

Appendice Serie e trasformata di Fourier

1 - Segnali periodici: sviluppo in serie di Fourier

Un segnale è periodico nel tempo quando si ripete ogni T secondi:

$$x(t) = x(t + iT) \tag{1.1}$$

L'indice $i = 1, 2, 3 \dots$ rappresenta la replica del segnale elementare, che si succede identica nel tempo ogni periodo di durata T . Si veda, come esempio, il segnale reale $x(t)$ in Fig.1.1.

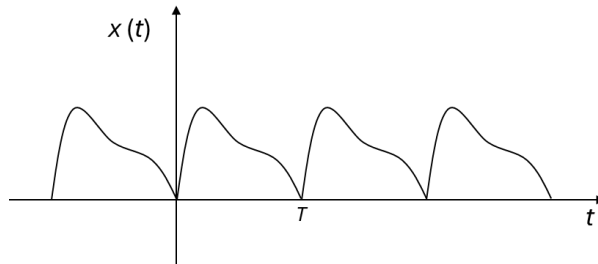


Fig.1.1 - Segnale periodico

Se T è il periodo, espresso in secondi [s], $f_0 = 1/T$ è la frequenza fondamentale, in hertz [Hz], e $\omega_0 = 2\pi f_0$ è la pulsazione fondamentale, che si esprime in radianti per secondo [rad/s].

Per i segnali periodici la rappresentazione più usata nel dominio della frequenza è costituita dalla scomposizione in serie di Fourier, mediante componenti armoniche a frequenze kf_0 , multiple della frequenza fondamentale f_0 :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{1.2}$$

I coefficienti X_k dello sviluppo in serie di Fourier possono essere determinati moltiplicando membro a membro l'Eq.1.2 per la funzione $e^{-j2\pi k' f_0 t}$ e mediando nel periodo T . Al secondo membro risulteranno pertanto termini del tipo $e^{j2\pi(k-k')f_0 t}$. Se k' è diverso da k , la media di una funzione sinusoidale in un tempo multiplo intero del suo periodo T è sempre nulla. Se, invece, $k' = k$, si otterrà un risultato diverso da zero.

Tenuto conto di questi fatti si ha:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_T x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_T x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

I coefficienti X_k dello sviluppo in serie di Fourier risultano quindi quantità complesse e possono essere espressi in coordinate cartesiane o polari:

$$X_k = Re[X_k] + j Im[X_k] = |X_k| \cdot e^{j\phi_k} \tag{1.4}$$

L'insieme di tali coefficienti, rappresentati in funzione delle frequenze discrete kf_0 o più semplicemente in funzione dell'ordine k della generica armonica, è lo spettro a righe del segnale periodico $x(t)$. Si veda in Fig.1.2, come esempio, la rappresentazione della parte reale e della parte immaginaria dei coefficienti X_k dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale.

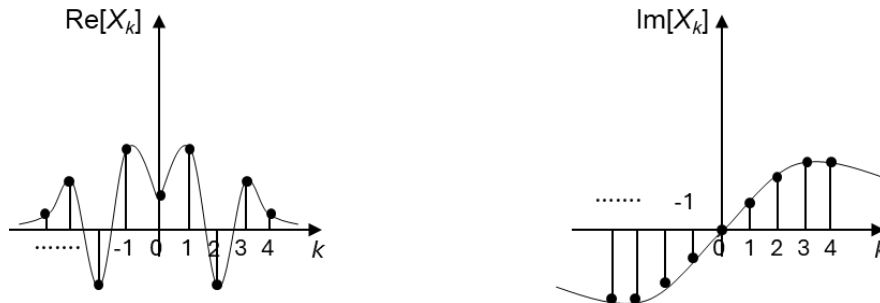


Fig.1.2 - Coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (parte reale e parte immaginaria).

Per un segnale reale, lo spettro di parte reale $Re[X_k]$ è una funzione pari della frequenza, mentre lo spettro di parte immaginaria $Im[X_k]$ è una funzione dispari.

Allo stesso modo, lo spettro del modulo $|X_k|$ presenta una simmetria pari, mentre quello della fase φ_k ha simmetria dispari.

