ESERCIZI PROPOSTI

I) *Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine* (cfr. **¶ 3.**):

1) $y'-3y=0$ $\quad\left[y=ce^{3x}\right]$

2) $y'=2xy$ $\quad\left[y=ce^{x^2}\right]$

3) $y'=\dfrac{x-1}{x}y$ $\quad\left[y=\dfrac{ce^{x}}{x}\right]$

4) $y'=\dfrac{\cos x}{y}$ $\quad\left[y=ce^{\sin x}\right]$

5) $y'=-e^{x}y$ $\quad\left[y=ce^{-e^{x}}\right]$

6) $y'=\dfrac{\mathrm{tg}x}{y}$ $\quad\left[y=\dfrac{c}{\cos x}\right]$

7) $y'=\dfrac{xy}{x^2-1}$ $\quad\left[y=c\left|x^2-1\right|^{\frac{1}{2}}\right]$

8) $y'=(1+\log x)y$ $\quad\left[y=cx^{x}\right]$

9) $y'=\dfrac{y}{x\log x}$ $\quad\left[y=c\log x\right]$

10) $y'+4x^3y=0$ $\quad\left[y=ce^{-x^4}\right]$

11) $y'=\dfrac{y}{\sin(x+1)}$ $\quad\left[y=c\,\mathrm{ctg}\dfrac{x+1}{2}\right]$

12) $y'=xy\cdot\sin x$ $\quad\left[y=ce^{\sin x-x\cos x}\right]$

13) $y'=-\dfrac{\mathrm{ctg}x}{y}$ $\quad\left[y=\dfrac{c}{\sin x}\right]$

14) $y'=\dfrac{y}{\sqrt{x+5}}$ $\quad\left[y(x)=ce^{2\sqrt{x+5}}\right]$

15) $y'=3y+1$ $\quad\left[y(x)=ce^{3x}-\dfrac{1}{3}\right]$

16) $y'=y+x$ $\quad\left[y(x)=ce^{x}-x-1\right]$

17) $y'=-y+e^{-x}$ $\quad\left[y(x)=e^{-x}(x+c)\right]$

18) $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x}$ $\left[y(x)=1+\frac{c}{x}\right]$

19) $y'=\frac{y}{x}+xe^{x}$ $\left[y(x)=xe^{x}+cx\right]$

20) $y'=y+e^{x}$ $\left[y(x)=(c+x)e^{x}\right]$

21) $y'=4y-e^{2x}$ $\left[y(x)=ce^{4x}+\frac{1}{2}e^{2x}\right]$

22) $y'=-2xy+xe^{-x^{2}}$ $\left[y(x)=e^{-x^{2}}\left(c+\frac{1}{2}x^{2}\right)\right]$

23) $y'=-\frac{2}{x}y+\frac{x+1}{x}$ $\left[y(x)=cx^{2}-x-\frac{1}{2}\right]$

24) $y'=y+x^{2}-1$ $\left[y(x)=ce^{x}-(x+1)^{2}\right]$

25) $y'=e^{x}-\frac{y}{x}$ $\left[y(x)=\frac{c+(x-1)e^{x}}{x}\right]$

26) $y'=-2xy+e^{x^{2}}\cos x$ $\left[y(x)=e^{x^{2}}(\sin x+c)\right]$

27) $y'=-y+e^{-x}\cos x$ $\left[y(x)=e^{-x}(\sin x+c)\right]$

28) $y'=-\frac{y+e^{-x}}{x^{2}}$ $\left[y(x)=e^{-x}\left(c+\frac{1}{x}\right)\right]$

29) $y'+y=2xe^{-x}$ $\left[y(x)=e^{-x}\left(x^{2}+c\right)\right]$

30) $y'+y=3x^{2}e^{-x}$ $\left[y(x)=e^{-x}\left(x^{3}+c\right)\right]$

31) $y'+y=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$ $\left[y(x)=e^{-x}\left(\sqrt{x}+c\right)\right]$

