

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 11/09/2026

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.

Calcolare:

- i) l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$ sulla circonferenza di raggio 2, centrata nell'origine e percorsa in senso orario (**2,5 punti**);
- ii) l'integrale $\int_{\gamma} \frac{2}{z} dz$, con $\gamma(t) = e^{it}$ per $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, usando il metodo delle primitive (**3 punti**);
- iii) l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \frac{3z}{(z-i)^2} dz$, dove γ è un quadrato di lato l le cui diagonali si intersecano nel punto $(0, 1)$ (**2,5 punti**).

Esercizio 2.

- i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica dell'intervallo $[-c, c]$, $c > 0$, $f(t) = \chi_{[-c, c]}(t)$ (**1,5 punti**);
- ii) verificare che $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$ (dove $f(t)$ è la funzione assegnata nel punto i)), ma $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ (**1,5 punti**);
- iii) applicare il Teorema di Plancherel alla funzione $f(t)$ del punto i), verificando poi l'identità di Plancherel (**2,5 punti**);
- iv) verificare che $\mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+1}$ in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)\}$ e $\mathcal{L}[e^{at} \sin t](s) = \frac{1}{(s-a)^2+1}$ in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)\}$ (**2,5 punti**).

Domanda 1.

- i) Cos'è l'ordine (o molteplicità) di uno zero di una funzione olomorfa? Una funzione olomorfa può avere zeri di ordine infinito? (**2 punti**)
- ii) Com'è fatto l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla? Dimostrarlo (**3 punti**);
- iii) tale insieme può avere punti di accumulazione che appartengono al dominio di olomorfia della funzione? Perché? (**1,5 punti**)
- iv) enunciare il Principio identità delle funzioni olomorfe e nominare almeno una delle sue conseguenze (**2,5 punti**).

Domanda 2.

- i) Enunciare i risultati relativi al legame tra la trasformazione di Fourier e la derivazione (Teorema della derivata della trasformata di Fourier e Teorema della trasformata di Fourier della derivata) e dimostrarli (**3 punti**);
- ii) Enunciare e dimostrare la formula per il calcolo della trasformata di Laplace di un segnale periodico (**2 punti**).