



Teoria dei segnali

Mauro Fadda (mauro.fadda@unica.it)

Università degli Studi di Sassari

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Crediti: 6



Convoluzione



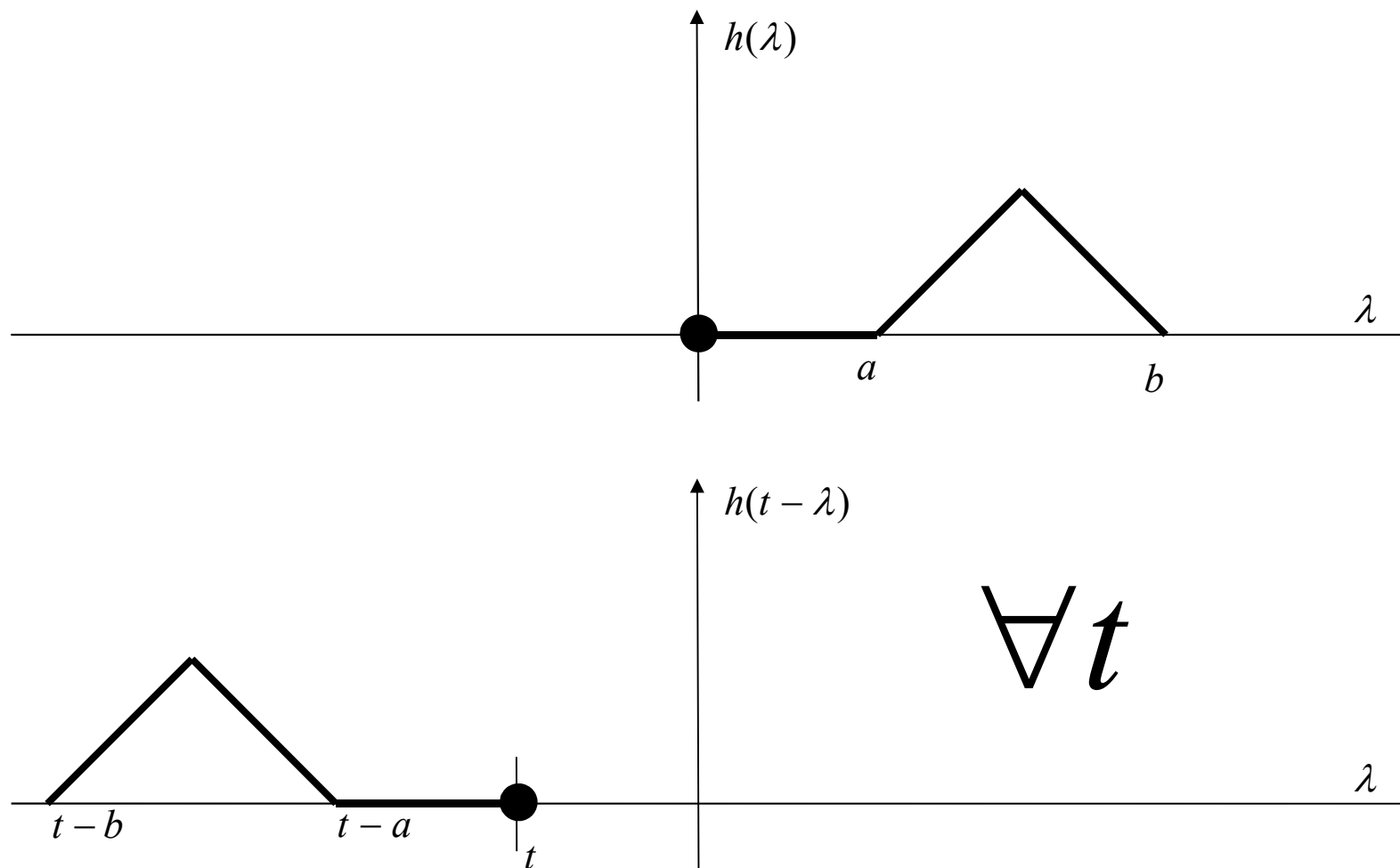
- La convoluzione è un'operazione tra due funzioni di una variabile che consiste nell'integrare il prodotto tra la prima e la seconda traslata di un certo valore.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

