
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
CORSO DI LAUREA IN FISICA
Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2025/2026
SECONDA PROVA PARZIALE - 08/06/2026

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale definita su tutto l'asse reale

$$u'(x) + 3u(x) = e^{-x}\theta(x)$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino (vale 0 per $x < 0$ e 1 per $x \geq 0$).

- Risolvere l'equazione applicando la trasformata di Fourier, sapendo che la trasformata del termine noto è $U(k) = \frac{1}{1+ik}$
- Se per il calcolo dell'antitrasformata è stato usato l'integrale di convoluzione, verificare il risultato usando la scomposizione in fratti semplici (o viceversa).

Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

- determinare il numero complesso b in modo che A sia hermitiana, trovare autovalori ed autovettori normalizzati $|u_0\rangle, |u_+\rangle, |u_-\rangle$ di A , e scrivere la matrice diagonalizzata A_D e la matrice unitaria U che effettua la diagonalizzazione
- Facendo uso dello sviluppo operatoriale $e^{iA} = \sum_0^\infty \frac{(iA)^n}{n!}$, determinare il valor medio $s = \langle x | e^{iA} | x \rangle$ dove $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_+\rangle + |u_-\rangle)$

Esercizio 3. Si consideri l'operatore

$$P = -\frac{d^2}{dx^2}$$

che agisce nello spazio delle funzioni $L^2(-\pi, \pi)$ **dispari** con condizioni al contorno **periodiche** (sia per la funzione sia per la sua derivata prima)

- Verificare che P è autoaggiunto sul dominio delle funzioni considerate
- Determinare gli autovalori e un SONC di autovettori $f_n(x)$ di P
- Data la funzione

$$f(x) = -1 \quad (-\pi \leq x < 0), \quad f(x) = 1 \quad (0 < x \leq \pi)$$

determinare i coefficienti del suo sviluppo sul SONC e verificare la relazione di completezza (Servirà la serie notevole: $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$)