

2° Prova Intera del 01.07.2026 – A – (150 minuti)

Cognome	
Nome	
<u>N.matricola</u>	

- Svolgere il compito solo in questo foglio. Utilizzare altri fogli solamente se necessari e comunque, dopo averli chiesti al docente.
- Esercizio 1, 2, 3, 4: 7.5 punti.
- L'esame sarà considerato superato se il punteggio totale ottenuto raggiunge almeno 18/30

- 1) Disegnare il grafico della seguente funzione, illustrando tutti i passaggi fondamentali:

$$y = \arctg(\sqrt{x^2 - 9})$$

- 2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x [\ln(1 + \sin(3x))]}{3x(e^x - 1) + \arctg(2x^2)}$$

- 3) Calcolare l'area della regione di piano D compresa tra le due curve di equazione $y = e^{3x}$ e $y = -1 - x^2$ con $0 \leq x \leq 3$.

- 4) Determinare l'integrale particolare del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x) y(x) = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Es.1)

$$y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 9})$$

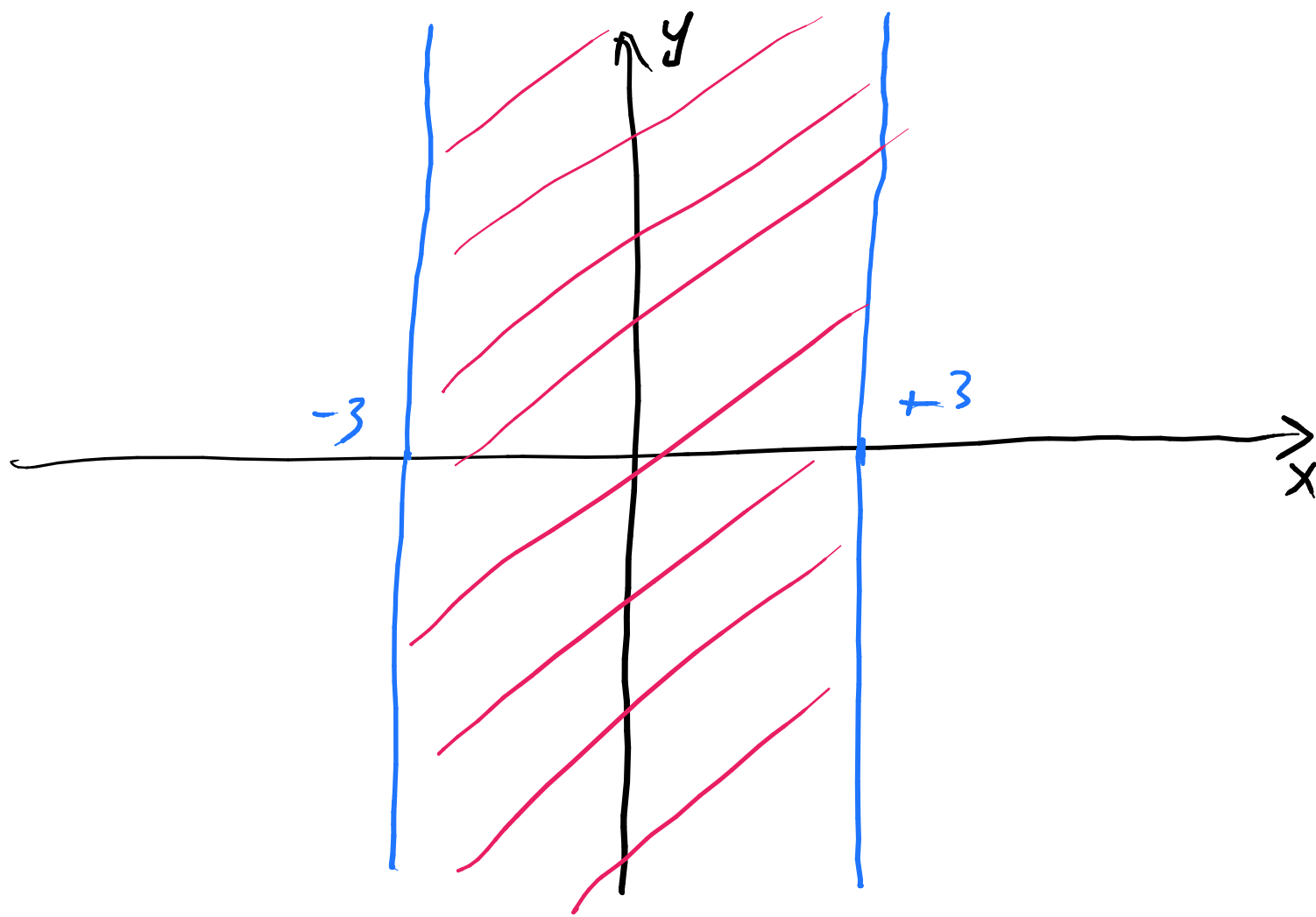
Dominio: $\operatorname{arctg} \Rightarrow \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9$$