32) $y'=-\frac{3}{x}y+x^{3}e^{x}$ $\left[y(x)=x^{3}\left(e^{x}+c\right)\right]$

33) $y'=-\frac{y+1}{\sqrt{x}}$ $\left[y(x)=ce^{2\sqrt{x}}-1\right]$

34) $y'=(y+1)\cos x$ $\left[y(x)=ce^{\sin x}-1\right]$

35) $y'+y-x^{3}=0$ $\left[y(x)=ce^{-x}+x^{3}-3x^{2}+6x-6\right]$

36) $\left(1+x^{2}\right)y'+xy-x\left(1+x^{2}\right)=0$ $\left[y(x)=\frac{1}{3}\left(1+x^{2}\right)+\frac{c}{\sqrt{1+x^{2}}}\right]$

37) $y'=\frac{y}{x}+x$ $\left[y(x)=x^{2}+cx\right]$

38) $y' = y\operatorname{tg}x + \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad \left[y(x) = \dfrac{x+c}{\cos x} \right]$

II) *Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti* (cfr. ¶ **4.**):

1) $6y'' - 5y' + y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \right]$

2) $y'' - 6y' + 9y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \right]$

3) $4y'' - 4y' + 5y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin x \right]$

4) $y'' - 3y' + 2y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \right]$

5) $y'' - 10y' + 21y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{7x} \right]$

6) $y'' - 2y' + y = 0$ $\qquad \left[y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{x} \right]$

7) $y'' - 10y' + 25y = 0$ $\qquad \left[y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{5x} \right]$

8) $y'' + y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \right]$

9) $y'' - 2y' + 5y = 0$ $\qquad \left[y(x) = e^{x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \right]$

10) $y'' + y' + y = 0$ $\qquad \left[y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right]$

11) $y'' - 4y' + 20y = 0$ $\qquad \left[y(x) = e^{2x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) \right]$

12) $y'' + 9y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \right]$

13) $y'' - \dfrac{1}{2} y' + \dfrac{1}{16} y = 0$ $\qquad \left[y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{1}{4}x} \right]$

14) $y'' + \sqrt{2}\, y' = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 + c_2 e^{-\sqrt{2}\, x} \right]$

15) $y'' + 4y = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \right]$

16) $y'' - 2\, y' = 0$ $\qquad \left[y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \right]$

17) $y'' + 2y' + 8y = 0$ $\qquad \left[y(x) = e^{-x} \left(c_1 \cos \sqrt{7}\, x + c_2 \sin \sqrt{7}\, x \right) \right]$

18) $y'' - 3y' + 2y = 4$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 2 \right]$

19) $y'' + 4y = 1$ $\qquad \left[y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4} \right]$

20) $6y'' - 5y' + y = x^2 + 1$ $\qquad \left[y(x) = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 10x + 39 \right]$

21) $y''+y=\sin 2x$ $\left[y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x\right]$

22) $y''+y=\sin x$ $\left[y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x\right]$

23) $y''-4y=\sin x-4\cos x$ $\left[y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right]$

24) $y''+16y=\sin 4x+2\cos 4x$ $\left[y(x)=\left(c_1+\frac{1}{4}\right)\sin 4x+\left(c_2-\frac{1}{8}\right)\cos 4x\right]$

25) $y''-6y'+8y=e^x$ $\left[y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}+\frac{1}{3}e^x\right]$

26) $y''-3y'+2y=4e^{2x}$ $\left[y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+4xe^{2x}\right]$

27) $4y''+y=x^2e^x$ $\left[y(x)=c_1\cos\frac{1}{2}x+c_2\sin\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{16}{25}x+\frac{88}{125}\right)e^x\right]$

28) $2y''-3y'+y=(x-5)e^{\frac{1}{2}x}$ $\left[y(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^x+\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)e^{\frac{1}{2}x}\right]$

29) $y''-2y=x-e^x$ $\left[y(x)=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2}x+e^x\right]$

30) $y''+y=\operatorname{tg}x$ $\left[y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\cdot\log\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{4}\right)\right|\right]$

31) $y''+y=\operatorname{ctg}x$ $\left[y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\cdot\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right]$

32) $y''-3y'+2y=2e^{2x}$ $\left[y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+2xe^{2x}-2e^{2x}\right]$

