

Prima Prova del 16.06.2026 – A – (150 minuti)

Cognome	
Nome	
N.matricola	

- Svolgere il compito solo in questo foglio. Utilizzare altri fogli solamente se necessari e comunque, dopo averli chiesti al docente.
- Esercizio 1: **10** punti, Esercizi 2, 3, 4: **5** punti.
- L'esame sarà considerato superato se il punteggio totale ottenuto raggiunge almeno 18/30

1) Disegnare il grafico della seguente funzione, illustrando tutti i passaggi

fondamentali : $y = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}$

2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x^2) + 6x - 4x^2}{3x^2 + \arctg(3x)}$$

3) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{-5}{x^2 + 2x + 2} dx$$

4) Utilizzando gli sviluppi di serie di una funzione, scrivere il polinomio di grado $n = 3$ con centro degli sviluppi rispetto al punto $X_0 = 0$ di :

$$f(x) = \ln(1 + \sin(2x))$$

5) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

E₅: ①

$$y = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}$$

* Dominio $\left\{ \begin{array}{l} e^{(\quad)} \\ \frac{2x-1}{\boxed{x}} \Rightarrow \neq 0 \end{array} \right. \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

* Simmetria: $\left(\frac{2(-x)-1}{-x} \right)$

$$f(-x) = e^{\left(\frac{2(-x)-1}{-x} \right)} \neq f(x)$$

$$-f(-x) = -e^{\left(\frac{-2x-1}{-x} \right)} \neq f(x)$$

$f(x)$ Ne Pari Ne Dispari

* Segno:

$$f(x) > 0 \Rightarrow e^{(\sim)} > 0$$

Se pre verificato
" Positiva

> 0
A parità
del argomento

* Intersezioni:

$$\text{con } x \begin{cases} y = 0 \\ e^{(\sim)} = 0 \end{cases} \text{ Mai}$$

$$\text{con } y \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{Impossibile} \\ \text{Se non fa Parte} \\ \text{Del Dominio} \end{cases}$$

Non ci sono Intersezioni!
Con gli assi.

I limiti:

Estremi sono $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ovvero $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$ f.I

$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{\cancel{x}(2 - \frac{1}{x})}{\cancel{x}}\right)} = e^{(2 - \frac{1}{x})} = e^2$
 $\frac{1}{\infty} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\left(\frac{0-1}{0^-}\right)} = e^{\left(\frac{-1}{0^-}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$ A.O

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\left(\frac{0-1}{0^+}\right)} = e^{\left(\frac{-1}{0^+}\right)} = e^{-\infty} = 0$ A.V

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^{\frac{+\infty-1}{+\infty}} = e^{\frac{+\infty}{+\infty}} \Rightarrow$ f.I

$\hookrightarrow e^{\left(\frac{\cancel{x}(2 - \frac{1}{x})}{\cancel{x}}\right)} = e^{(2 - \frac{1}{x})} = e^2$
A.O

* Derivata Prima $f'(x)$:

$$y = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \Rightarrow \text{funzione composta} \quad \hookrightarrow \frac{f}{g} \Rightarrow \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\hookrightarrow y' = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{2(x) - (2x-1) \cdot (1)}{x^2} \right)$$

$$y' = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{\cancel{2x} - \cancel{2x} + 1}{x^2} \right)$$

$$y' = e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

* $y' = 0$ (Max / Min):

$$\underbrace{e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)}}_{L=0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{L=0} = 0$$