$$x \geq \pm 3$$


$f(x)$ è definita per $x \leq -3$; $x \geq +3$

ovvero $]-\infty; -3] \cup [+3; +\infty[$



Simmetria:

$f(x)$ è Pari?

$$f(-x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{(-x)^2 - 9})$$

$$= \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 9}) = f(x)$$

$f(x)$ è Pari, Simmetrica rispetto
all'asse y

* Intersezi:

$$\text{- asse } x; \begin{cases} y=0 \\ \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-9})=0 \end{cases}$$

$$\cancel{Tg}(\cancel{\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-9})}) = \underbrace{Tg(0)}_{()=0}$$

$$\sqrt{x^2-9}=0 \Rightarrow (\cancel{\sqrt{x^2-9}})^2 = (0)^2$$

$$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$$

$$\begin{cases} x = \pm 3 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} A(+3;0) \\ B(-3;0) \end{array}$$

+ asse y ; $\begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Non appartiene} \\ \text{Al Dominio, Non} \\ \text{ci possono essere punti} \\ \text{d'interse} \end{cases}$

* Segno ($y > 0$)

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 9}) > 0$$

$$\cancel{\operatorname{Tg}}(\cancel{\operatorname{arctg}}(\sqrt{x^2 - 9})) > \underbrace{\operatorname{Tg}(0)}_{\rightarrow 0}$$

$$[\sqrt{x^2 - 9} > 0] \rightarrow \text{sempre verificata}$$

$$(\cancel{\sqrt{x^2 - 9}})^2 > (0)^2 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$$

$$\text{Per } x^2 > 9 \Rightarrow x > \pm 3$$

ovvero la funzione è positiva

$\forall x$ e al suo Dominio

* I limiti:

il dominio è $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

Quindi gli estremi sono $-\infty; +\infty$

$-3; +3$ sono compresi nel dominio

limiti Da Calcolare sono

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Visto che $f(x)$ è **Pari**, allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(\sqrt{(x-\infty)^2 - 9}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(\sqrt{+\infty - 9})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Anche } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

**Asintoto
orizzontale
completo**

Punti critici:

$$f(x) = \arctg(\sqrt{x^2 - 9})$$

$$f' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 9})^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - 9}} \cdot (\cancel{2}x)$$

$$\checkmark \quad f'(\arctg) = \frac{1}{1 + ()^2}$$

$$\uparrow \quad f'(\sqrt{}) = \frac{1}{2\sqrt{}}$$

$$f' = \frac{x}{[1 + (\sqrt{x^2 - 9})^2] \cdot \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\text{~~~~~}} = 0 \quad \text{Per } x=0$$