33) $y''+4y=5\sin 2x$ $\left[y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{5}{4}x\cos 2x\right]$

34) $y''+4y=5\sin 3x-7\cos 3x$ $\left[y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\sin 3x+\frac{7}{5}\cos 3x\right]$

35) $y''-3y'+2y=xe^{3x}$ $\left[y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^x+\frac{1}{2}xe^{3x}-\frac{3}{4}e^{3x}\right]$

36) $y''+2y'+y=\frac{\log x}{e^x}$ $\left[y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\log xe^{-x}-\frac{3}{4}x^2e^{-x}\right]$

37) $y''-3y'+2y=\frac{e^x}{e^x+1}$ $\left[y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+\left(e^x+e^{2x}\right)\log\left(1+e^{-x}\right)\right]$

38) $y''+y=x+1$ $\left[y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x+1\right]$

39) $y''-2y'+y=x^2+x$ $\left[y(x)=(c_1+c_2)e^x+x^2+5x+8\right]$

40) $y''-2y'+y=e^x$ $\left[y(x)=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\right]$

41) $y''-5y'+6y=e^x$ $\left[y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x\right]$

42) $y''-2y'-3y=(2x+1)e^x$ $\left[y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^x\right]$

43) $y''-y=xe^x$ $\left[y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^x+\frac{1}{4}(x^2-x)e^x\right]$

44) $y''-2y'+2y=e^{2x}$ $\left[y(x)=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}\right]$

45) $y''-y'-2y=2\sin x$ $\left[y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{5}(\cos x-3\sin x)\right]$

46) $y''+y=\cos x$ $\left[y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x\right]$

47) $y''+4y=\sin 2x$ $\left[y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x\right]$

48) $y''-2y'+2y=\sin x$ $\left[y(x)=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^x+\frac{1}{5}(2\cos x+\sin x)\right]$

49) $y''-2y'+y=e^{2x}$ $\left[y(x)=(c_1+c_2x)e^x+e^{2x}\right]$

50) $y''-4y'+4y=e^{2x}$ $\left[y(x)=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]$

51) $y''-y'=\cos x$ $\left[y(x)=c_1+c_2e^x-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]$

52) $y''+y'=\sin x+\cos x$ $\left[y(x)=c_1+c_2e^{-x}-\cos x\right]$

53) $y''-y=2x\sin x$ $\left[y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^x-x\sin x-\cos x\right]$

54) $y''-3y'+2y=2e^{3x}$ $\left[y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{3x}\right]$

55) $y''-y'=e^x(3\cos x+\sin x)$ $\left[y(x)=c_1+c_2e^{-x}+e^x\sin x\right]$

56) $y''+y'=5x+2e^x$ $\left[y(x)=c_1+c_2e^{-x}+\frac{5}{2}x^2-5x+e^x\right]$

57) $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ $\left[y(x)=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^x-\frac{1}{2}xe^x\cos x\right]$

58) $y''+9y=\sin x+e^{2x}$ $\left[y(x)=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{8}\sin x+\frac{1}{13}e^{2x}\right]$

59) $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$ $\left[y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{20}e^{2x}(\sin 2x+2\cos 2x)\right]$

60) $y''-y=xe^{-x}$ $\left[y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{4}\left(x^2+x\right)e^{-x}\right]$

61) $y''+2y'+3y=e^{-x}\cos x$ $\left[y(x)=\left(c_1\cos\sqrt{2}\,x+c_2\sin\sqrt{2}\,x\right)e^{-x}+\cos xe^{-x}\right]$

62) $y''+y=x\sin 2x$ $\left[y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x-\frac{1}{3}x\sin 2x-\frac{4}{9}\cos 2x\right]$

63) $y''-2y'+y=xe^{x}$ $\left[y(x)=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{1}{6}x^3e^{x}\right]$

64) $y''-2y'-3y=8e^{3x}$ $\left[y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+2xe^{3x}\right]$

65) $y''-4y'=x^2+1$ $\left[y(x)=c_1+c_2e^{4x}-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{32}\right]$