$L=0$

Mai

Sempre
Positivo

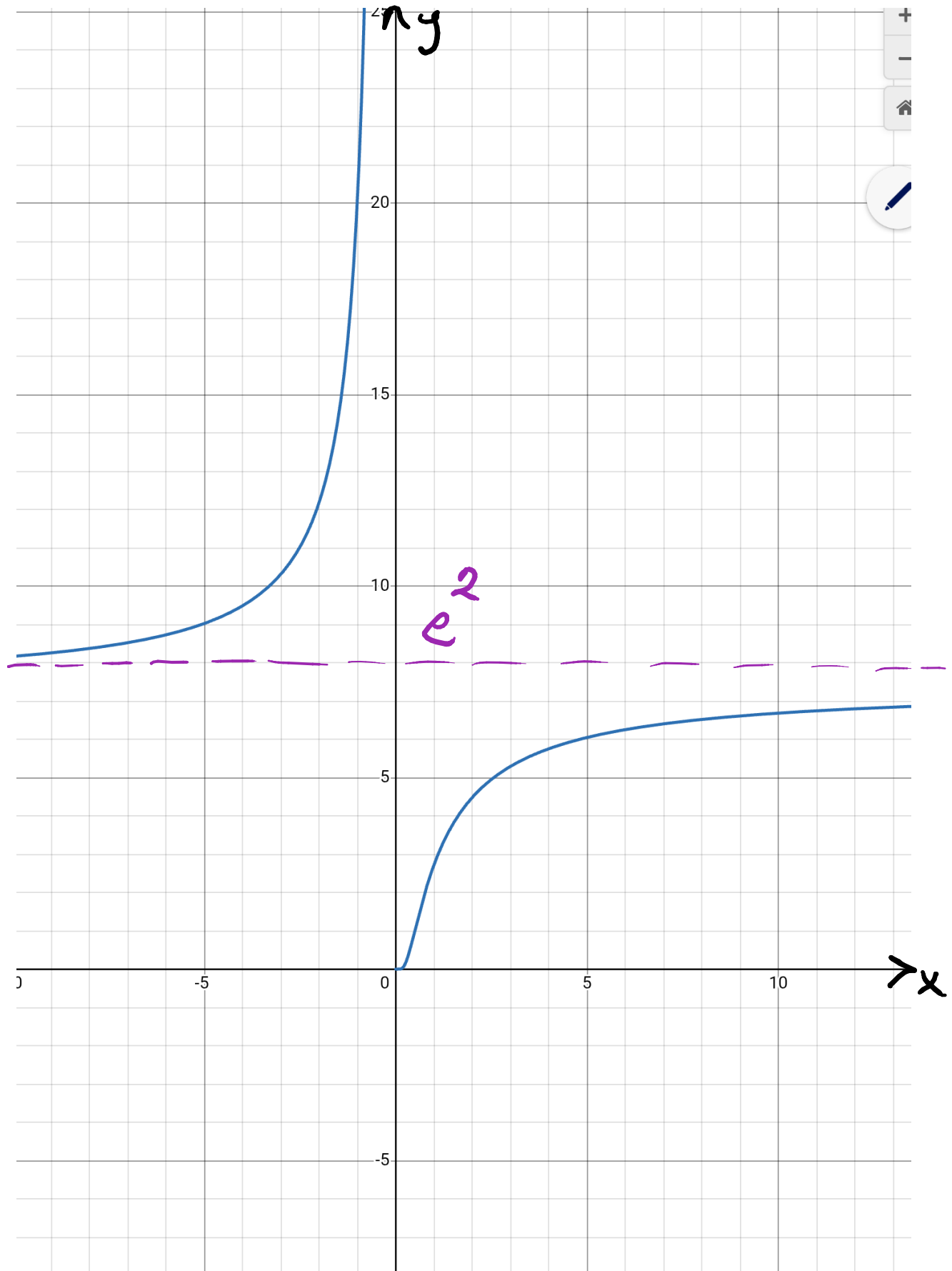
$\hookrightarrow = 0 \Rightarrow 1 = 0$ Mai

Nessun Punto

Critico

$$* y' > 0 \Rightarrow e^{\left(\frac{2x-1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$$

sempre verificata / sempre crescente



Es: (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{se}(x^2) + 6x - 4x^2}{3x^2 + \operatorname{arctg}(3x)}$$

* Con I limiti Notevoli:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{se}(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{se}(x^2)}{x^2} = 1$$

$$\text{ovvero } \operatorname{se}(x^2) \sim x^2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3x)}{3x} = 1$$

$$\text{ovvero } \operatorname{arctg}(3x) \sim 3x$$

$$\Downarrow \lim_{\boxed{x \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + 6x - 4x^2}{3x^2 + 3x} = \frac{0}{0} \quad \text{f.I.}$$

↓

* Confronto tra infinitesimi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{3x} = \frac{6}{3} = \textcircled{2}$$

Es: ③

$$\int \frac{-5}{\underbrace{x^2 + 2x + 2}} \cdot dx \quad \hookrightarrow \text{eq. 2° grado}$$

$$\Delta = 4 - 8 = \underline{-4} < 0 \quad \text{Negativo.}$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow -5 \int \frac{1}{\underbrace{(x+1)^2 + 1}} \cdot dx \Rightarrow -5 \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot dt$$

Per
Sostituzione $\hookrightarrow t = x+1$
 $1 \cdot dt = 1 \cdot dx$

$$= -5 \operatorname{arctg}(t) = -5 \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

Ex. 4)

$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{sech}(2x))'$$

$$\underline{n=3}$$

$$x_0 = 0$$

$$\operatorname{sech}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{sech}(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\log(1 + \operatorname{sech}(2x)) = \log\left(1 + 2x - \frac{(2x)^3}{(3!)^3}\right)$$

$$f'''(0) = \frac{2x - \frac{(2x)^3}{(3!)^3}}{2!} + \frac{\left(2x - \frac{(2x)^3}{(3!)^3}\right)^3}{3!}$$

Es. 5)

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{16 \cdot (-1)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$y = e^{ax} (C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx))$$

$$y = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$