Tali condizioni di simmetria si possono anche esprimere brevemente, introducendo la forma coniugata, indicata con l'asterisco (*), del numero complesso X_k :

$$X_{-k} = X_k^* \tag{1.5}$$

Tenendo conto delle caratteristiche di simmetria dello spettro bilatero, si ottengono sviluppi con funzioni trigonometriche che contengono solo indici k positivi:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{1.6}$$

e:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(2\pi k f_0 t) + B_k \sin(2\pi k f_0 t)] \tag{1.7}$$

dove

$$\begin{aligned} A_k &= 2 \operatorname{Re}[X_k] = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ B_k &= -2 \operatorname{Im}[X_k] = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

2 - Segnali aperiodici: trasformata di Fourier

Per i segnali aperiodici perde significato lo sviluppo in serie di Fourier, mancando il principale presupposto: la periodicità.

Tali segnali sono caratterizzati in frequenza tramite lo spettro $X(f)$, che può essere ricavato, sotto opportune condizioni di integrabilità, tramite la trasformata di Fourier $F[x(t)]$:

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{2.1}$$

Mediante l'antitrasformata $F^{-1}[X(f)]$ si ricostruisce viceversa il segnale nel tempo $x(t)$:

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (2.2)$$

Poiché la trasformata di Fourier è una funzione continua nel dominio della frequenza, esiste un'infinità di componenti in frequenza di ampiezza infinitesima $|X(f)|df$ e fase $\angle X(f)$, come illustrato a titolo di esempio in Fig.2.1.

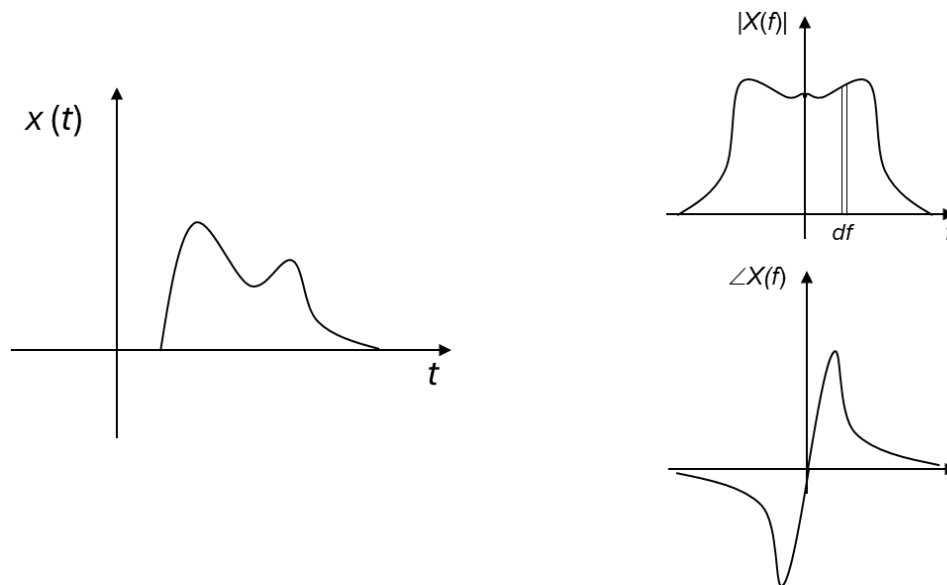


Fig.2.1 - Segnale aperiodico e suo spettro.

Proprietà della trasformata di Fourier

a) Linearità

La trasformata di Fourier della combinazione lineare di due segnali è uguale alla combinazione lineare delle trasformate di Fourier dei due segnali:

$$F[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1F[x_1(t)] + a_2F[x_2(t)] = a_1X_1(f) + a_2X_2(f) \quad (2.1)$$

b) Simmetria

La trasformata di Fourier di un segnale reale gode di simmetria complessa coniugata:

$$X(-f) = X^*(f) \quad (2.2)$$

La parte reale e il modulo sono pari, cioè simmetrici rispetto all'origine, mentre la parte immaginaria e la fase sono dispari, cioè antisimmetriche rispetto all'origine.