III) *Determinare l'integrale generale delle equazioni differenziali* **1)-20)**, *del primo ordine a variabili separabili, dopo aver analizzato gli esempi* ***a)-e)***, *di seguito riportati*:

a) $y'=x+1$

Ricordando che $y'=\frac{dy}{dx}$ l'equazione precedente può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\frac{dy}{dx}=x+1$$

da cui, separando le variabili, si ha:

$$dy=(x+1)\,dx$$

ed integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int dy=\int(x+1)dx \quad\Rightarrow\quad y(x)=\frac{x^2}{2}+x+c \qquad (\textbf{integrale generale})$$

Si osservi, in primo luogo, che le curve integrali, soluzioni dell'equazione differenziale assegnata, sono proprio delle parabole. Se si volesse ora determinare, tra le suddette parabole, quella che passa per il punto $P=(1,\,2)$ (**condizione iniziale**) si avrebbe:

$$2=y(1)=\frac{1^2}{2}+1+c \quad\Rightarrow\quad 2=\frac{1}{2}+1+c \quad\Rightarrow\quad 2=\frac{3}{2}+c \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{2}$$

La parabola richiesta ha pertanto equazione:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} \qquad (\textbf{integrale particolare})$$

ovvero:

$$y(x)=\frac{x^2+2x+1}{2}=\frac{(x+1)^2}{2}$$

b) $y'=\frac{x-1}{y+1}$ $\quad(y+1\neq 0)$

Essendo $y' = \frac{dy}{dx}$ l'equazione si può anche scrivere come segue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y+1}$$

da cui, separando le variabili, si ha:

$$(y+1)\,dy = (x-1)\,dx$$

ed integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int (y+1)dy = \int (x-1)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + y = \frac{x^2}{2} - x + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2+2y}{2} = \frac{x^2-2x}{2} + c$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - y^2 - 2y + c_1 = 0$

avendo posto $c_1 = 2c$.

Dunque per $c \neq 0$ le curve integrali sono delle iperboli mentre per $c = 0$ si ottiene la seguente coppia di rette:

$$x + y = 0 \qquad \text{e} \qquad x - y - 2 = 0$$

c) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

L'equazione differenziale diventa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

Separando ora le variabili si ha:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

ed integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + c \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + c)$$

da cui, utilizzando la formula di addizione della tangente:

$$y(x) = \frac{x + \operatorname{tg} c}{1 - x \operatorname{tg} c} \quad \text{con} \quad c \neq \frac{p}{2} + kp \text{ , } k \text{ intero} \quad (\textbf{integrale generale})$$

Si osservi ora che le curve integrali, per $c \neq 0$, sono delle iperboli; per $c = 0$, invece, si ha la retta $y = x$; per $c = \frac{p}{2} + kp$, infine, si ottiene l'iperbole $y = -\frac{1}{x}$.

d) $y' = \frac{y}{\sin x}$

L'equazione differenziale diventa:

$$\textbf{(*)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sin x}$$

Separando ora le variabili si ha:

$$\textbf{(**)} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sin x}$$

ed integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \log|y| = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c \quad \Rightarrow \quad \log\left|\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| = c$$

Se si pone ora $e^c = c_1$ si ricava:

$$\left|\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| = c_1 \quad \text{con} \quad c_1 > 0$$

da cui:

$$\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \pm c_1$$

ossia:

$$y = \pm c_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{con} \quad c_1 > 0$$

cioè:

$$y = c_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{con} \quad c_1 \neq 0 \quad (\textbf{integrale generale})$$

Si osservi ora che nel passaggio dalla **(*)** alla **(**)** si è diviso per y ma ciò, com'è ben noto, è lecito solo se $y \neq 0$. Con tale operazione, quindi, si è potuto perdere l'integrale $y = 0$. Essendo, però, $y = 0$ un integrale dell'equazione differenziale assegnata, si può concludere che l'integrale generale è proprio:

$$y = c_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

e) $\begin{cases} x - 4yy' = 0 \\ y(5) = 2 \end{cases}$

Il sistema assegnato si risolve determinando, in primo luogo, l'integrale generale dell'equazione differenziale e poi l'integrale particolare ottenuto imponendo la condizione iniziale $(x = 5 \ \Rightarrow \ y = 2)$.