- Convoluzione analitica
- Convoluzione grafica

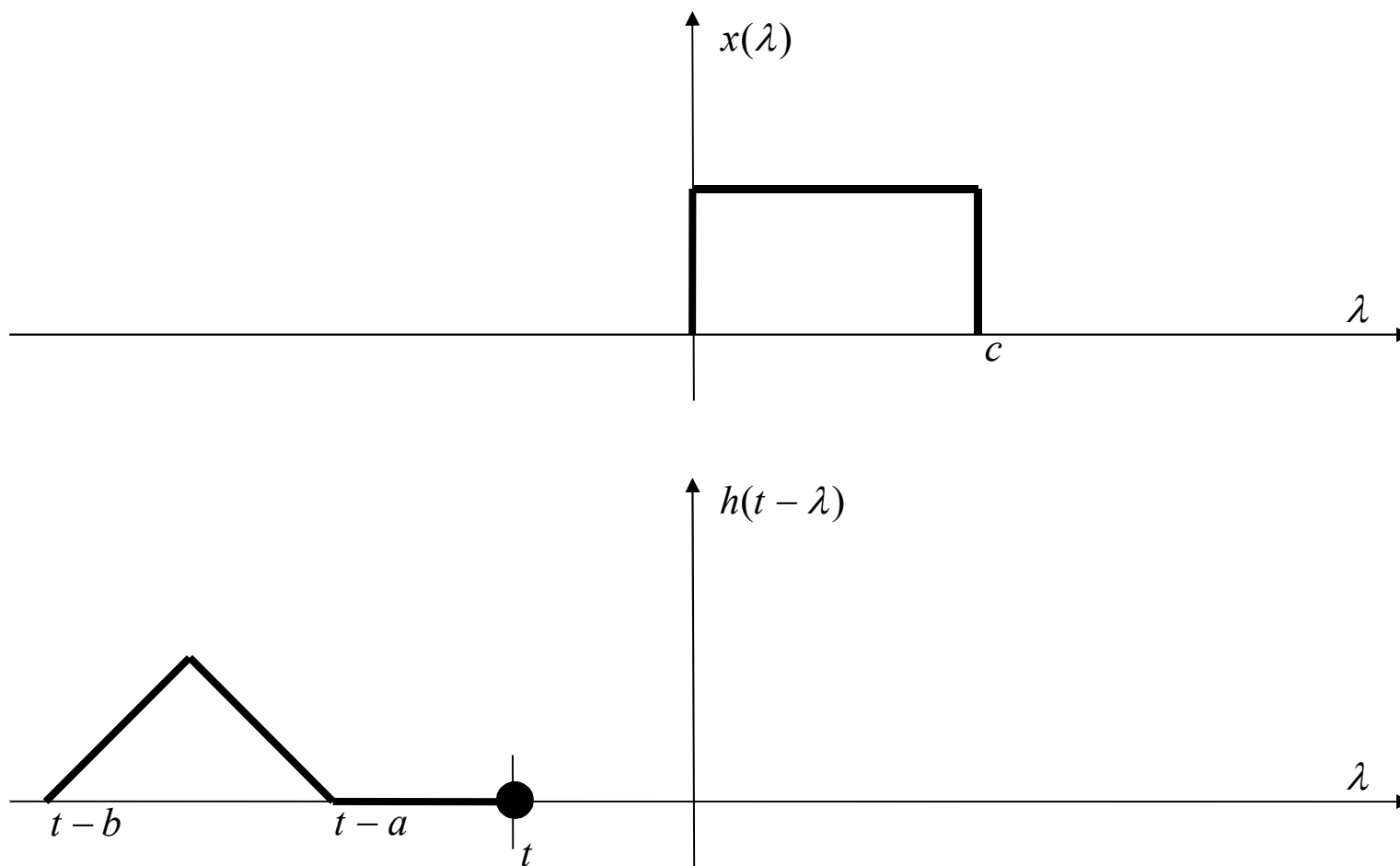


$h(\lambda)$ e $h(t - \lambda)$



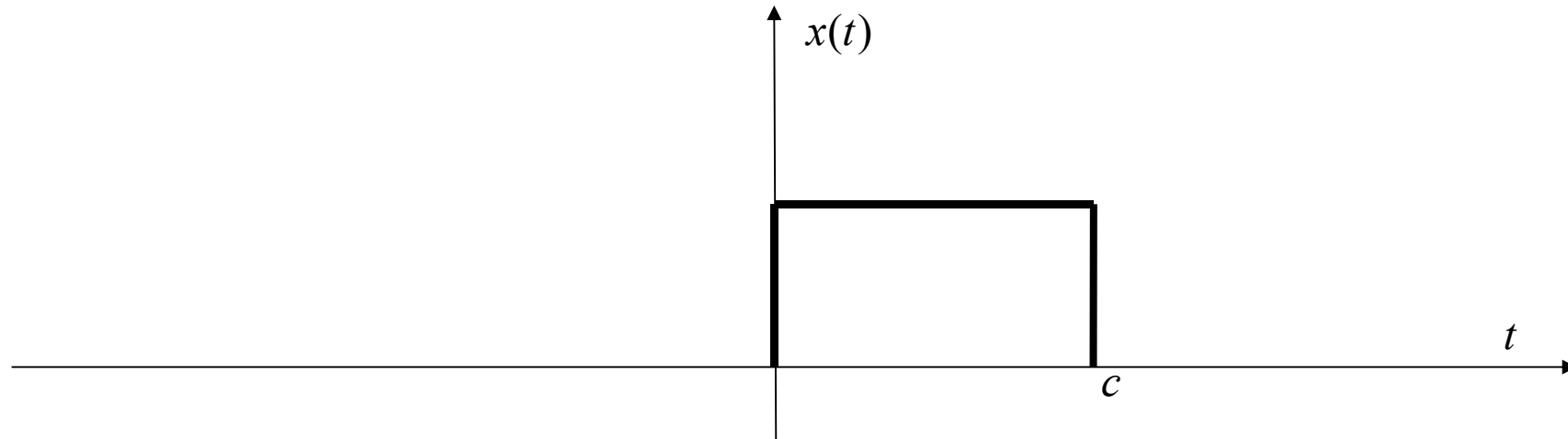


$x(\lambda)$ e $h(t - \lambda)$

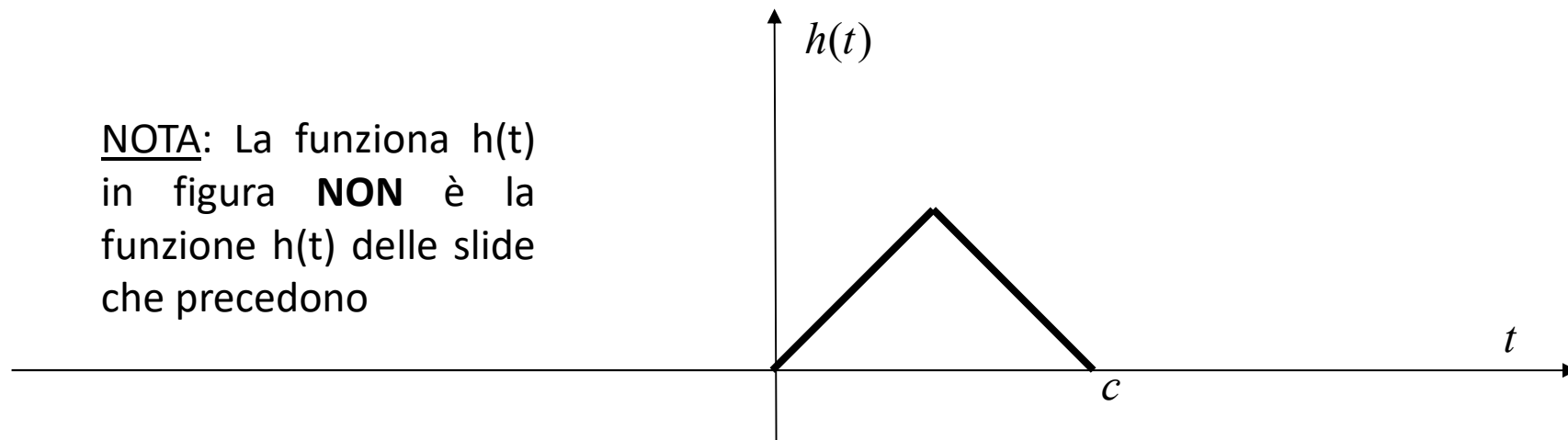




Calcolare la convoluzione

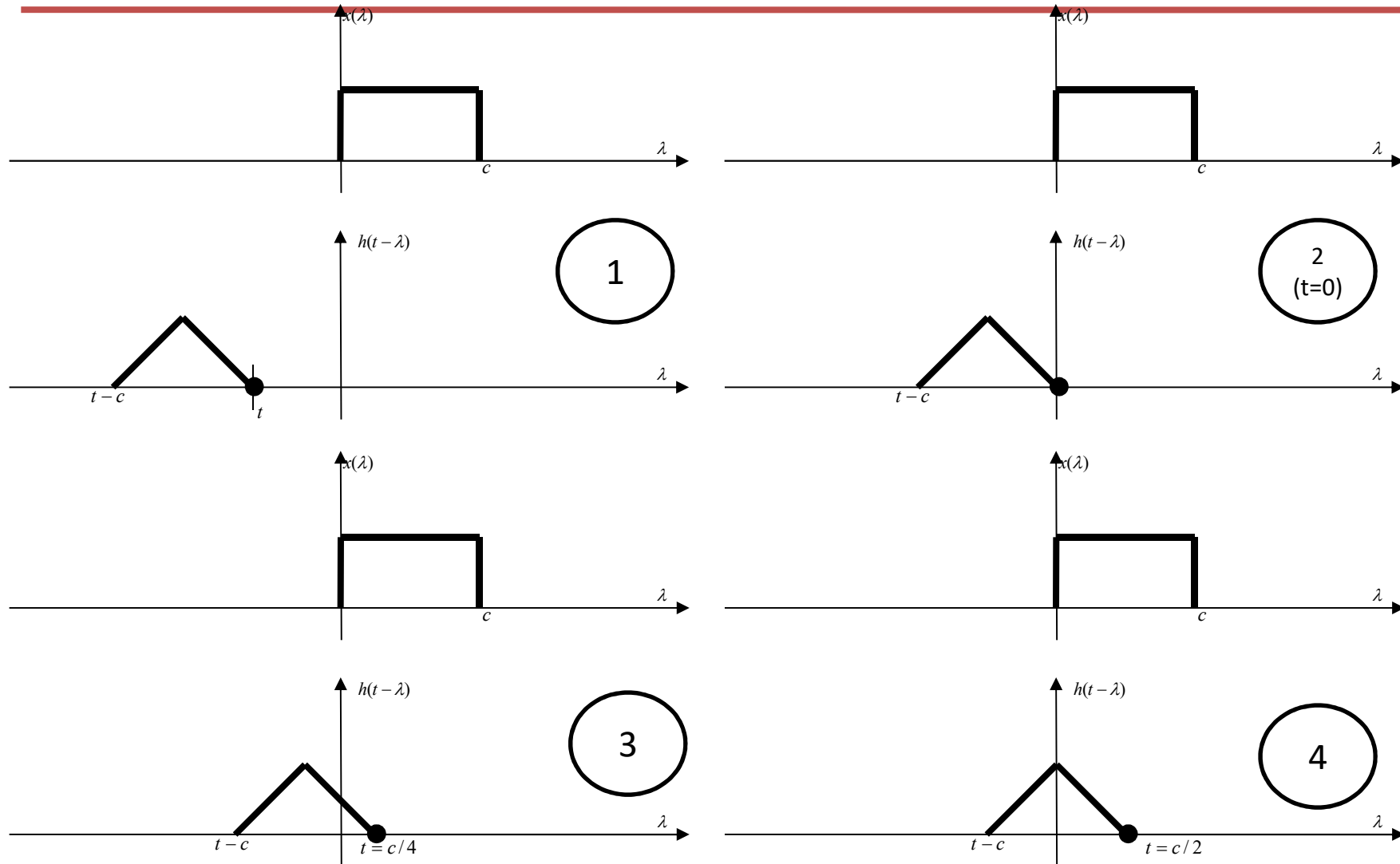


NOTA: La funzione $h(t)$ in figura **NON** è la funzione $h(t)$ delle slide che precedono



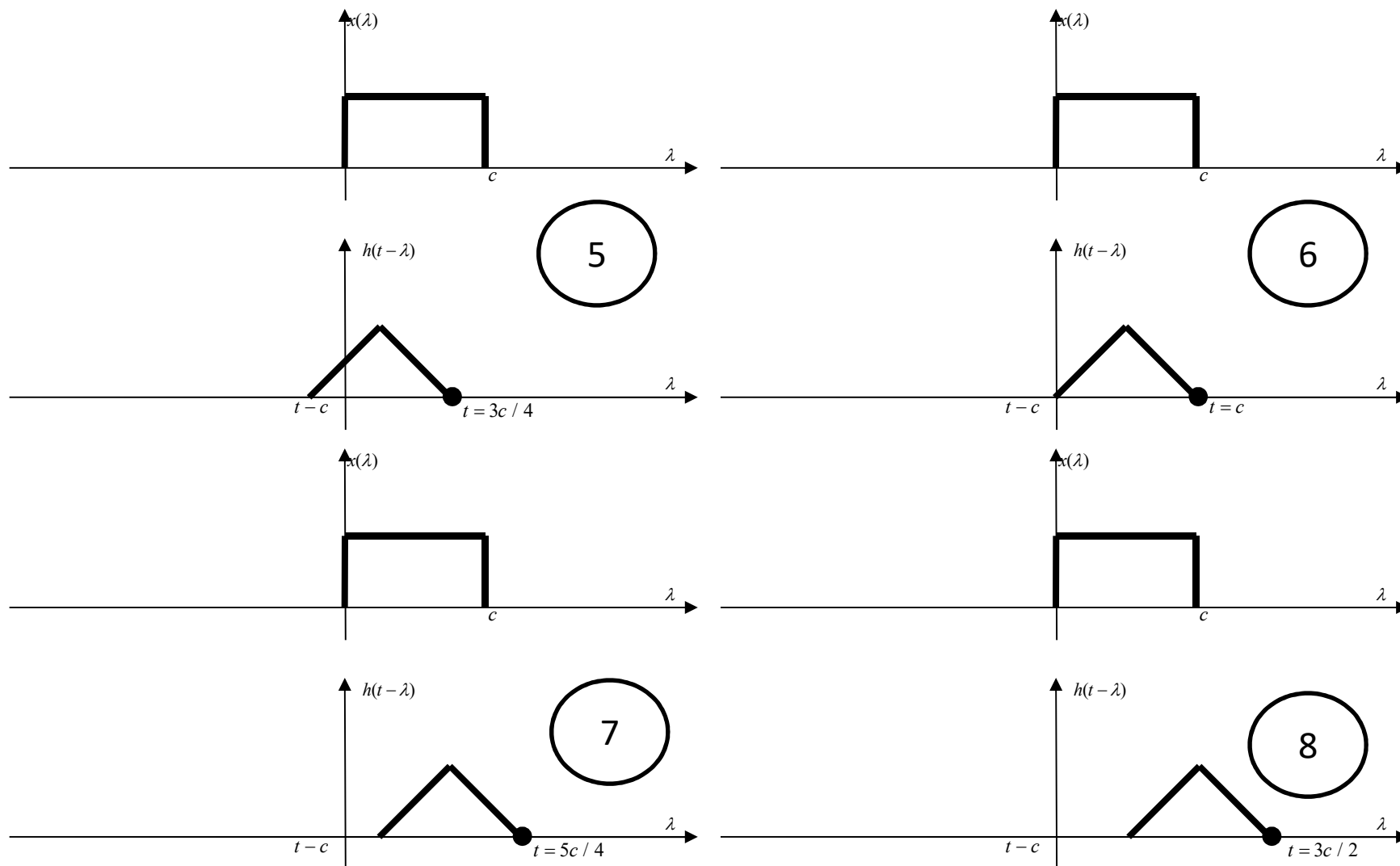


Convoluzione 1/3





Convoluzione 2/3





Convoluzione 3/3



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

- Per risolvere la convoluzione:
 - Moltiplicare le funzioni x e h (vedere grafici precedenti)
 - Integrare il prodotto (negli intervalli in cui il prodotto non è nullo)



Convoluzione analitica



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda$$

- Risolvere l'integrale di convoluzione per ogni valore di t
- **Proprietà commutativa**, può essere più “comodo” “ribaltare” la x(t) e non la h(t)



Somma di due v.a.