$\checkmark$

$f(x)$ Non è Definita in $x=0$,

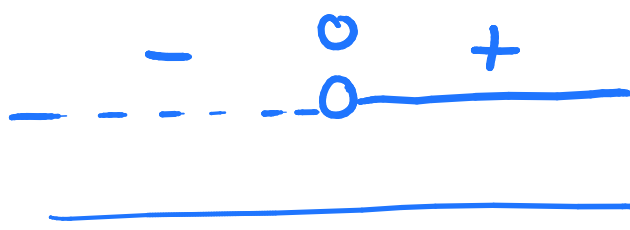
Non ci sono Punti critici

Monotona; $f'(x) > 0$

$$\frac{x}{[1 + (\sqrt{x^2 - 9})^2] \cdot \sqrt{x^2 - 9}} > 0 \text{ per}$$

$$[1 + (\sqrt{x^2 - 9})^2] \cdot \sqrt{x^2 - 9}$$

$N > 0$: $x > 0$



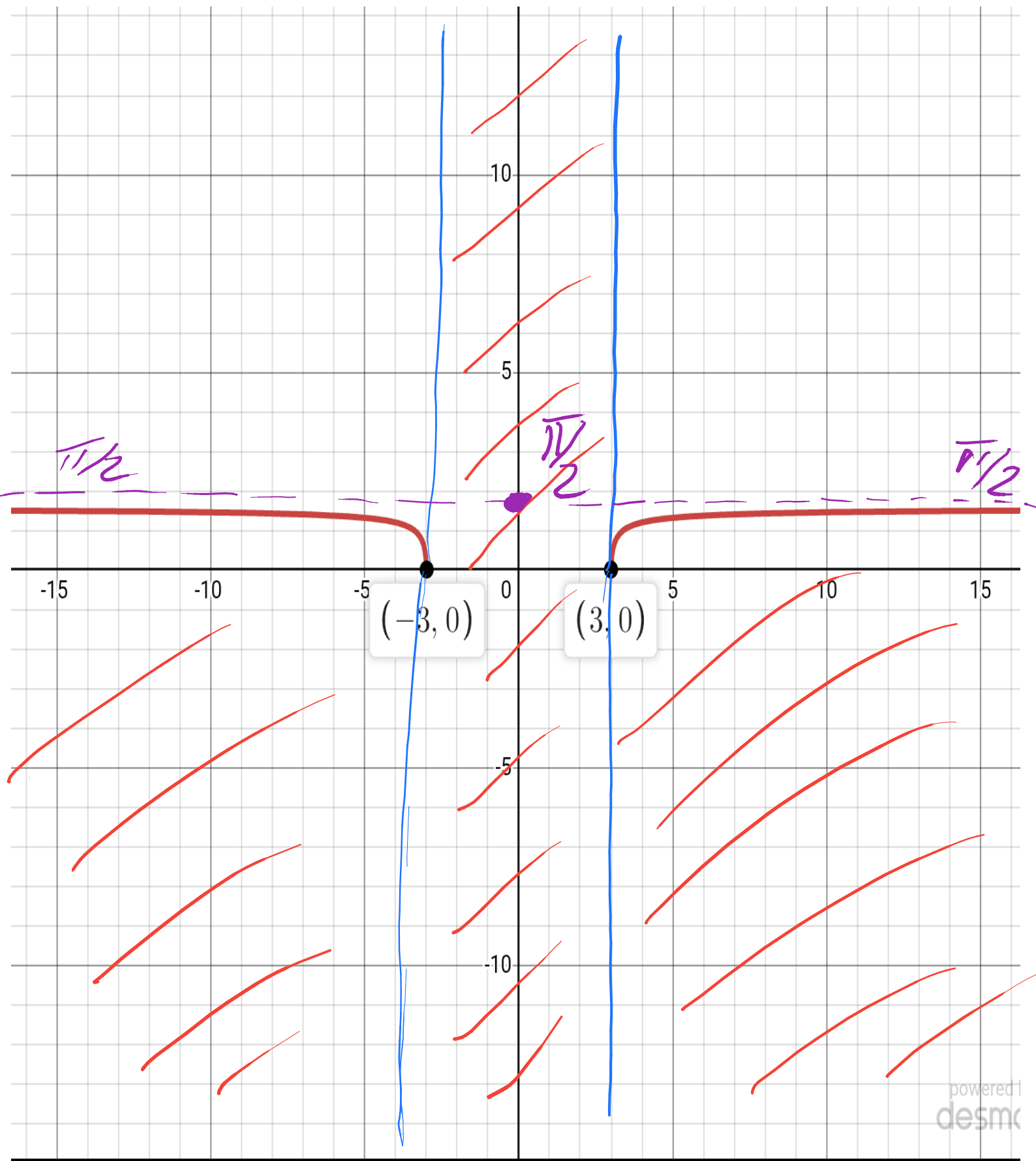
$N > 0$ Sempre verificato

Allora $f'(x) > 0$ per



Decrescente

crescente



Es. 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot [\ln(1 + \sin(3x))] }{3x(e^x - 1) + \arctan(2x^2)}$$

Applico i limiti Notevoli

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1 \Rightarrow \sin(3x) \sim 3x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x^2)}{2x^2} = 1 \Rightarrow \arctan(2x^2) \sim 2x^2$

