
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
CORSO DI LAUREA IN FISICA
Metodi Matematici per la Fisica - A.A. 2025/2026
PRIMO APPELLO - 15/06/2026

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 3z + 2}$$

- classifica le singolarità al finito della funzione, calcola i residui e determina il comportamento all'infinito
- scrivi i primi due termini della serie di Taylor-Laurent intorno a $z = -1$, specificando il raggio di convergenza
- calcola con metodi complessi il seguente integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 3x + 2} dx$$

Esercizio 2. Considerando il prolungamento periodico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < -\pi/2 \\ 0 & -\pi/2 < x < +\pi/2 \\ +1 & +\pi/2 < x < +\pi \end{cases}$$

- ricava la serie di Fourier in termini di seni e coseni
- considerando $f(\pi/2)$, dimostra che $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$

Esercizio 3. Considera l'equazione differenziale definita su tutto l'asse reale

$$u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = e^{-x}\theta(x)$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino (vale 0 per $x < 0$ e 1 per $x \geq 0$).

- Risolvi l'equazione applicando la trasformata di Fourier, sapendo che $\mathcal{F}_k(e^{-x}\theta(x)) = \frac{1}{1+ik}$ (N.B. saranno utili la scomposizione in fratti semplici e la trasformata della derivata)

Esercizio 4. Due matrici 2×2 sono definite tramite la seguente azione su vettori di $\mathcal{C}^2$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - iy \\ ax + y \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ 2ix + by \end{pmatrix} \tag{2}$$

- scrivi in forma esplicita le due matrici A e B
- determina i coefficienti a, b, c tali che A e B siano hermitiane e ammettano un set di autovettori comuni
- Calcola gli autovalori e gli autovettori u_1 e u_2 comuni delle due matrici, e scrivi esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione simultanea delle due matrici