$$Z = X + Y$$

Se X e Y indipendenti

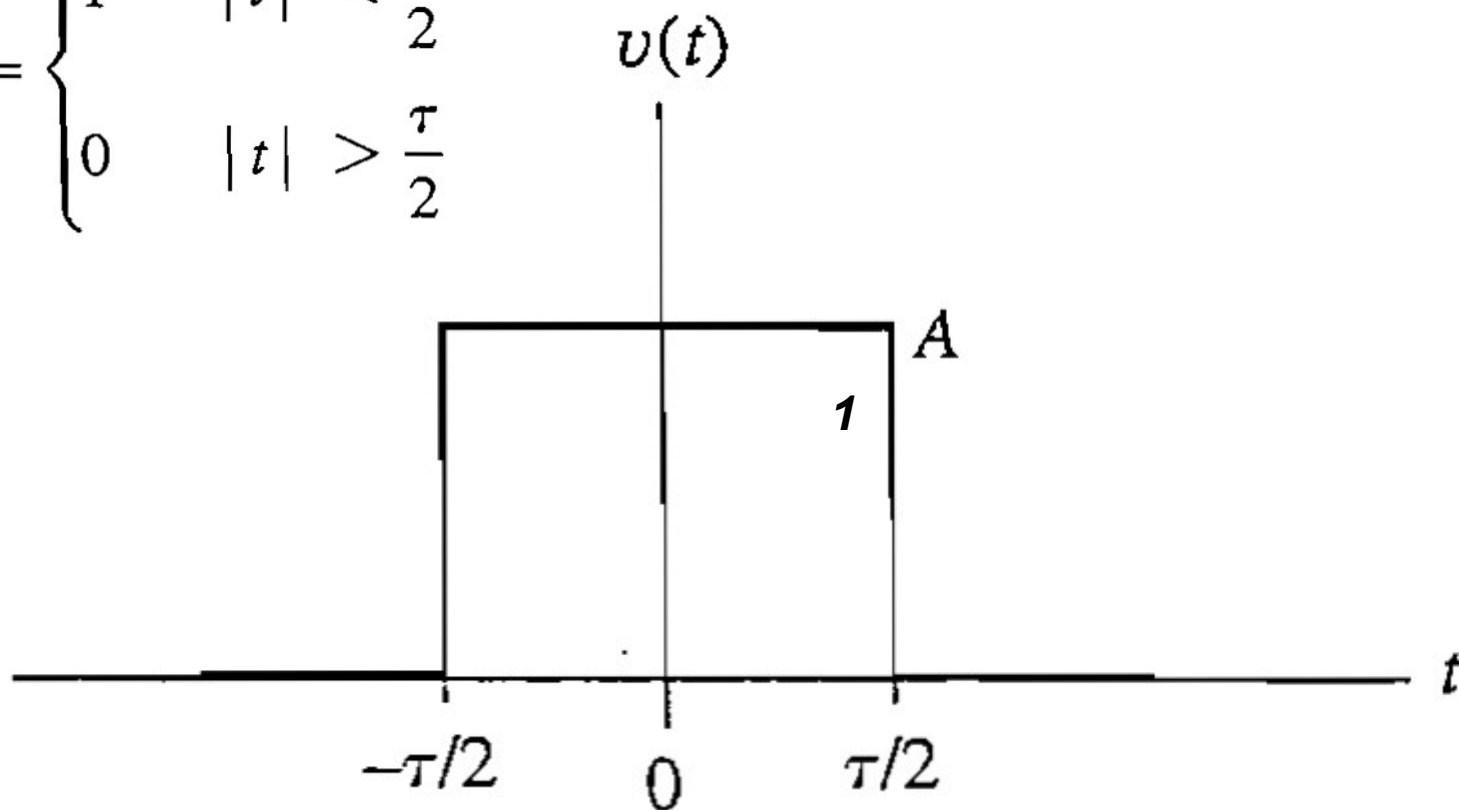
$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$



Notazione impulso rettangolare



$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

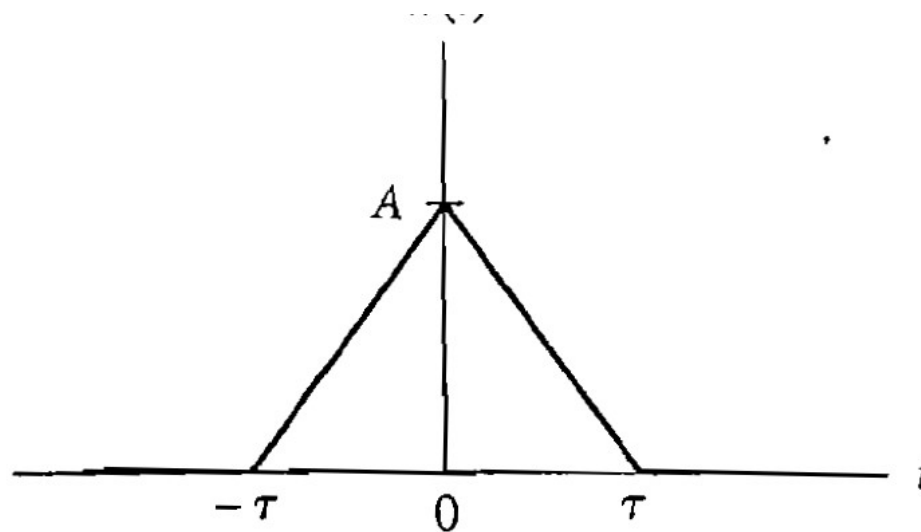




Notazione impulso triangolare



$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$





Considerazioni



- Prima di procedere al calcolo è bene verificare se è possibile riorganizzare il problema di partenza per semplificare il ragionamento/calcolo
- Nel caso precedente per esempio si potrebbero centrare le due funzioni per renderle simmetriche rispetto all'origine e ricordarsi di ritardare la soluzione per allinearla alla soluzione del problema dato



Convoluzione di due rettangoli



Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A \operatorname{rect}_{\Delta_1}(t - \Delta_1/2)$$

e

$$y(t) = B \operatorname{rect}_{\Delta_2}(t - \Delta_2/2)$$

essendo Δ_1 più piccolo di Δ_2 .



Convoluzione di due rettangoli



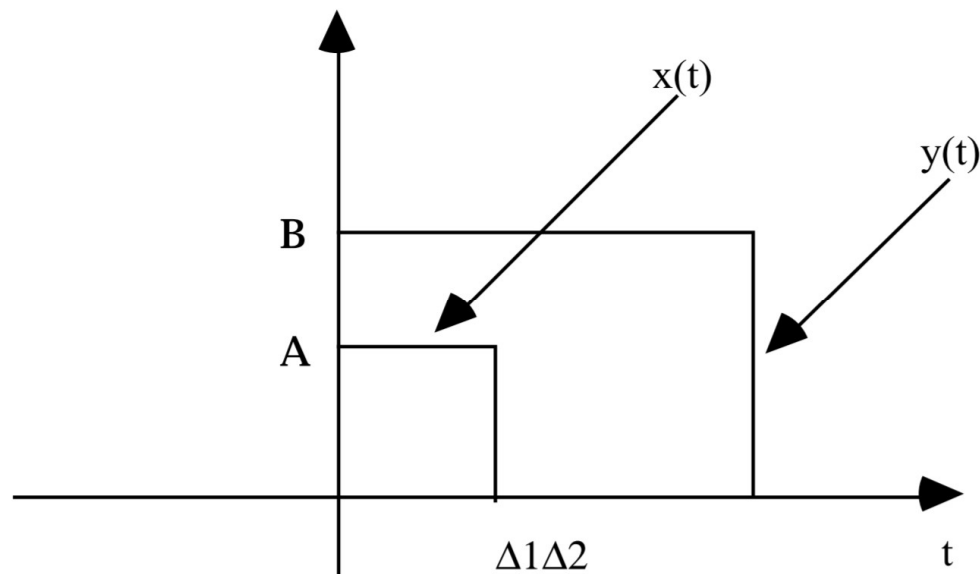
Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A \operatorname{rect}_{\Delta_1}(t - \Delta_1/2)$$

e

$$y(t) = B \operatorname{rect}_{\Delta_2}(t - \Delta_2/2)$$

essendo Δ_1 più piccolo di Δ_2 .