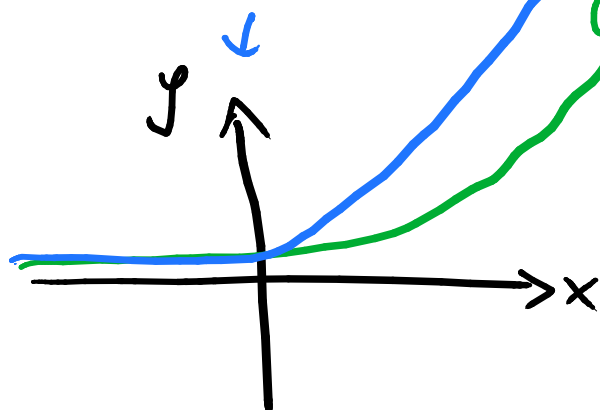
Allora: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot (\ln(1 + 3x))}{3x \cdot (x) + 2x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} = 1 \Rightarrow \ln(1 + 3x) \sim 3x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot (3x)}{3x^2 + 2x^2} = \frac{15x^2}{5x^2} = \boxed{3}$$

Es. 3)

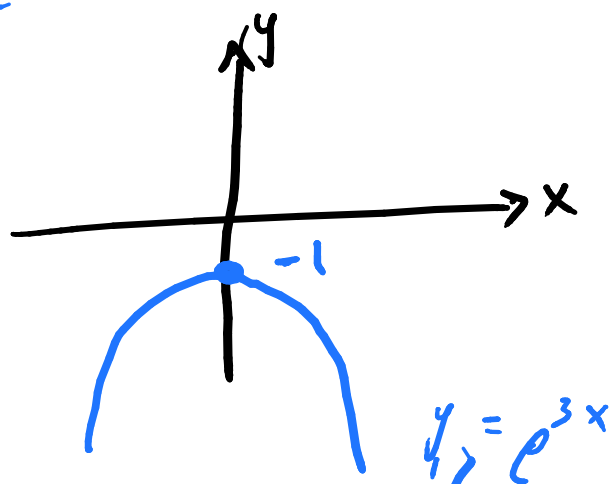
$$y_1 = e^{3x} \quad ; \quad y_2 = -x^2 - 1$$



$\Delta < 0$
 - Rivolta verso il Basso

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

• leggermente più veloce rispetto a e^x



• Grafico finale



$$\Rightarrow \int_0^3 [e^{3x} - (-x^2 - 1)] \cdot dx$$

$$\int (e^{3x} + x^2 + 1) \cdot dx = \underbrace{\int e^{3x} \cdot dx}_{I_1} + \int x^2 \cdot dx + \int 1 \cdot dx$$

I_1 : Per Sostituzione

$$\begin{aligned} t &= 3x \\ 1 \cdot dt &= 3 \cdot dx \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{3} = dx$$

$$\int e^t \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3} \int e^t \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$\left[\frac{1}{3} e^{3x} + \frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 =$$

$$\left[\frac{1}{3} e^9 + 9 + 3 \right] - \left[\frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} e^9 + 12 - \frac{1}{3}$$

$$4) \begin{cases} y' + \operatorname{Tg}(x) \cdot y(x) = 0 \\ y(0) = \pi/2 \end{cases} \quad L(x)$$

$$a(x) = \operatorname{Tg}(x) \Leftrightarrow A(x) = \int \operatorname{Tg}(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{\sec(x)}{\cos(x)} \cdot dx$$

$$t = \cos(x)$$

$$dt = -\sin(x) \cdot dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{-1}{t} \cdot dt$$

$$-1 \cdot dt = \sec(x) \cdot dx$$

$$= -1 \int \frac{1}{t} \cdot dt = -1 \ln(t) = \boxed{-\ln(\cos(x))}$$

$A(x)$

$$y = e^{-A(x)} \cdot \left[\int e^{A(x)} \cdot L(x) \cdot dx \right]$$

$$y = e^{+\ln(\cos(x))} \cdot \left[\int e^{-\ln(\cos(x))} \cdot (0) \cdot dx \right]$$

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\boxed{y = C \cos(x)} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Integrare} \\ \text{Generale} \end{array}$$

$$\{ y(0) = \pi/2$$



$$\pi/2 = C (\cos(0)) \rightarrow 1$$

$$\boxed{\pi/2 = C}$$

$$\boxed{y_0 = \pi/2 \cos(x)}$$

$\rightarrow$ $\begin{array}{l} \text{Integrare} \\ \text{Particolare} \\ \text{Di Cauchy} \end{array}$