

Esercizio 1. Calcolare:

- i) l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$ sulla circonferenza di raggio 2, centrata nell'origine e percorsa in senso orario (**2,5 punti**);
ii) l'integrale $\int_{\gamma} \frac{2}{z} dz$, con $\gamma(t) = e^{it}$ per $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, usando il metodo delle primitive (**3 punti**);
iii) l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \frac{3z}{(z-i)^2} dz$, dove γ è un quadrato di lato l le cui diagonali si intersecano nel punto $(0, 1)$ (**2,5 punti**).

i) La funzione integranda non è indipendente da $\bar{z}$, quindi usiamo il calcolo diretto: essendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [2\pi, 0]$, si ha

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{2e^{it}} 2ie^{it} dt = 2 [e^{-it}]_0^{2\pi} = 0$$

per la periodicità della funzione esponenziale.

Per calcolare l'integrale si potrebbe usare anche la seguente osservazione: lungo la curva γ si ha $|z| = 2$, da cui $|z|^2 = 4$; d'altra parte, $|z|^2 = z\bar{z}$, da cui si ricava $\bar{z} = \frac{4}{z}$. Quindi

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{4}{z^2} dz = 4 \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$$

e l'ultimo integrale è nullo perché è della forma $\int_{\gamma} z^n dz$ con γ curva chiusa che circonda l'origine e $n \neq -1$.

ii) Dato che la curva non è chiusa, cerchiamo una primitiva di $\frac{1}{z}$: ci dobbiamo restringere a un dominio semplicemente connesso che non contenga l'origine, quindi possiamo prendere come primitiva $\log z$ (logaritmo principale di z , uno dei rami della multifunzione logaritmo complesso di z) nel piano privato di una semiretta uscente dall'origine; in genere si prende l'insieme $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, che in questo caso va bene, anche se possiamo tagliare il piano lungo un'altra qualunque semiretta, tranne l'asse y dato che la semicirconferenza assegnata passa per il punto i ; quindi, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale nel campo complesso, si ha

$$\int_{\gamma} \frac{2}{z} dz = 2 \left[\log \left(\gamma \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \log (\gamma(0)) \right] = 2 \left[\log e^{i\frac{\pi}{2}} - \log e^0 \right] = 2 \log(i) = 2 \log |i| + 2i \arg(i) = i\pi;$$

Si può usare anche la proprietà del logaritmo: $\log e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\pi}{2} \log e$ e $\log 0 = 1$.

Inoltre, si può verificare il risultato col calcolo diretto: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{e^{it}} i e^{it} dt = 2i \frac{\pi}{2} = i\pi$.

iii) Dobbiamo calcolare l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$, dove $f(z) = \frac{3z}{(z-i)^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ e nel punto $z = i$ ha una singolarità isolata; si tratta di un polo di ordine 2: infatti il $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \infty$ e inoltre si ha

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)^2 f(z) = 3i.$$

Dato che tale singolarità è necessariamente interna al quadrato γ , dal Teorema dei residui e usando la formula per il calcolo del residuo in un polo doppio si trova

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); z=i) = 2\pi i \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} [(z-i)^2 f(z)]' = 6\pi i.$$

Il risultato, ovviamente, è indipendente dalla lunghezza l del lato del quadrato γ . Volendo, si può usare anche la formula integrale di Cauchy per le derivate

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

in questo caso con $g(z) = 3z$, $z_0 = i$ e $n = 1$: si ricava

$$\int_{\gamma} \frac{3z}{(z-i)^2} dz = 2\pi i (3z)' = 6\pi i.$$

Esercizio 2.

- i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica dell'intervallo $[-c, c]$, $c > 0$, $f(t) = \chi_{[-c, c]}(t)$ (**1,5 punti**);
- ii) verificare che $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$ (dove $f(t)$ è la funzione assegnata nel punto i), ma $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ (**1,5 punti**);
- iii) applicare il Teorema di Plancherel alla funzione $f(t)$ del punto i), verificando poi l'identità di Plancherel (**2,5 punti**);
- iv) verificare che $\mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+1}$ in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)\}$ e $\mathcal{L}[e^{at} \sin t](s) = \frac{1}{(s-a)^2+1}$ in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)\}$ (**2,5 punti**).

Suggerimento: nel punto iv) usare la formula di duplicazione del seno e ricordare che $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} = \pi$.

- i) Come fatto a lezione, con semplici calcoli, magari anche osservando che f è a valori reali e pari, si verifica che $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2 \frac{\sin(c\omega)}{\omega}$ (che è ancora a valori reali e pari).
- ii) Abbiamo già osservato che la funzione $\widehat{f}(\omega)$ ottenuta al punto i) è a valori reali. Osserviamo che non è definita nel punto $\omega = 0$, dove possiamo estenderla per continuità ponendo $\widehat{f}(0) = 2c$. Iniziamo a verificare che $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, che serve per proseguire al punto iii). Dobbiamo verificare che $|\widehat{f}(\omega)|^2$ è integrabile in $\mathbb{R}$, cioè che $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2\sin(c\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(c\omega)}{\omega^2} d\omega < \infty$.