Convoluzione di due rettangoli



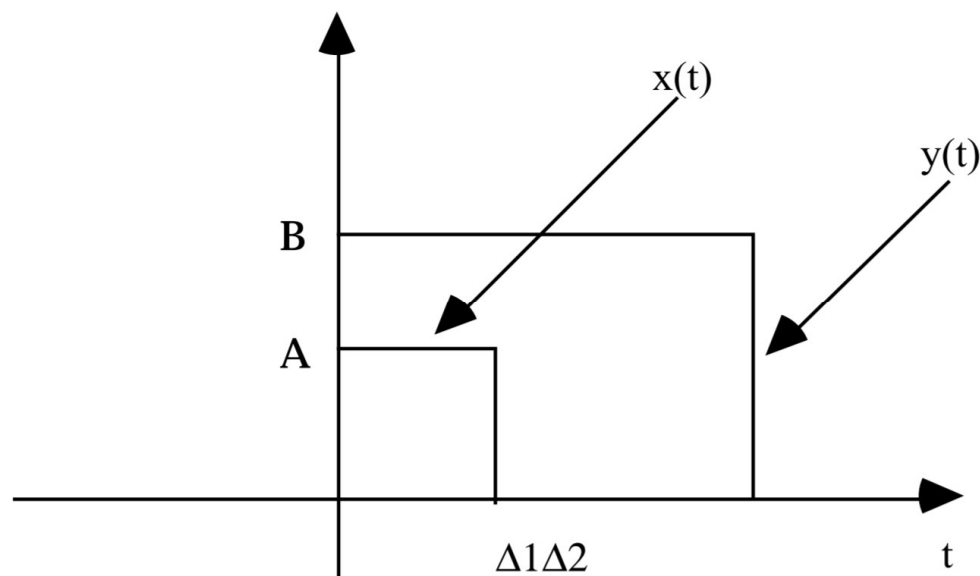
Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A \operatorname{rect}_{\Delta_1}(t - \Delta_1/2)$$

e

$$y(t) = B \operatorname{rect}_{\Delta_2}(t - \Delta_2/2)$$

essendo Δ_1 più piccolo di Δ_2 .

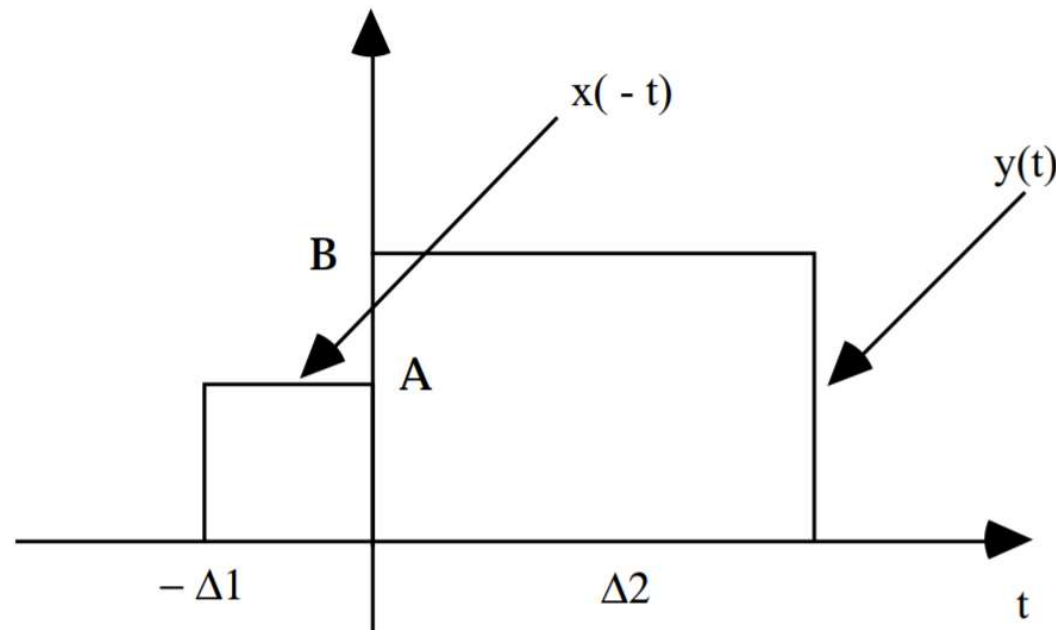




Convoluzione di due rettangoli



Come sopra riportato, la prima operazione da fare è quella di invertire l'asse di uno dei due segnali, ad esempio $x(t)$

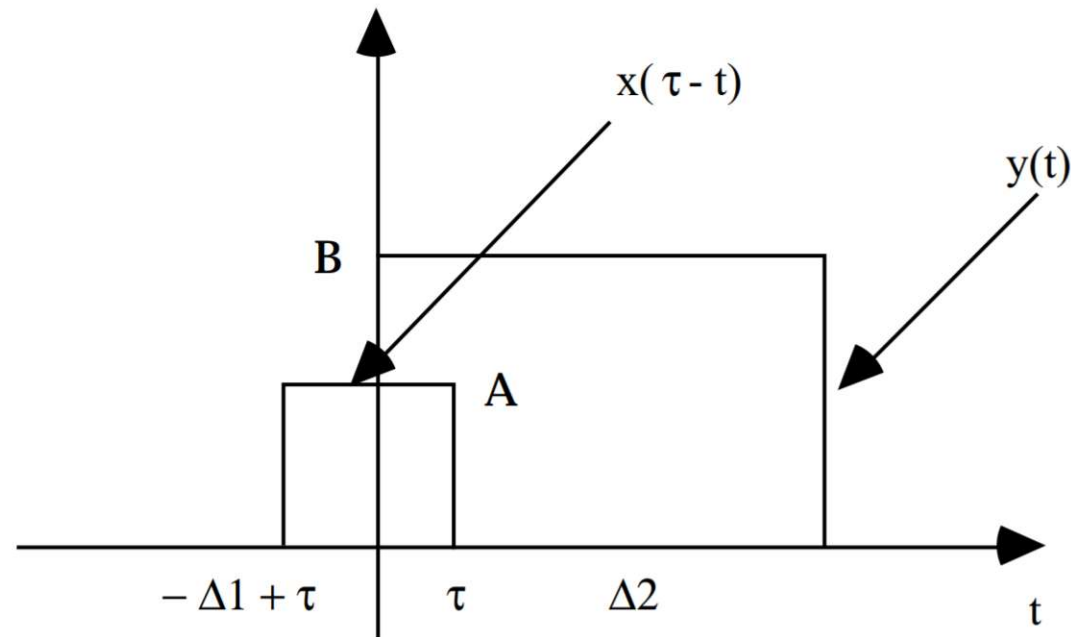




Convoluzione di due rettangoli



Successivamente si deve traslare $x(-t)$





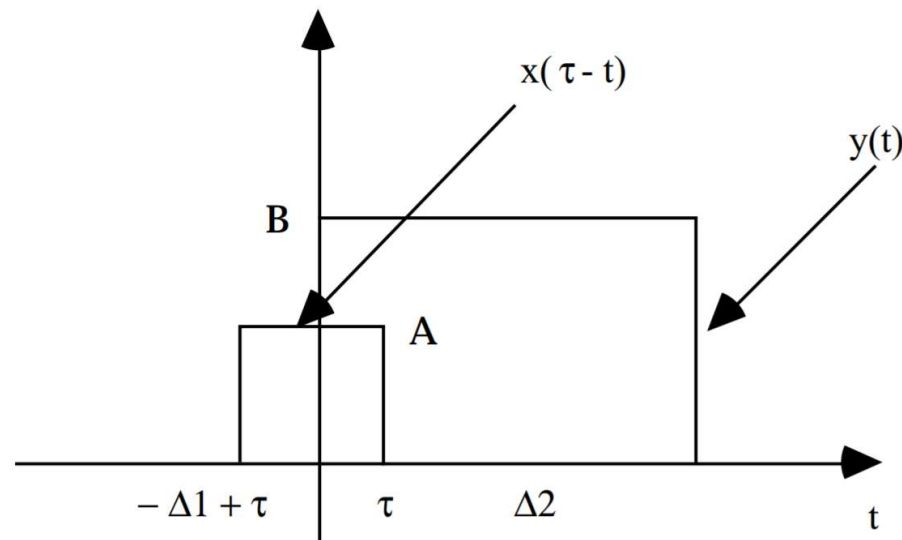
Convoluzione di due rettangoli



Gli estremi di integrazione dell'integrale di convoluzione saranno allora 0 e τ e pertanto si scriverà :

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} AB dt = AB\tau$$

La convoluzione cresce linearmente raggiungendo per $\tau = \Delta 1$ il valore $AB\Delta 1$.





