

Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso Integrato di Scienza e Tecnica delle Costruzioni

Modulo di **Tecnica delle Costruzioni** (8 CFU)

A.A. 2025-2026

2° semestre

Docente: Marco Zucca

**STATI LIMITE ULTIMI  
PRESSO E TENSO FLESSIONE**



**POLITECNICO**

MILANO 1863

Scuola Master Fratelli Pesenti



Università degli Studi di Cagliari

**DICAAR**

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E ARCHITETTURA

# **STATI LIMITE ULTIMI PRESSO E TENSO FLESSIONE**

**Obiettivo: verificare e progettare una sezione in calcestruzzo armato sollecitata a momento flettente ed azione normale**

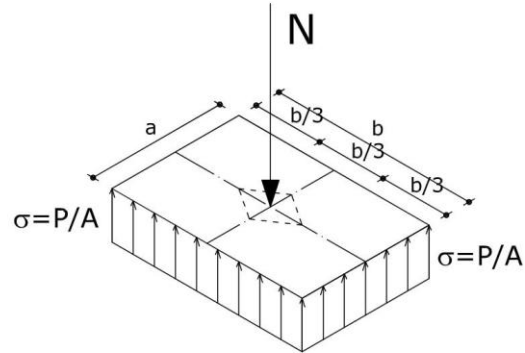
## **Strumenti:**

- Norme Tecniche per le costruzioni D.M. 17.01.2018, G.U. n. 42 del 20.02.2018  
Circolare Ministeriale del 21.01.2019, G.U. n. 5 del 11.02.2019**

