

Problema 1.

Sia S una superficie regolare priva di punti planari con curvatura media $H = 0$ e sia $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ l'applicazione di Gauss. Mostrare che vale la seguente identità:

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle = -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle$$

per tutti i $p \in S$ e tutti i $w_1, w_2 \in T_p S$ dove K è la curvatura di Gauss.

Problema 2.

Il gradiente di una funzione differenziabile $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione differenziabile $\text{grad } f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ che assegna a ciascun punto $p \in S$ un vettore $\text{grad } f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ tale che

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df_p(v), \quad \forall v \in T_p S$$

- (a) Se E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale in una parametrizzazione $X : U \rightarrow S$, mostrare che $\text{grad } f$ su $X(U)$ è dato da

$$\text{grad } f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} X_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} X_v.$$

Problema 3.

Si consideri la superficie S parametrizzata da

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\xi(u), \quad (u, v) \in U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

con

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0) \quad \xi(u) = (-\sin u, \cos u, 1)$$

- (a) Calcolare la curvatura gaussiana K in ciascun punto, e stabilire la natura dei suoi punti (ellittici, iperbolici o parabolici).
- (b) Determinare la curvatura media H e dire in quali punti vale 0.
- (c) Determinare, come combinazione di X_u e X_v , le direzioni asintotiche di S nei punti della curva α .

Problema 1.

Data la parametrizzazione

$$\alpha(t) = (\cos^2(t) - 1/2, \cos(t) \sin(t), \sin(t)), \quad t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

- Dimostrare che la traccia di α rappresenta l'intersezione tra: il cilindro circolare retto con asse l'asse z e raggio $1/2$; la sfera di raggio 1 e centro in $(-1/2, 0, 0)$.
- Dire se $\alpha : I \rightarrow \alpha(I)$ è un omeomorfismo.
- Calcolare la curvatura k di α e dire se ci sono punti in cui $k = 0$.

Problema 2.

Si consideri la superficie parametrizzata S

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\xi(u), \quad (u, v) \in U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

con

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0) \quad \xi(u) = (-\sin u, \cos u, 1)$$

- Calcolare la curvatura gaussiana K in ciascun punto, e stabilire la natura dei suoi punti (ellittici, iperbolici o parabolici).
- Determinare i punti dove il valore assoluto di K assume valore massimo; in tali punti, calcolare le direzioni principali.
- Verificare che il punto $p = (-1, -1, 1)$ appartiene a $X(U)$ e stabilire in p , se esistono, le direzioni asintotiche.

Problema 3.

Si consideri la superficie S ottenuta ruotando la curva $(4v - v^2, 0, v)$ attorno all'asse z (si assuma $v \in (0, 4)$).

- Parametrizzare S e disegnare un grafico approssimativo della superficie di rotazione.
- Si consideri il parallelo $P_c: z = c$, dove $c > 0$ è costante. Determinare gli eventuali valori di c per i quali P_c è una geodetica di S .
- Sia α la geodetica uscente da $p \in P_1$, (dove P_c è definito nel punto (b)) diretta nel verso delle z crescenti, che forma con il parallelo P_1 un angolo $\theta_0 = \pi/3$. Calcolare la quota massima raggiunta da α .

Problema 1.

Sia $\alpha : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, una curva piana, parametrizzata con l'ascissa curvilinea. L'evolvente di α uscente dal punto $\alpha(c)$, $c \in (a, b)$, è definita come:

$$\beta(t) = \alpha(t) + (c - t)\alpha'(t)$$

Calcolare (utilizzando le formule di Frenet) la curvatura con segno di β .

Problema 2.

Data la parametrizzazione del nastro di Möbius $X : (0, 2\pi) \times (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$X(u, v) = \left(\cos u \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right), \sin u \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right), v \sin \frac{u}{2} \right).$$

- (a) Dimostrare che l'intersezione di $X(u, v)$ con la sfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è data da

$$v \left(v + 2 \cos \frac{u}{2} \right) = 0$$

- (b) Dimostrare, utilizzando il punto precedente, che l'intersezione è costituita dall'equatore unione con la curva parametrizzata da:

$$\alpha(u) = (-\cos^2 u, -\sin u \cos u, -\sin u).$$

- (c) Calcolare la curvatura k di α e dire se ci sono punti in cui $k = 0$.

Problema 3.

Si consideri l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(z + 4) = 3xy + c\}$$

Dire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ l'insieme S definisce una superficie regolare.

Problema 4.

Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, regolare, con curvatura diversa da zero per ogni $s \in (a, b)$. Si consideri la superficie S parametrizzata da

$$X(s, v) = \alpha(s) + vB(s), \quad s \in (a, b), \quad v \in (-\epsilon, \epsilon)$$

- (a) Calcolare la curvatura di Gauss e la curvatura media di S .
 (b) Calcolare la curvatura geodetica di α vista come curva di S .

Problema 1.

Data la curva

$$\gamma(t) = (\cos t \sin t, \sin^2 t, t)$$

- (a) calcolare curvatura e torsione;
- (b) dire se esiste, motivando la risposta, una curva conosciuta congruente (cioè che differisce per un movimento rigido di \mathbb{R}^3) con la curva $\gamma(t)$.

Problema 2.

Sia

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u, v) \in U = (0, 1) \times (0, 2\pi)$$

la parametrizzazione dell'elicoide. Determine la curvatura geodetica k_g e la curvatura normale k_n lungo l'elica $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, t)$, $a > 0$, vista come curva su $X(U)$.

Problema 3.

Sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita da $f(p) = |p - p_0|^2$, dove $p_0 \notin S$ è un punto di \mathbb{R}^3 . Mostrare che $df_p(w) = 2\langle w, (p - p_0) \rangle$, $w \in T_p S$.

Problema 4.

Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, regolare, con curvatura $k(s)$ diversa da zero per ogni $s \in (a, b)$ e torsione τ costante. Si consideri la superficie S parametrizzata da

$$X(s, v) = \alpha(s) + vB(s), \quad s \in (a, b), \quad v \in (-\epsilon, \epsilon)$$

dove $B(s)$ è il campo di vettori unitario binormale lungo $\alpha(s)$.

- (a) Calcolare la curvatura di Gauss e la curvatura media di S .
- (b) Calcolare le curvature principali lungo i punti di $\alpha(s)$.

Problema 1.

Si considerino le curve parametrizzate

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(s) = (1 + s, s^2, s^3), \quad s \in \mathbb{R}, s \geq 0$$

- (a) Determinare gli eventuali punti di intersezione.
- (b) Calcolare la curvatura e la torsione delle due curve nei punti di intersezione.

Problema 2.

Si consideri l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(z + 4) = 3xy + c\}$$

Dire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ l'insieme S definisce una superficie regolare.

Problema 3.

Data la superficie parametrizzata

$$X(u, v) = ((\sin u + 2) \cos v, (\sin u + 2) \sin v, u), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$$

- (a) Abbozzare il grafico della superficie.
- (b) Determinare quali curve coordinate $u = \text{costante}$ sono delle geodetiche.

Problema 4.

Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea, regolare, con curvatura $k(s)$ diversa da zero per ogni $s \in (a, b)$. Si consideri la superficie S parametrizzata da

$$X(s, v) = \alpha(s) + vN_\alpha(s), \quad s \in (a, b), v \in (-\epsilon, \epsilon)$$

dove $N_\alpha(s)$ è il campo di vettori unitario normale lungo $\alpha(s)$.

- (a) Calcolare la curvatura gaussiana K di S in funzione della curvatura e dalla torsione di α .
- (b) Calcolare la curvatura geodetica di α vista come curva di S .