Convoluzione di due rettangoli

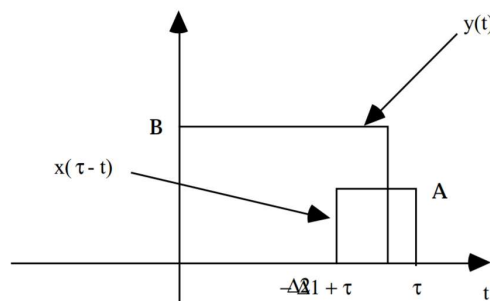


Per τ compreso tra $\Delta 1$ e $\Delta 2$ si può facilmente osservare come il valore della convoluzione rimanga costante; infatti, indipendentemente dal valore di τ , la durata della sovrapposizione dei due segnali rettangolari rimane $\Delta 1$ e pertanto il valore della convoluzione è $AB\Delta 1$.

Successivamente per traslazioni comprese tra $\Delta 2$ e $(\Delta 2 + \Delta 1)$

$$C_{xv}(\tau) = \int_{\tau - \Delta 1}^{\Delta 2} AB dt = AB(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)$$

Per valori di τ ancora maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla.





Convoluzione di due rettangoli



In definitiva si ha:

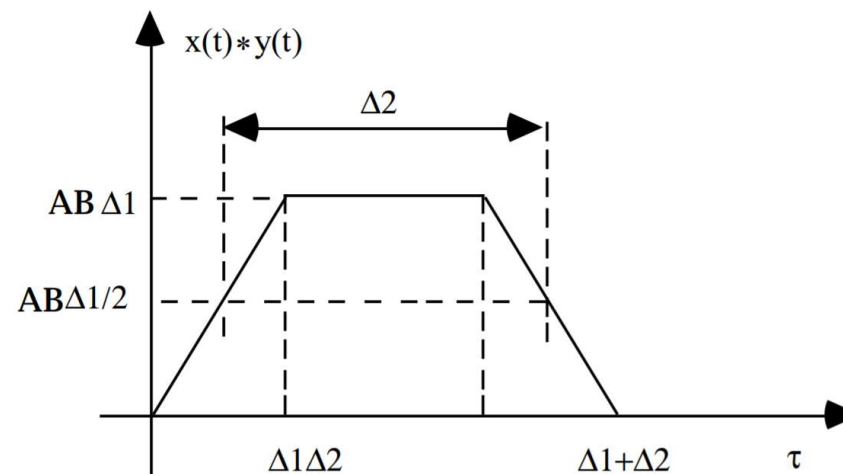
$$C_{xy}(\tau) = 0 \quad \text{per } \tau \leq 0 \text{ e per } \tau > (\Delta_1 + \Delta_2)$$

$$C_{xy}(\tau) = AB \tau \quad \text{per } 0 < \tau \leq \Delta_1$$

$$C_{xy}(\tau) = AB \Delta_1 \quad \text{per } \Delta_1 < \tau \leq \Delta_2$$

$$C_{xy}(\tau) = AB (\Delta_2 + \Delta_1 - \tau) \quad \text{per } \Delta_2 < \tau \leq (\Delta_1 + \Delta_2)$$

Si può osservare, e questo vale in generale, che l'intervallo di tempo in cui la convoluzione è diversa da 0 dura la somma degli intervalli in cui sono diversi da 0 i segnali convolti.





Esercizio (convoluzione di 2 segnali)



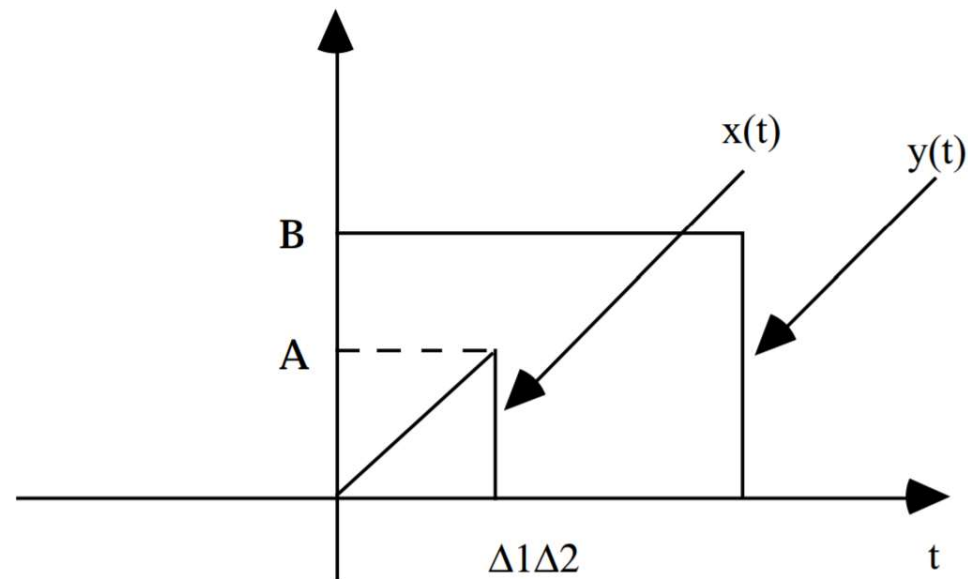
Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = (At / \Delta_1) \text{rect}_{\Delta_1}(t - \Delta_1/2)$$

e

$$y(t) = B \text{rect}_{\Delta_2}(t - \Delta_2/2)$$

essendo Δ_1 più piccolo di Δ_2 .

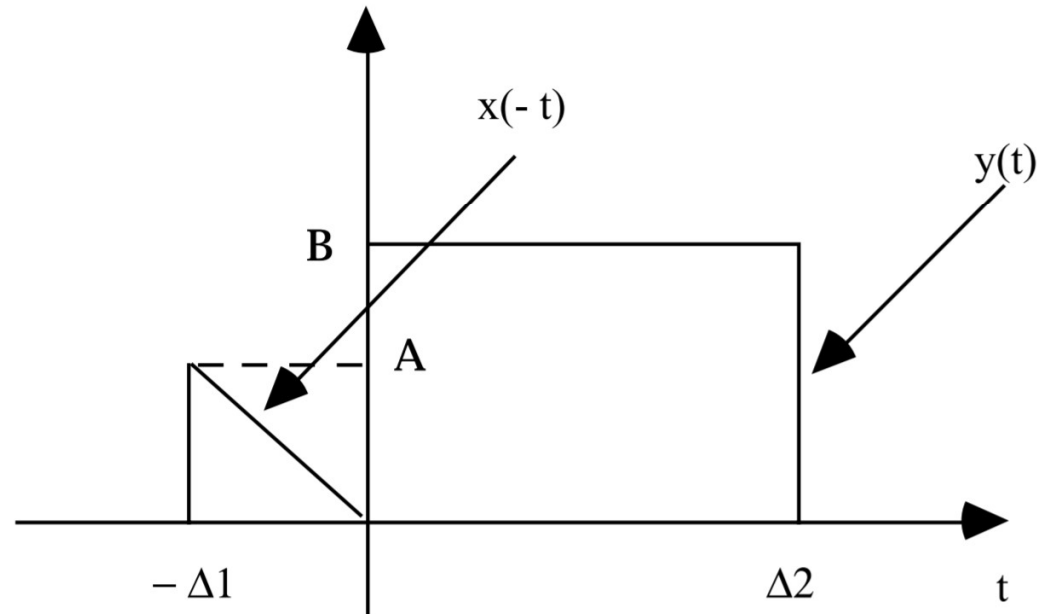




Esercizio (convoluzione di 2 segnali)