# Presso e tenso-flessione

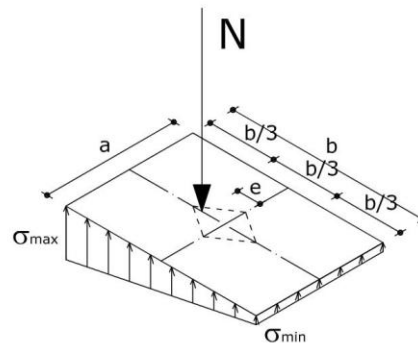
➤ **Compressione centrata**

$$e=0$$



➤ **Piccola eccentricità**

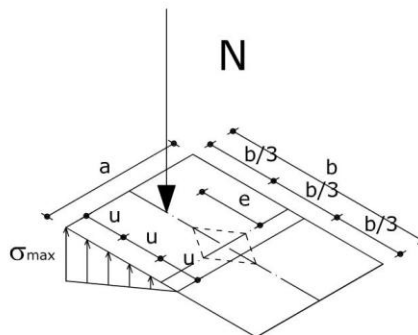
$$e \leq b/6$$



$$e = \frac{M_{Sd}}{N_{Sd}}$$

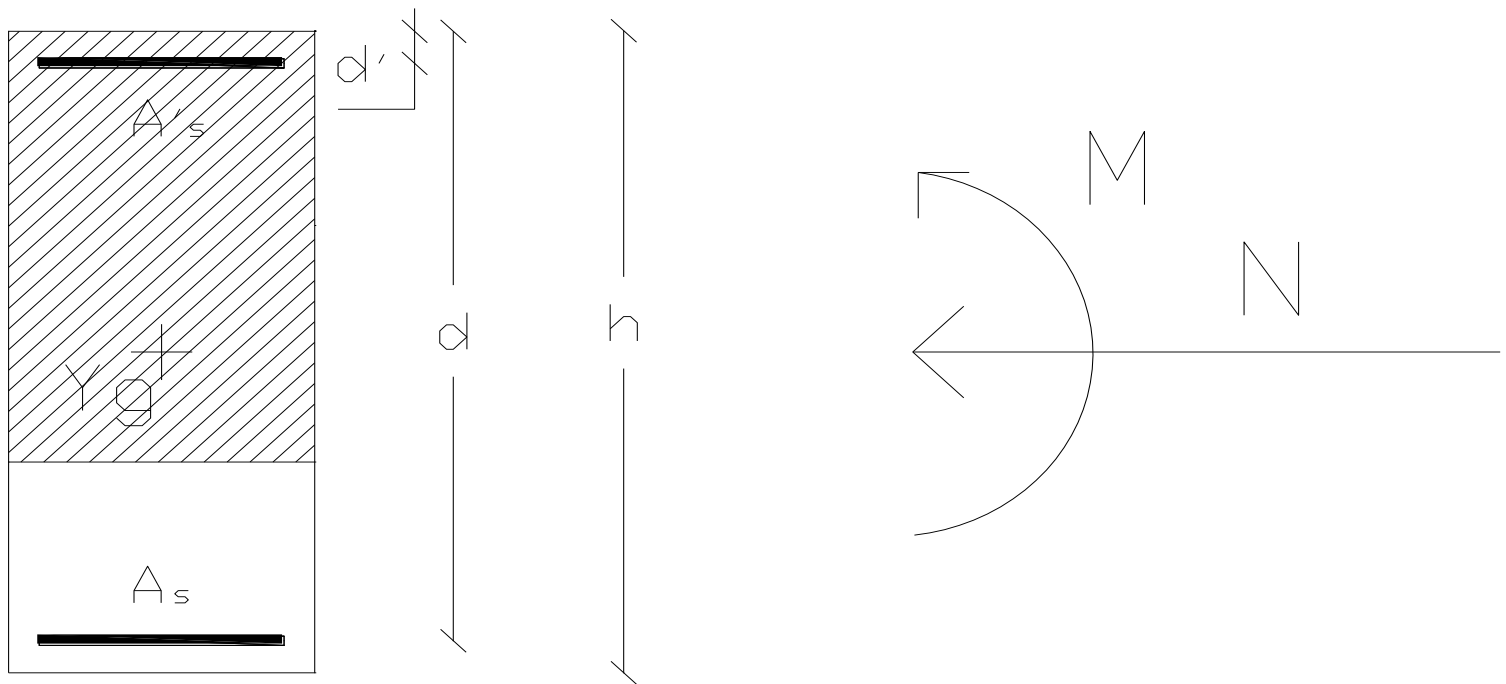
➤ **Grande eccentricità**

$$b/6 \leq e$$



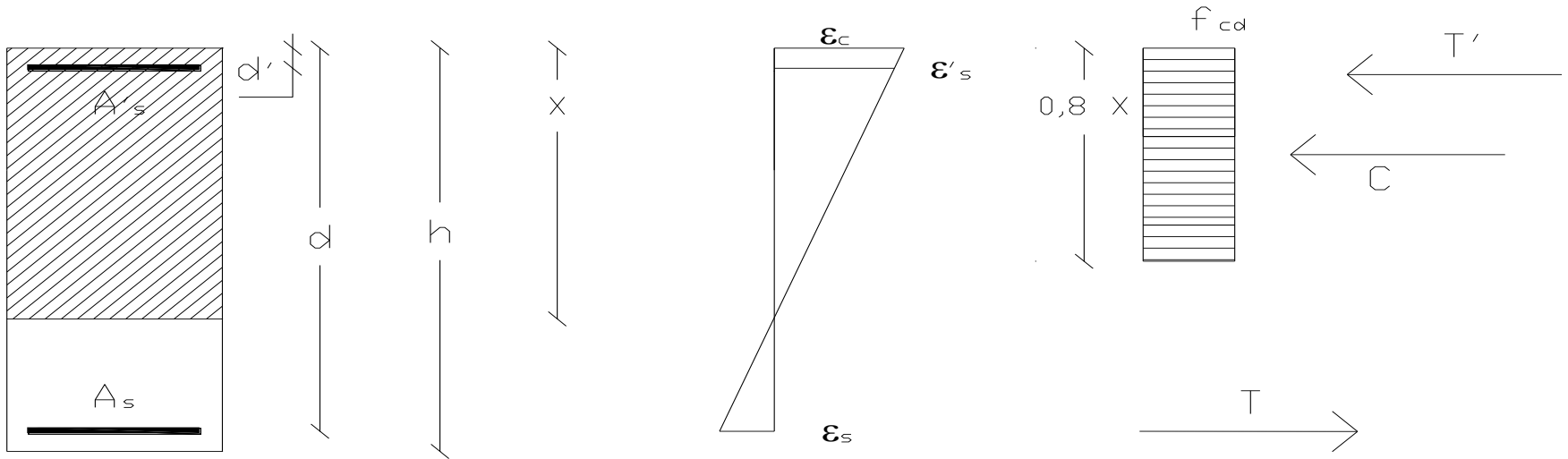
# Presso e tenso-flessione

**GRANDE ECCENTRICITA'**



# Presso e tenso-flessione

## GRANDE ECCENTRICITA'



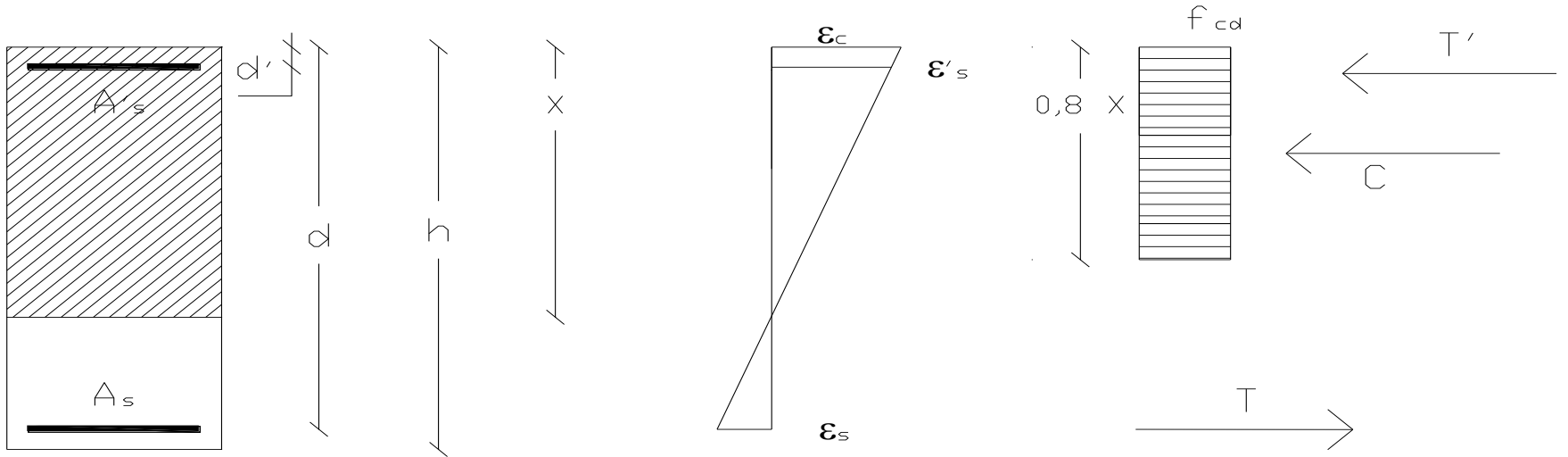
Equilibrio alla traslazione:

$$-\int_{A_c} \sigma_c \cdot dA_c - \sigma_s' \cdot A_s' + \sigma_s \cdot A_s = N_{sd}$$

**L'azione  $N_{sd}$  è negativa se di compressione**

# Presso e tenso-flessione

## GRANDE ECCENTRICITA'



Equilibrio alla rotazione rispetto all'asse baricentrico della sezione di solo calcestruzzo:

$$\int_{A_c} \sigma_c \cdot y_G \cdot dA_c + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot \left( \frac{h}{2} - d' \right) + \sigma_s \cdot A_s \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) = M_{Rd}$$

# Presso e tenso-flessione

## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

Dati:

- $M_{Sd}$ ,  $N_{Sd}$
- base, altezza,  $A_s$ ,  $A'_s$ , posizione delle armature
- classe del calcestruzzo e acciaio

**VERIFICA:**

$$M_{Sd} \leq M_{Rd}(N_{Sd})$$

Procedura:

1. **Determinazione posizione asse neutro:** Si ipotizza una posizione dell'asse neutro e si determina lo stato di deformazione delle armature in zona tesa e compressa, sapendo che il collasso avviene per raggiungimento della deformazione ultima nel lembo compresso di calcestruzzo.