“Vicino” a $\omega = 0$ non ci sono problemi, dato che la funzione é limitata. Per $|\omega| \rightarrow \infty$ si ha $\frac{\sin^2(c\omega)}{\omega^2} \leq \frac{1}{\omega^2}$, che è integrabile per $|\omega| > 1$. In conclusione, da

$$4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(c\omega)}{\omega^2} dx = 4 \int_{|\omega| \leq 1} \frac{\sin^2(c\omega)}{\omega^2} dx + 4 \int_{|\omega| > 1} \frac{\sin^2(c\omega)}{\omega^2} dx$$

e dalle considerazioni fatte, si ha $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \in L^2(\mathbb{R})$.

Mostrare che $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$ è meno immediato, ma in questo contesto basterebbe un ragionamento intuitivo [...].

iii) Dato che $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, dal Teorema di Plancherel anche $\widehat{f}(\omega)$ deve stare in $L^2(\mathbb{R})$ e deve valere l'identità

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (1)$$

Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{[-c,c]}(t)|^2 dt = \int_{-c}^c 1 dt = 2c$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2 \frac{\sin(ct)}{t} \right|^2 dt &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(ct)}{t^2} dt = 8 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(ct)}{t^2} dt \\ &= 8 \left\{ \left[-\frac{1}{t} \sin^2(ct) \right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2c}{t} \sin(ct) \cos(ct) dt \right\} = 8c \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2ct)}{t} dt; \end{aligned}$$

Posto $2ct = y$ si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2 \frac{\sin(ct)}{t} \right|^2 dt = 8c \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 8c \frac{\pi}{2} = 4\pi c.$$

Dunque, la (1) è soddisfatta.

iv) Usando la definizione di trasformata si ha

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) = \int_0^{\infty} e^{at} \cos t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \cos t e^{-(s-a)t} dt$$

e, analogamente,

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin t](s) = \int_0^{\infty} \sin t e^{-(s-a)t} dt,$$

da cui si ricava subito il semipiano di convergenza $\{\operatorname{Re}(s-a) > 0\}$ per entrambe le trasformate. Dal calcolo diretto si ricava

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) &= \left[-\frac{\cos t e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{s-a} \int_0^{\infty} \sin t e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a} + \left[\frac{\sin t e^{-(s-a)t}}{(s-a)^2} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{(s-a)^2} \int_0^{\infty} \cos t e^{-(s-a)t} dt, \end{aligned}$$

da cui

$$\left(1 + \frac{1}{(s-a)^2}\right) \int_0^\infty \cos t e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

e, quindi,

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) = \int_0^\infty \cos t e^{-(s-a)t} dt = \frac{s-a}{1+(s-a)^2} \quad \text{in } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > a\}.$$

In maniera analoga si trova $\mathcal{L}[e^{at} \sin t](s)$.

Per trovare il risultato si può procedere anche in altri modi. Per esempio, ricordando le trasformate di Laplace delle funzioni trigonometriche (se non le si ricorda, si possono ricavare facilmente usando la trasformata di Laplace della funzione esponenziale $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$ in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)\}$ e la linearità dell'operatore di Laplace):

$$\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{in } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}$$

e

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{in } \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}. \quad (2)$$

Essendo $\mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) = \int_0^\infty \cos t e^{-(s-a)t} dt$, posto $s-a = z$ e usando la (2) si trova $\mathcal{L}[\cos t](z) = \int_0^\infty \cos t e^{-zt} dt = \frac{z}{z^2 + 1}$ da cui, risostituendo $z = s-a$, si ritrova $\mathcal{L}[e^{at} \cos t](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + 1}$ nel semipiano di convergenza detto.

Domanda 1.

- i) Cos'è l'ordine (o molteplicità) di uno zero di una funzione olomorfa? Una funzione olomorfa può avere zeri di ordine infinito? (**2 punti**)
- ii) Com'è fatto l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla? Dimostrarlo (**3 punti**);
- iii) tale insieme può avere punti di accumulazione che appartengono al dominio di olomorfia della funzione? Perché? (**1,5 punti**)
- iv) enunciare il Principio identità delle funzioni olomorfe e nominare almeno una delle sue conseguenze (**2,5 punti**).

Domanda 2.

- i) Enunciare i risultati relativi al legame tra la trasformazione di Fourier e la derivazione (Teorema della derivata della trasformata di Fourier e Teorema della trasformata di Fourier della derivata) e dimostrarli (**3 punti**);
- ii) Enunciare e dimostrare la formula per il calcolo della trasformata di Laplace di un segnale periodico (**2 punti**).