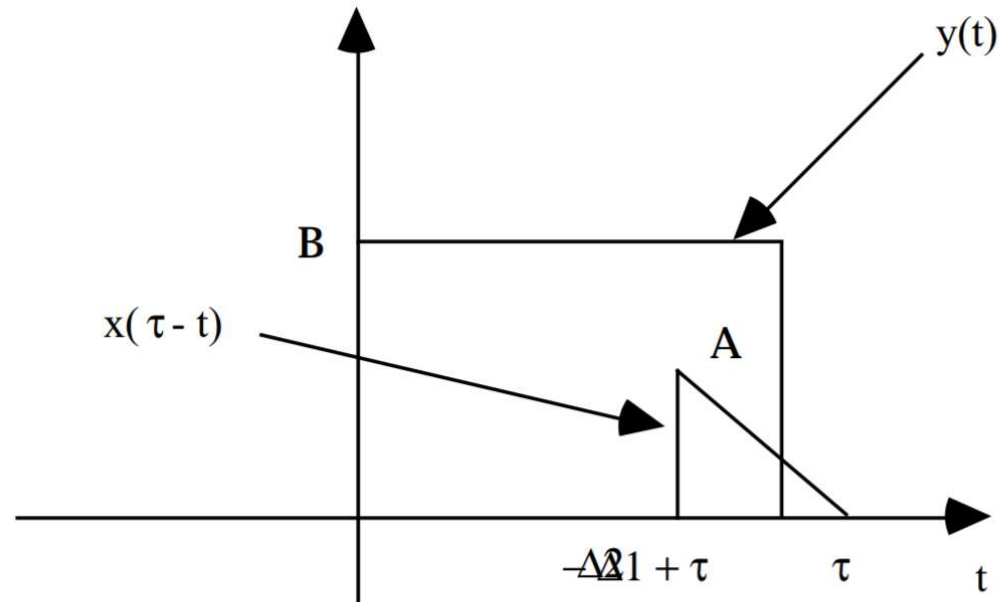


La prima operazione da fare è sempre quella di invertire l'asse di uno dei due segnali, anche in questo caso $x(t)$





Esercizio (convoluzione di 2 segnali)



Si può osservare che, in questo caso, il calcolo dell'integrale di convoluzione coincide con il calcolo dell'area del trapezio rettangolo di altezza $(\Delta_2 + \Delta_1 - \tau)$, base maggiore AB e base minore $AB(\tau - \Delta_2)/\Delta_1$ (per calcolare tale valore basta ricorrere alla similitudine dei triangoli).



Esercizio (convoluzione di 2 segnali)



Allora l'integrale di convoluzione vale:

$$C_{xy}(\tau) = AB(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)[(\tau - \Delta 2)/\Delta 1 + 1]/2 = AB[\Delta 1^2 - (\tau - \Delta 2)^2]/2\Delta 1$$

La convoluzione assume il valore $AB\Delta 1/2$ per $\tau = \Delta 2$ e vale 0 per $\tau = \Delta 1 + \Delta 2$.

Per valori di τ ancora maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla.

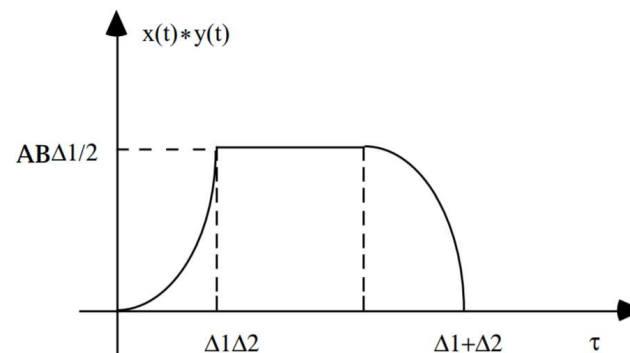
In definitiva si ha:

$$C_{xy}(\tau) = 0 \quad \text{per } \tau \leq 0 \text{ e per } \tau > (\Delta 1 + \Delta 2)$$

$$C_{xy}(\tau) = AB\tau^2/2\Delta 1 \quad \text{per } 0 < \tau \leq \Delta 1$$

$$C_{xy}(\tau) = AB \Delta 1/2 \quad \text{per } \Delta 1 < \tau \leq \Delta 2$$

$$C_{xy}(\tau) = AB[\Delta 1^2 - (\tau - \Delta 2)^2]/2\Delta 1 \quad \text{per } \Delta 2 < \tau \leq (\Delta 1 + \Delta 2)$$





Covarianza tra v.a.



- Covarianza: date due variabili aleatorie X e Y chiamiamo covarianza di X e Y la media dei prodotti dei loro scostamenti dalla media

$$\begin{aligned}\mu_{XY} &= E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] = \\ &= R_{XY} - \bar{x}\bar{y}\end{aligned}$$



Correlazione tra v.a.



- La correlazione tra due variabili aleatorie X e Y è il rapporto tra la loro covarianza e il prodotto delle loro deviazioni sta

$$R_{XY} = E[XY]$$

- Coefficiente di correlazione $r = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$



Esercizio



Su 4 famiglie di 2 componenti misuriamo il reddito di Febbraio X e le relative spese per l'alimentazione Y .

X: 1500 1700 1400 1600

Y: 200 350 150 300

Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione e interpretarli.



Esercizio



Su 4 famiglie di 2 componenti misuriamo il reddito di Febbraio X e le relative spese per l'alimentazione Y .

X: 1500 1700 1400 1600

Y: 200 350 150 300

Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione e interpretarli.

$$\text{media}(X) = 1550, \text{media}(Y) = 250, \text{var}(X) = 12500, \text{var}(Y) = 6250.$$



Esercizio



Su 4 famiglie di 2 componenti misuriamo il reddito di Febbraio X e le relative spese per l'alimentazione Y .

X: 1500 1700 1400 1600
Y: 200 350 150 300

Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione e interpretarli.

$$\text{media}(X) = 1550, \text{media}(Y) = 250, \text{var}(X) = 12500, \text{var}(Y) = 6250.$$

Poiché $\text{media}(XY) = (1500 \times 200 + 1700 \times 350 + 1400 \times 150 + 1600 \times 300)/4$ abbiamo
 $\text{cov}(X, Y) = \text{media}(XY) - \text{media}(X) \text{media}(Y) = 396250 - (1550)(250) = 8750.$



Esercizio



Su 4 famiglie di 2 componenti misuriamo il reddito di Febbraio X e le relative spese per l'alimentazione Y .

