

Esercizi per il Corso di MATEMATICA DISCRETA

Foglio 4

18 ottobre 2019

1. Si calcoli la undicesima riga del triangolo di Pascal-Tartaglia.
2. Sia X un insieme con n elementi, dove n è dispari. Si ricordi che **l'insieme potenza** di un insieme X è l'insieme $P(X)$ di cui gli elementi sono gli sottoinsiemi di X .
 - (a) Se $X = \{a, b, c, d, e\}$, si determini il suo insieme potenza $P(X)$.
 - (b) Se $n = 9$, quanti sottoinsiemi con almeno 5 elementi ci sono?
 - (c) Si dimostri che il numero di sottoinsiemi con almeno $\frac{n+1}{2}$ elementi è 2^{n-1} .
3. In una certa lotteria ogni settimana si sorteggiano successivamente 5 palline da un insieme di 12 palline. Le palline sono verdi o rosse, e su ogni pallina si trova una cifra da 0 a 7. Le palline rosse hanno le cifre 0,1,2,3,4,5 e le palline verdi hanno le cifre 2,3,4,5,6,7.
 - (a) Ogni biglietto della lotteria ha un unico numero da 00000 a 77777 composto di 5 cifre, ognuna colorata in verde o rosso. Quanti biglietti ci sono in totale?
 - (b) Quanti biglietti ci sono con tutte le cifre verdi?
 - (c) Quanti biglietti ci sono con due cifre rosse e tre cifre verdi?
 - (d) Quanti biglietti ci sono contenenti solo le cifre 2, 3, 4 e 5?
4. In un certo sistema solare, esistono due civiltà di extraterrestri che hanno due lingue diverse basate sullo stesso alfabeto, con 10 lettere.
 - (a) La lingua della civilizzazione A soddisfa le seguenti proprietà:
 - Tutti gli abbinamenti di 2, 3, 4 o 5 lettere formano una parola, e tutte le parole hanno fra 2 e 5 lettere.
 - Le lettere si possono ripetere in una stessa parola;
 - Nelle parole con 2 lettere l'ordine delle lettere non cambia il significato della parola.
 - Nelle parole con 3, 4 o 5 lettere si deve tenere in conto l'ordine delle lettere.
 - (b) La lingua della civilizzazione B soddisfa le seguenti proprietà:
 - Tutti gli abbinamenti di 3, 4, 5 o 6 lettere formano una parola, e tutte le parole hanno fra 3 e 5 lettere.
 - Le lettere non si possono ripetere in una stessa parola se la parola ha 3 o 4 lettere. Invece, ripetizioni sono permesse per parole con 5 o 6 lettere.
 - Si deve sempre tenere in conto l'ordine delle lettere.

Si calcoli il numero di parole nel dizionario di ogni civilizzazione.

5. Attraverso il metodo di induzione, si dimostri che:
 - (a) per ogni $n \geq 1$, abbiamo che $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$;
 - (b) per ogni $n \geq 0$, abbiamo che $\sum_{k=0}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1$;
 - (c) per ogni $n \geq 1$, abbiamo che $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(d) per ogni $n \geq 1$, abbiamo che $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$;

(e) per ogni $n \geq 0$, il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi è 2^n .

6. Si sviluppi l'espressione $(x + y)^{11}$.

7. Si dimostri che l'insieme X di numeri interi pari è equipotente all'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi.

8. Si dimostri che l'insieme X di numeri dispari è equipotente all'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

9. Si dimostri che $\mathbb{N}$ e $P(\mathbb{N})$ non sono equipotenti.