

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 16/06/2026

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.

Data la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$

- i) calcolare $\int_{\gamma} f(z) dz$, dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio 3 (**2 punti**);
- ii) calcolare $\int_{\gamma} f(z) dz$, dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio $\frac{1}{2}$ (**1,5 punti**);
- iii) calcolare il residuo a infinito di $f(z)$ (**2 punti**);
- iv) calcolare il residuo in zero della funzione $-\frac{1}{\xi^2} f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ (**1,5 punti**);
- v) verificare che lo sviluppo in serie di potenze di $f(z)$ nella bolla $B_2(0)$ è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} z^n$ (**2 punti**);
- vi) ricavare lo stesso risultato del punto v) ricordando che, se due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono assolutamente convergenti, il prodotto di Cauchy delle due serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, è assolutamente convergente (**1,5 punti**).

Esercizio 2.

- i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $g(t) = \frac{1}{t^2+25}$ (**3 punti**);
- ii) calcolare (usando la definizione di trasformazione di Laplace e/o le sue proprietà, e ricordando che $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$ in $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}$) l'integrale $\int_0^{\infty} te^{-4t} \sin t dt$ (**3 punti**).

Domanda 1.

- i) Data una funzione f definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, definire una primitiva di f (**1 punto**);
- ii) esiste un legame tra l'olomorfia di $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e l'esistenza di una sua primitiva? Se sì, quale? (**1,5 punti**)
- iii) enunciare il Teorema di Morera e il primo Teorema di Cauchy (**2,5 punti**);
- iv) dimostrare il Teorema di Morera (**3 punti**).

Domanda 2.

- i) Dimostrare che l'operatore di Fourier è lineare continuo e che la trasformata di Fourier di una funzione Fourier-trasformabile è continua (**2,5 punti**);
- ii) dimostrare la formula che lega una funzione Laplace trasformabile f con la derivata della trasformata di Laplace di f , estendendo poi la formula alle derivate successive (**3 punti**).