato.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Esempio:

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$$

Attenzione: la **somma** di quadrati $a^2 + b^2$ non si fattorizza nei numeri reali.

Metodo 2: quadrato di binomio (al contrario)

Forma da riconoscere: due quadrati e, in mezzo, il doppio prodotto.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Esempio:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$$

La spia è il termine centrale: deve essere proprio $2ab$.

Metodo 3: trinomio (somma e prodotto)

Per $x^2 + bx + c$: cerco due numeri con **somma** $-b$ e **prodotto** c .

$$x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2), \quad r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c$$

Esempio: $x^2 - 5x + 6$

- somma = 5, prodotto = 6 $\Rightarrow$ i numeri sono 2 e 3
- quindi $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Verifica espandendo:

$$(x - 2)(x - 3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6.$$

Trinomio: il caso generale (discriminante)

Per $ax^2 + bx + c$ **(vale sempre):** trovo le radici e fattorizzo.

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Eempio: $2x^2 + 3x - 2$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -2$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2)$$

Verifica: $(2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$.

Frazioni algebriche: prima il dominio

Una **frazione algebrica** è un rapporto di polinomi $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

- Il denominatore non può annullarsi. **Prima di tutto** si scrive il dominio:

$$\text{dominio} = \{ x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0 \}$$

Il dominio si legge dal denominatore **originale**, prima di qualunque semplificazione.

Semplificare: fattorizzo e cancello i fattori

Esempio: $\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

- **Dominio** (denominatore $\neq 0$):
 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, x \neq -2$
- **Fattorizzo** numeratore e denominatore: $\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)}$
- **Cancello** il fattore comune $(x - 3)$:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \frac{x + 3}{x + 2}, \quad x \neq 3, x \neq -2$$

Il dominio resta quello **originale**: la condizione $x \neq 3$ si porta dietro.

Errori comuni

Errore: cancellare **addendi** invece di fattori. Si semplificano solo i **fattori** comuni, mai i singoli termini di una somma.

Errore: credere che $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Manca il doppio prodotto: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Errore: dimenticare il **dominio** dopo la semplificazione, perdendo condizioni come $x \neq 3$.

Scrivi i passaggi e verifica espandendo: non andare a memoria.

Metti in pausa e prova da solo

Fattorizza e semplifica $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$.

Segui i passi: dominio, fattorizza numeratore e denominatore, cancella i fattori comuni, riporta il dominio.

Prenditi il tuo tempo. Quando hai finito, riprendi.

Prova tu: la soluzione

Esercizio: $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$

- **Dominio** (denominatore $\neq 0$):
 $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, x \neq -3$
- **Fattorizzo** numeratore e denominatore: $\frac{(x + 2)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)}$
- **Cancello** il fattore comune $(x + 3)$:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{x + 2}{x - 3}, \quad x \neq 3, x \neq -3$$

Il dominio resta quello **originale**: la condizione $x \neq -3$ si porta dietro, anche se il fattore $(x + 3)$ è stato cancellato.

Consigli pratici e prossimi passi

L'ordine da seguire

1. Per fattorizzare: prima il **fattore comune**, poi i **prodotti notevoli**, infine il **trinomio**.
2. Per le frazioni: prima il **dominio**, poi fattorizza e semplifica, e riporta sempre il dominio originale.
3. **Verifica** espandendo.

Prossimo passo: la fattorizzazione è lo strumento per risolvere le equazioni, mediante il principio di annullamento del prodotto.