$$\varepsilon'_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (x - d') \quad \varepsilon_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (d - x)$$

# Presso e tenso-flessione

## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

Si valutano le tensioni nelle armature tese e compresse:

$$\text{se } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$$

$$\text{se } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = f_{yd}$$

$$\text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

$$\text{se } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = f_{yd}$$

Si verifica l'equilibrio alla traslazione:

$$N_{Sd} = -f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s$$

# Presso e tenso-flessione

## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

Si verifica l'equilibrio alla traslazione:

$$N_{Sd} = -f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s$$

- Se  $N_{Rd} = N_{Sd}$  la posizione dell'asse neutro è corretta
- Se  $N_{Rd} < N_{Sd}$  occorre ridurre  $x$  e quindi sollevare l'asse neutro
- Se  $N_{Rd} > N_{Sd}$  occorre aumentare  $x$  e quindi abbassare l'asse neutro

**2. Si determina  $M_{Rd}$ :**

$$M_{Rd} = f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot \left( \frac{h}{2} - 0.4 \cdot x \right) + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot \left( \frac{h}{2} - d' \right) + \sigma_s \cdot A_s \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right)$$

**3. Controllo:**

$$M_{Rd} (N_{Sd}) \geq M_{Sd}$$

# Presso e tenso-flessione

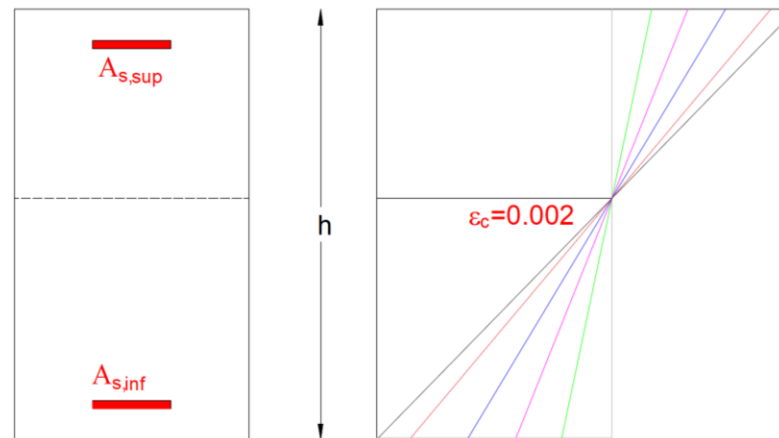
## PICCOLA ECCENTRICITA'

