

Esercizio 1.

Data la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$

- i) calcolare $\int_{\gamma} f(z) dz$, dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio 3 (2 punti);
- ii) calcolare $\int_{\gamma} f(z) dz$, dove γ è la circonferenza di centro 1 e raggio $\frac{1}{2}$ (1,5 punti);
- iii) calcolare il residuo a infinito di $f(z)$ (2 punti);
- iv) calcolare il residuo in zero della funzione $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ (1,5 punti);
- v) verificare che lo sviluppo in serie di potenze di $f(z)$ nella bolla $B_2(0)$ è $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} z^n$ (2 punti);
- vi) ricavare lo stesso risultato del punto v) ricordando che, se due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono assolutamente convergenti, il prodotto di Cauchy delle due serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, è assolutamente convergente (1,5 punti).

i) La funzione assegnata è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{2\}$; la circonferenza γ contiene l'unica singolarità isolata della funzione $f(z)$, quindi dal Teorema dei residui segue che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); z = 2) = 0,$$

essendo $\operatorname{Res}(f(z); z = 2) = 0$.

A tale risultato si può arrivare in diversi modi, per esempio osservando che la serie di Laurent di $f(z)$ un qualunque disco bucato centrato in $z = 2$ è dato da $(z - 2)^{-2}$ e, quindi, $a_{-1} = 0$. Oppure, si può osservare che l'integrale richiesto è del tipo $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-a)^n} dz$, con γ curva chiusa contenente a al suo interno, che è nullo per $n \neq -1$. Ancora, si può notare che $z = 2$ è un polo doppio e si può utilizzare la formula per il calcolo del residuo in un polo di ordine 2.

ii) La funzione $f(z)$ è olomorfa in un dominio contenente la circonferenza γ (l'unica singolarità isolata è ora all'esterno della curva), quindi l'integrale è nullo, stavolta come conseguenza del Teorema di Cauchy.

iii) Sfruttando il fatto che $f(z)$ è già espressa come serie di Laurent centrata in $z_0 = 2$ ($f(z) = (z - 2)^{-2}$), si ricava che z_0 è un polo doppio (in alternativa, si osserva che $\lim_{z \rightarrow 2} f(z) = \infty$ e $\lim_{z \rightarrow 2} (z - 2)^2 f(z) = 1$); inoltre, dalla formula per il calcolo del residuo in un polo multiplo, si ha

$$\operatorname{Res}(f(z); z = 2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} [(z - 2)^2 f(z)] = 0.$$

Pertanto, essendo $f(z)$ olomorfa in \mathbb{C} tranne che in un numero finito di punti singolari isolati, si ricava, usando il Teorema della somma dei residui, $\operatorname{Res}(f(z); \infty) = -\operatorname{Res}(f(z); z = 2) = 0$. Si può giungere alla stessa conclusione osservando che $f(z)$ è olomorfa in \mathbb{C} tranne che in un numero finito di punti singolari isolati e che $f(z) \sim \frac{1}{z^2}$ per $z \rightarrow \infty$.

iv) Il calcolo richiesto non è altro che la formula per il calcolo del residuo a infinito per $f(z)$ (dalla formula $\text{Res}\left(-\frac{1}{\xi^2}f\left(\frac{1}{\xi}\right); \xi = 0\right) = \text{Res}(f(z); z = \infty)$), quindi sappiamo già di dover ottenere zero. Posto $z = \frac{1}{\xi}$, si ha

$$-\frac{1}{\xi^2}f\left(\frac{1}{\xi}\right) = -\frac{1}{(1-2\xi)^2} \rightarrow -1 \quad \text{per } \xi \rightarrow 0.$$

Quindi, $\xi = 0$ è un punto regolare (non è un punto singolare) per $g(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ (si ha proprio $g(0) = -1$), e quindi il residuo di tale funzione in zero, effettivamente, risulta nullo. Ciò si può constatare, volendo, anche ricavando lo sviluppo in serie di Laurent (che in tal caso è una serie di potenze) di $g(\xi)$ in un intorno di $\xi = 0$: osservando che $\left(\frac{1}{1-2\xi}\right)' = \frac{2}{(1-2\xi)^2}$ si ricava $-\frac{1}{(1-2\xi)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\xi}\right)'$; quindi, sfruttando lo sviluppo

$$\frac{1}{1-2\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} (2\xi)^n \quad \text{per } |2\xi| < 1, \text{ cioè per } |\xi| < \frac{1}{2},$$

derivando termine a termine si trova, nello stesso cerchio di convergenza,

$$-\frac{1}{(1-2\xi)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(2\xi)^{n-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(2\xi)^k,$$

in cui il termine $a_{-1} = 0$.

v) Nella bolla $B_2(0)$ $f(z)$ è olomorfa, dunque sviluppabile in serie di potenze. Partendo dalla serie geometrica

$$(1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{per } |z| < 1$$

e derivando termine a termine si trova

$$(1-z)^{-2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad \text{per } |z| < 1. \quad (1)$$

La nostra funzione è simile a quella del primo membro della (1): osserviamo che

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}[-(z-2)^{-1}] = \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z-2} \right);$$

essendo

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{per } |z| < 2, \quad (2)$$

derivando termine a termine si ricava

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} z^{n-1} \quad \text{per } |z| < 2;$$

col cambio di indice $n - 1 = l$ si ha

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{2^{l+2}} z^l \quad \text{per } |z| < 2,$$

che è proprio lo sviluppo da verificare. Anche a questo risultato si può arrivare per vie diverse: per esempio, anche osservando che

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{(2-z)^2} = \frac{1}{4\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}$$

e usando direttamente la (1) con $\frac{z}{2}$ al posto di z , e operando poi un cambio di indice.

vi) Utilizzando il prodotto di Cauchy della serie (2) per se stessa si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-2)^2} &= \left(-\frac{1}{z-2}\right) \left(-\frac{1}{z-2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{z^k}{2^{k+1}}\right) \left(\frac{z^{n-k}}{2^{n-k+1}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^n}{2^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, che coincide col risultato fornito.