Si ha, pertanto:

$$x = 4y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad 4ydy = xdx \quad \Rightarrow \quad \int 4ydy = \int xdx \quad \Rightarrow \quad 2y^2 = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$4y^2 - x^2 = c_1$$

avendo posto $c_1 = 2c$.

Per determinare ora l'integrale particolare basta imporre la condizione iniziale, cioè:

$$y(5)=2 \quad \Rightarrow \quad 4\cdot 2^2-5^2=c_1 \quad \Rightarrow \quad 16-25=c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1=-9$$

La soluzione del sistema risulta quindi:

$$x^2-4y^2=9 \qquad (\textbf{integrale particolare})$$

1) $1+3x^2y^2y'=0$ $\left[y=\sqrt[3]{\dfrac{1+cx}{x}}\right]$

2) $xy'-y=0$ $[y=cx]$

3) $\left(x^2+1\right)y'=2x$ $\left[y=\log\left(x^2+1\right)+c\right]$

4) $(2-x)y'=y+2$ $\left[y=\dfrac{c-2x}{x-2}\right]$

5) $\left(x^2+1\right)y'+xy^2=0$ $\left[y=\dfrac{2}{c+\log\left(x^2+1\right)}\right]$

6) $\mathrm{tg}y+xy'+y'=0$ $\left[y=\arcsin\dfrac{c}{x+1}\right]$

7) $y-xy+x^2y'=0$ $\left[y=cxe^{\frac{1}{x}}\right]$

8) $\mathrm{tg}y+y'\mathrm{tg}x=0$ $\left[y=\arcsin\dfrac{c}{\sin x}\right]$

9) $\sin x\cos^2 y+y'\cos^2 x=0$ $\left[y=\mathrm{arctg}\left(c-\sec x\right)\right]$

10) $ye^{2x}-y'-y'e^{2x}=0$ $\left[y=c\sqrt{1+e^{2x}}\right]$

11) $e^{x+y}+y'e^{x-y}=0$ $\left[y=-\dfrac{1}{2}\log\left(2x-c\right)\right]$

12) $y'+4x^3y=0$ $\left[y=ce^{-x^4}\right]$

13) $\left(1+x^2\right)y'+xy=0$ $\left[y\sqrt{1+x^2}=c\right]$

14) $y^2-(1-x)y'=0$ $\left[c\left(x-1\right)=e^{\frac{1}{y}}\right]$

15) $y'\left(1-x^2\right)+y^2-1=0$ $\left[y=\dfrac{x+c}{cx+1}\right]$

16) $3y^2y' - 2x = 0$ $\left[y = \sqrt[3]{x^2 + c} \right]$

17) $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$ $\left[y = \dfrac{c}{\cos x} \right]$

18) $y' = \dfrac{y \log y}{\sin x}$ $\left[y = e^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} \right]$

19) $y' = \dfrac{\left(1 - x^2\right)}{x \cdot y}$ $\left[y = \pm\sqrt{c - x^2 + 2\log x} \right]$

20) $y' = \dfrac{\left(y + y^3\right)}{x}$ $\left[y = 0;\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{c^2}{x^2} - 1}} \right]$

21) $\begin{cases} y - 2 + y' \operatorname{ctg} x = 0 \\ y(0) = 6 \end{cases}$ $\left[y = 4\cos x + 2 \right]$

22) $\begin{cases} y' = 4x^3\sqrt{1 - y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \sin x^4 \right]$

23) $\begin{cases} x^2y' + 4y - 2 = 0 \\ y(2) = \dfrac{p}{4} \end{cases}$ $\left[y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} \right]$

24) $\begin{cases} y' - 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = e^x \right]$

25) $\begin{cases} ye^x + y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = e^{1 - e^x} \right]$

26) $\begin{cases} y' \cos y = \sin y \\ y(0) = \dfrac{p}{2} \end{cases}$ $\left[y = \arcsin e^x \right]$

27) $\begin{cases} y' - 4y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $\left[y = 3e^{4x} \right]$