Si hanno i seguenti casi particolari:

- se il segnale $x(t)$ è a valori reali e pari, allora la trasformata $X(f)$ è a valori reali e pari;
- se il segnale $x(t)$ è a valori reali e dispari, allora la trasformata $X(f)$ è a valori immaginari puri e dispari.

c) Traslazione nella frequenza e modulazione

Traslare uno spettro *in frequenza* di una quantità f_0 fa perdere le caratteristiche di simmetria rispetto all'origine, con la conseguenza che il segnale nel tempo non è più reale. Infatti, posto $\beta = f - f_0$, si ha:

$$\begin{aligned}
 F^{-1}[X(f - f_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta) e^{j2\pi(\beta + f_0)t} d\beta = x(t) e^{j2\pi f_0 t}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

D'altra parte, traslando lo spettro originario della stessa quantità $\pm f_0$ sia a destra che a sinistra dell'origine, il segnale corrispondente (a causa della ripristinata simmetria in frequenza) risulta reale. Si ottiene infatti:

$$\begin{aligned}
 F^{-1}[X(f - f_0) + X(f + f_0)] &= x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t} = \\
 &= 2x(t) \cos(2\pi f_0 t)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Questa operazione corrisponde quindi a una **modulazione**, ossia a moltiplicare il segnale originario $x(t)$ nel tempo per un'oscillazione sinusoidale di frequenza f_0 .

d) Traslazione nel tempo

Traslare un segnale *nel tempo* di una quantità t_0 (ritardo) comporta una variazione della fase dello spettro. Infatti, posto $\tau = t - t_0$, si ha:

$$\begin{aligned}
 F[x(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau = X(f) e^{-j2\pi f t_0}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

e) Derivazione nel tempo

La trasformata di Fourier di un segnale derivato nel tempo è uguale a quella del segnale originale moltiplicata per $j2\pi f$:

$$F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j2\pi f F[x(t)] = j2\pi f X(f)
 \tag{2.6}$$

f) Dualità

Se la trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ è pari a $X(f)$, vale la seguente relazione duale:

$$F[X(-t)] = x(f)
 \tag{2.7}$$

Trasformate di Fourier di alcune funzioni elementari

a) Segnale rettangolare

Applicando la definizione di trasformata di Fourier al segnale rettangolare di Fig.2.2, con ampiezza A e durata T (area $Q=AT$), si ottiene la funzione seno cardinale (*sinc*), che si annulla per tutti i valori di frequenza pari a multipli interi di $1/T$, tranne nell'origine, dove ha valore unitario (Fig.2.3):

$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = AT \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = AT \cdot \text{sinc}(fT)
 \tag{2.8}$$

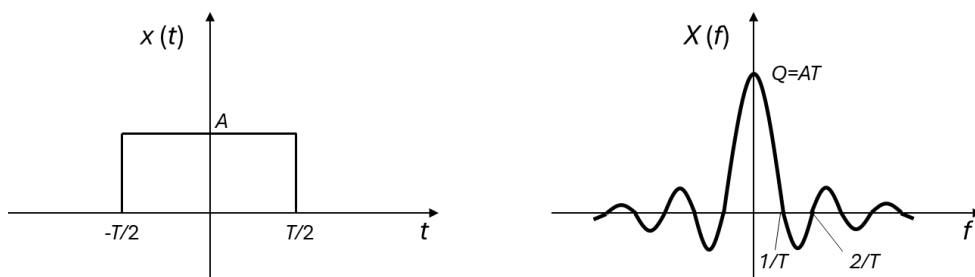


Fig.2.2 - Segnale rettangolare e suo spettro (funzione seno cardinale).

b) Impulso matematico

Lo spettro di un impulso matematico temporale di area unitaria ($Q=1$) si ottiene portando al limite ($T \rightarrow 0$) la durata dell'impulso rettangolare, mantenendone costante l'area (pertanto con ampiezza $A \rightarrow \infty$).

Portando al limite per $T \rightarrow 0$ gli andamenti di Fig.2.2, si vede che lo spettro si riduce a una costante per tutte le frequenze, con valore pari all'area unitaria ($Q=1$).

Lo spettro dell'impulso matematico ha quindi un'estensione infinitamente ampia:

$$F[\delta(t)] = 1 = \text{costante } \forall f \tag{2.9}$$

In modo duale, la trasformata di Fourier di una costante è un impulso matematico.

3 - Trasformata di Fourier di segnali periodici

Si è mostrato che per un segnale periodico esiste lo sviluppo in serie di Fourier (1.2), nel quale ciascun termine della serie è una costante X_k moltiplicata per un esponenziale.