X: 1500 1700 1400 1600
Y: 200 350 150 300

Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione e interpretarli.

$$\text{media}(X) = 1550, \text{media}(Y) = 250, \text{var}(X) = 12500, \text{var}(Y) = 6250.$$

Poiché $\text{media}(XY) = (1500 \times 200 + 1700 \times 350 + 1400 \times 150 + 1600 \times 300)/4$ abbiamo

$$\text{cov}(X, Y) = \text{media}(XY) - \text{media}(X) \text{media}(Y) = 396250 - (1550)(250) = 8750.$$

$$\text{cor}(X, Y) = 8750 / \sqrt{(12500)(6250)} = 0.9899.$$



Esercizio



- $X=[1,2,3]$ equiprobabili
- $Y=[2,4,6]$ equiprobabili
- Calcolare il coefficiente di correlazione



Esercizio



- $X=[1,2,3]$ equiprobabili
- $Y=[2,4,6]$ equiprobabili
- Calcolare il coefficiente di correlazione

$$m_X = 2$$

$$m_Y = 4$$

$$\sigma_X^2 = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{8}{3}$$

$$X - m_X = \{-1,0,1\}$$

$$Y - m_Y = \{-2,0,2\}$$



Calcolo Q(x) per G(x,m,var)



$$Q(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

- Come calcolo la coda della gaussiana non normalizzata usando Q(k) ?

$$G(x, \mu, \sigma_x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \Rightarrow \quad CODA(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{(\lambda-m)^2}{2\sigma^2}} d\lambda$$

$$k = \frac{\lambda - m}{\sigma}, \quad dk = \frac{d\lambda}{\sigma}, \quad d\lambda = \sigma dk,$$

$$\lambda_0 = x \Rightarrow k_0 = \frac{x - m}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad CODA(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2}} \sigma dk$$

$$\Rightarrow \quad CODA(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2}} dk = Q(\lambda_0) = Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$



Conclusione



- Contare: permutare, disporre, combinare oggetti
- Definire gli eventi di un esperimento e determinare lo spazio delle probabilità
- Riconoscere eventi discreti e eventi continui e le corrispondenti rappresentazione (diagrammi degli insiemi, o eventi continui sull'asse reale)
- Distinguere eventi compatibili e incompatibili
- Distinguere eventi dipendenti e indipendenti e calcolare probabilità condizionate
- Partizionare lo spazio degli eventi per il calcolo della probabilità mediante il teorema della probabilità assoluta
- Uso del Teorema di Bayes



Conclusione



- Calcolo di probabilità per le prove ripetute (Bernoulli) e approssimazioni
- Definire il concetto di variabile aleatoria
- Uso delle variabili aleatorie, rappresentazione della densità di probabilità (PDF), distribuzione cumulativa (CDF)
- Definizioni di alcune PDF elementari: delta Dirac, rettangolo, triangolo, Gauss
- Calcolo della CDF dalla PDF e viceversa, funzione $\text{erf}()$, funzione $Q()$
- Trasformazione delle variabili aleatorie
- Esperimenti con due variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite (esempio: istante arrivo treni in stazione)
- Medie statistiche: media, varianza
- Diseguaglianza di Chebyshev



Esercizi



- Esercizio 1 (nota G è la funzione gaussiana)

$$x(t) = G(t)$$

$$h(t) = \delta(t - c)$$

$$x(t) * h(t) = G(t - c)$$

- Esercizio 2

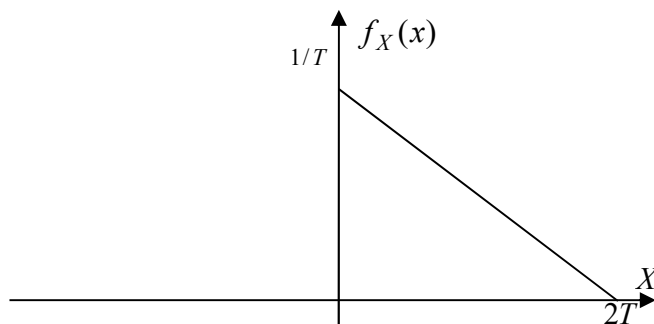
$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t - \frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}\right), \quad h(t) = \delta(t - c), \quad x(t) * h(t) = \Lambda\left(\frac{t - \frac{b}{2} - c}{\frac{b}{2}}\right)$$



Esercizio



- Esercizio: Calcolare $Z=|2X-Y|$, con X e Y , v.a. uniformemente distribuite in $[0,T]$.
- Soluzione:





Esercizio



- Dati:
 - AA, AB, BA, BB $\rightarrow P(AA)=P(BB)=1/8$
 - AA $\rightarrow X=0$, AB $\rightarrow X=1$, BA $\rightarrow X=2$, BB $\rightarrow X=3$
- Rappresentare graficamente la PDF di X,
- Rappresentare graficamente la PDF della v.a. $Y=X_1+X_2$ (dove X_1 e X_2 hanno PDF uguale a X)



Esercizio



Da una misura di resistenza risulta che il valore medio è **200** Ohm con varianza 100

- Determinare la probabilità che R si discosti dal valore medio più di **10** Ohm
- Ripetere il calcolo assumendo che R abbia una distribuzione gaussiana.



Esercizio



In un nodo di rete (p.e. un computer), il tempo di attesa di un pacchetto dati in ingresso prima che possa essere elaborato è una v.a. gaussiana $G(0,1)$. Se l'attesa è superiore a 5 minuti il pacchetto viene scartato.

- a) qual è la probabilità che il pacchetto sia scartato?
- b) Nel caso in cui arrivino 5 pacchetti qual è la probabilità che siano scartati 2 pacchetti?



Esercizio



Si pone un topo davanti a 4 labirinti. Il topo sceglie a caso un labirinto. Da esperienze precedenti si sa che la probabilità che il topo esca da ogni labirinto in 5 min sono, rispettivamente, 0.5, 0.8, 0.3, 0.4

- Sapendo che il topo è uscito in 5 min, calcolare la probabilità che abbia scelto il terzo labirinto



Esercizio (1/2)



Calcolare media e varianza della v.a. X nota la sua ddp:

$$f_x = k\Lambda\left(\frac{x-10}{4}\right)$$

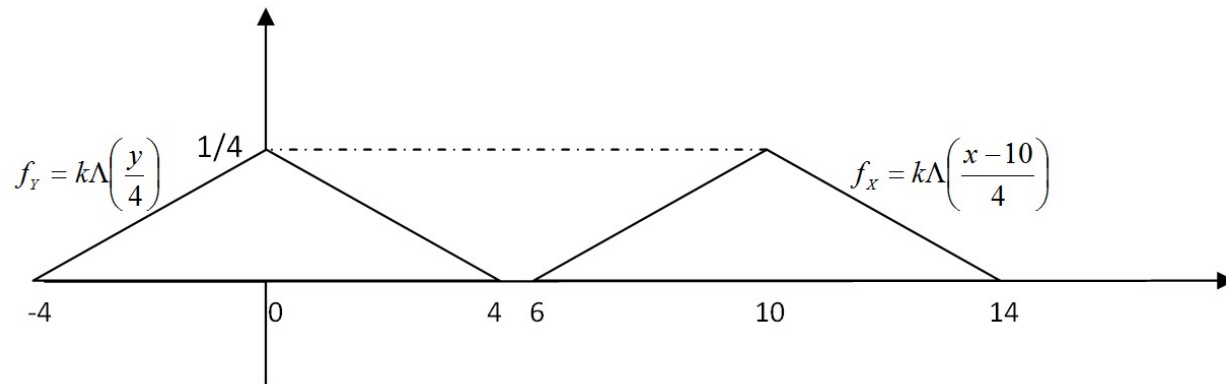
$$k = 1/4$$

$$\bar{x} = E[X] = 10$$

$$\sigma^2 = E[(X - \bar{x})^2]$$

$$Y = X - \bar{x}$$

$$f_Y(y) = f_x(x - \bar{x})$$



$$\sigma^2 = E[(X - \bar{x})^2] = E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_{-4}^4 y^2 f_Y(y) dy =$$

osserviamo che y^2 e $f_Y(y)$ sono due funzioni simmetriche

e il prodotto di due funzioni simmetriche è una funzione simmetrica

$$\sigma^2 = 2 \int_0^4 y^2 f_Y(y) dy = 2 \int_0^4 y^2 \left(-\frac{1}{16}y + \frac{1}{4} \right) dy = 2 \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$\sigma = 1.63$$