Esercizio 2.

i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $g(t) = \frac{1}{t^2+25}$ (**3 punti**);

ii) calcolare (usando la definizione di trasformazione di Laplace e/o le sue proprietà, e ricordando che $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$ in $\{Re(s) > 0\}$) l'integrale $\int_0^{\infty} te^{-4t} \sin t dt$ (**3 punti**).

i) Osserviamo che $g(t) \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+25} dt = \left[\frac{1}{5} \arctan \frac{t}{5} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{5}.$$

Calcolando la trasformata di Fourier di $g(t)$ si trova $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+25} e^{-i\omega t} dt$, che un integrale di “tipo TF”, la cui formula risolutiva è

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2+25} e^{-i\omega z}; z = 5i \right) & \text{se } -\omega > 0 \\ \frac{\pi}{5} & \text{se } \omega = 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2+25} e^{-i\omega z}; z = -5i \right) & \text{se } -\omega < 0, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \begin{cases} 2\pi i \lim_{z \rightarrow 5i} (z-5i) \frac{1}{z^2+25} e^{-i\omega z} = \frac{\pi}{5} e^{5\omega} & \text{se } \omega < 0 \\ \frac{\pi}{5} & \text{se } \omega = 0 \\ -2\pi i \lim_{z \rightarrow -5i} (z+5i) \frac{1}{z^2+25} e^{-i\omega z} = \frac{\pi}{5} e^{-5\omega} & \text{se } \omega > 0, \end{cases}$$

cioé $\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \frac{\pi}{5} e^{-5|\omega|}$.

Si può trovare il risultato anche ricordando la formula

$$\mathcal{F} \left[e^{-a|x|} \right] (\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

In questo caso, $g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 25}$, quindi $g(\omega) = \frac{1}{2a} \mathcal{F} \left[e^{-a|x|} \right] (\omega)$ con $a = 5$. Dunque

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{10} \mathcal{F} \left[e^{-5|x|} \right] (t) \right] (\omega) = \frac{1}{10} \mathcal{F} \left[\mathcal{F} \left[e^{-5|x|} \right] (t) \right] (\omega)$$

e, dalla formula di simmetria $\mathcal{F}^2[f](\omega) = 2\pi f(-\omega) \forall \omega \in \mathbb{R}$, si ricava

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \frac{1}{10} \mathcal{F}^2 \left[e^{-5|x|} \right] (\omega) = \frac{1}{10} \cdot 2\pi e^{-5|\omega|} = \frac{\pi}{5} e^{-5|\omega|}.$$

ii) La trasformazione di Laplace è definita come $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ nel semipiano di convergenza $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma[f]\}$. Quindi, l'integrale richiesto è $\mathcal{L}[f(t)](4)$, con $f(t) = t \sin t$. Volendo, si può procedere col calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t e^{-4t} \sin t dt &= [-t \cos t e^{-4t}]_0^\infty + \int_0^\infty \cos t (e^{-4t} - 4t e^{-4t}) dt \\ &= [\sin t e^{-4t}]_0^\infty + 4 \int_0^\infty \sin t e^{-4t} dt - 4 \left([t \sin t e^{-4t}]_0^\infty - \int_0^\infty \sin t (e^{-4t} - 4t e^{-4t}) dt \right) \\ &= 4 \int_0^\infty \sin t e^{-4t} dt + 4 \int_0^\infty \sin t e^{-4t} dt - 16 \int_0^\infty t \sin t e^{-4t} dt, \end{aligned}$$

da cui

$$17 \int_0^\infty t \sin t e^{-4t} dt = 8 \int_0^\infty \sin t e^{-4t} dt = 8\mathcal{L}[\sin t](4).$$

Ricordando la trasformata di Laplace della funzione $\sin t$ si ricava

$$\int_0^\infty t \sin t e^{-4t} dt = \frac{8}{289}.$$

Volendo invece usare una delle proprietà riguardanti la trasformata, dovendo calcolare $\mathcal{L}[t \sin t](4)$, si può osservare che, dalla formula per la derivata della trasformata di Laplace di $f(t)$, sappiamo che

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) \tag{3}$$

nello stesso semipiano di convergenza della trasformata di $f(t)$. In questo caso, quindi, possiamo interpretare l'integrale assegnato come $\mathcal{L}[tf(t)](s)$, con $f(t) = \sin t$ e dove $s = 4$. Usando la (3), si ricava

$$\int_0^\infty t \sin t e^{-4t} dt = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t](4) = -\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \right]_{s=4} = \left[\frac{2s}{s^2 + 1} \right]_{s=4} = \frac{8}{289}.$$

Domanda 1.

- i) Data una funzione f definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, definire una primitiva di f (1 punto);*
- ii) esiste un legame tra l'olomorfia di $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e l'esistenza di una sua primitiva? Se sì, quale? (1,5 punti)*
- iii) enunciare il Teorema di Morera e il primo Teorema di Cauchy (2,5 punti);*
- iv) dimostrare il Teorema di Morera (3 punti).*

Domanda 2.

- i) Dimostrare che l'operatore di Fourier è lineare continuo e che la trasformata di Fourier di una funzione Fourier-trasformabile è continua (2,5 punti);*
- ii) dimostrare la formula che lega una funzione Laplace trasformabile f con la derivata della trasformata di Laplace di f , estendendo poi la formula alle derivate successive (3 punti).*