
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
CORSO DI LAUREA IN FISICA
Metodi Matematici per la Fisica - A.A. 2025/2026
SECONDO APPELLO - 29/06/2026

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^{2\pi z} - 1}$$

- identifica e classifica le singolarità z_k al finito della funzione
- calcola il residuo in $z = 0$
- calcola con metodi complessi l'integrale $\oint f(z)dz$ su un cerchio di raggio $1/2$ centrato nell'origine
- ripeti gli ultimi due punti per k generico, considerando l'integrale su un cerchio di raggio $k + 1/2$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ e^{ix} & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- ricava i coefficienti sulla base ortonormale $u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$
- verifica la relazione di Parseval usando la serie notevole $\sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{4}$ (m dispari intero)

Esercizio 3. Considera l'equazione differenziale definita su tutto l'asse reale

$$u''(x) - u(x) = e^{-x}\theta(x) + \delta(x)$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino (vale 0 per $x < 0$ e 1 per $x \geq 0$).

- Risolvi l'equazione applicando la trasformata di Fourier, sapendo che $\mathcal{F}_k(e^{-x}\theta(x)) = \frac{1}{1+ik}$ e $\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \delta & \gamma & \beta \\ 0 & i & \gamma \end{pmatrix}$$

- considera il caso $\delta = i$: determina i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ in modo che A sia hermitiana e risulti $\det A = -1$, e specifica se A è diagonalizzabile
- considera il caso $\delta = i, \alpha = \gamma = 0$: determina il coefficiente $\beta \in \mathbb{C}$ in modo che A abbia un autovalore doppio, e specifica se A è diagonalizzabile
- considera il caso $\delta = \alpha = 0$: determina $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ in modo tale che $A^2 = I$ e ricava l'espressione delle matrici $B = \cos(bA)$ e $C = \sin(bA)$ con $b \in \mathbb{R}$
(N.B.: puoi sfruttare l'espansione in serie di potenze delle funzioni trigonometriche)