Considerando che:

a) la trasformata di Fourier di una costante X_k è un impulso matematico:

$$F[X_k] = X_k \delta(f) \tag{3.1}$$

b) la presenza di un esponenziale si traduce in una traslazione in frequenza:

$$F[X_k e^{j2\pi k f_1 t}] = X_k \delta(f - k f_1) \tag{3.2}$$

si conclude che anche per i segnali periodici esiste la trasformata di Fourier, seppure in senso limite:

$$F[x(t)] = F\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_1 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_1) \tag{3.3}$$

Questa conclusione è interessante, in quanto consente di utilizzare le trasformate di Fourier, oltre che per i segnali aperiodici, anche per quelli periodici, consentendo di unificare il metodo di trattamento dei segnali nel dominio della frequenza, laddove ciò appaia conveniente.

A titolo di esempio, la trasformata di Fourier di un segnale sinusoidale di ampiezza A e frequenza f_0 (periodo $T_0=1/f_0$), è costituita da due impulsi di pari area ($A/2$) alle frequenze $\pm f_0$, come mostrato in Fig.3.1.

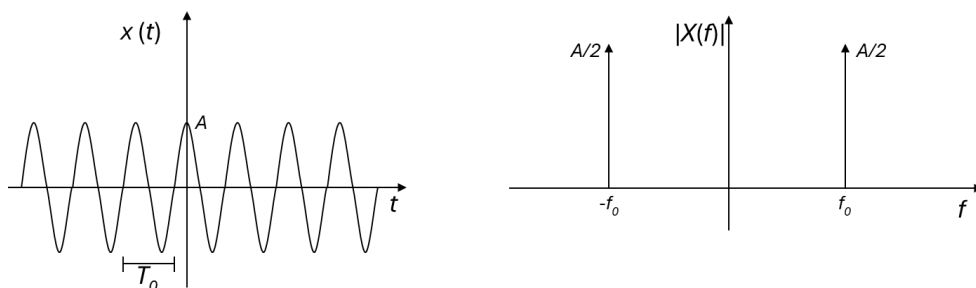


Fig.3.1 – Segnale sinusoidale e suo spettro (modulo).

Se si considera invece infine il treno di impulsi matematici $c(t)$, con periodo T_c e area unitaria, la sua trasformata di Fourier è rappresentata ancora da un treno di impulsi, distanziati tra loro di intervalli pari a $f_c = 1/T_c$, come rappresentato in Fig.3.2.

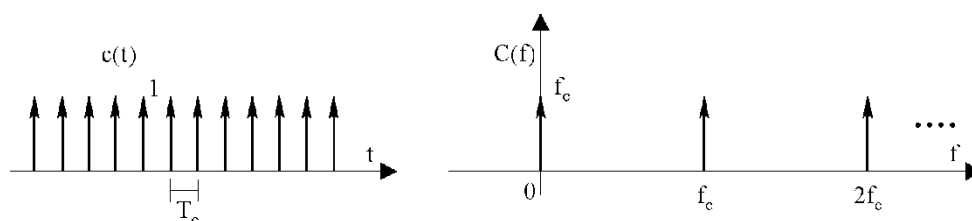


Fig.3.2 - Sequenza di impulsi matematici e relativa trasformata di Fourier.

4 - Trasformata e antitrasformata di Fourier del prodotto di due funzioni

Il prodotto (o integrale) di convoluzione tra due funzioni è l'integrale del prodotto della prima funzione per la seconda funzione rovesciata e traslata:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

Come caso particolare, eseguire la convoluzione di una funzione $x(t)$ con una funzione impulsiva $\delta(t - t_0)$ centrata in $t = t_0$ equivale a traslare di t_0 la funzione x :

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (4.2)$$

L'antitrasformata di Fourier del prodotto di due funzioni nel dominio della frequenza è pari alla convoluzione tra i rispettivi segnali nel dominio del tempo:

$$F^{-1}[X_1(f) \cdot X_2(f)] = F^{-1}[X_1(f)] * F^{-1}[X_2(f)] = x_1(t) * x_2(t) \quad (4.3)$$

La trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni nel dominio del tempo è pari alla convoluzione tra i rispettivi spettri:

$$F[x_1(t) \cdot x_2(t)] = F[x_1(t)] * F[x_2(t)] = X_1(f) * X_2(f) \quad (4.4)$$