La sezione è tutta compressa, l'asse neutro  $x$  è esterno alla sezione e può assumere valori:

$$h \leq x \leq +\infty$$

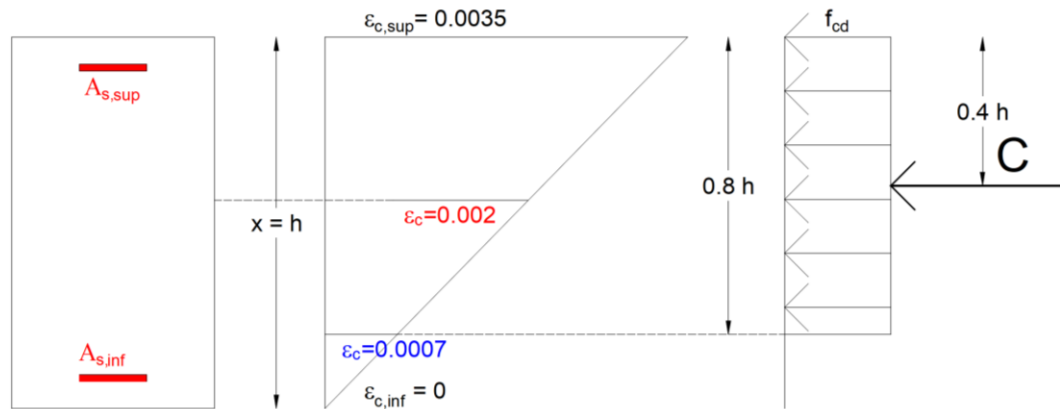
Lo stato di deformazione è comandato dalla deformazione  $\varepsilon_c = 0.002$  nella corda distante  $3/7 h$  dal lembo più compresso.

La sezione si mantiene piana e ruota intorno a questa corda.

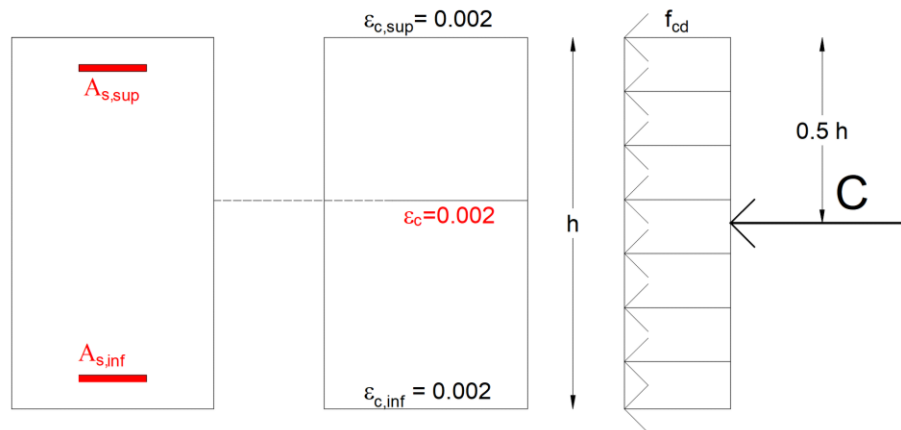


# Presso e tenso-flessione

## PICCOLA ECCENTRICITA'



$x = h$



$x = \infty$



# Presso e tenso-flessione

## PICCOLA ECCENTRICITA'

Procedura:

1. **Determinazione posizione asse neutro  $x \geq h$ :** si ipotizza una posizione dell'asse neutro e si determina lo stato di deformazione delle armature inferiori e superiori che sono entrambe compresse e del calcestruzzo nei due lembi, sapendo che il collasso avviene per raggiungimento della deformazione 0.002 nella corda distante dal lembo più compresso di calcestruzzo  $3/7 h$ .

$$\varepsilon_{s,sup} = 0.002 \cdot \frac{x - d'}{x - \frac{3}{7}h} \quad \varepsilon_{c,sup} = 0.002 \cdot \frac{x}{x - \frac{3}{7}h}$$

$$\varepsilon_{s,inf} = 0.002 \cdot \frac{x - d}{x - \frac{3}{7}h} \quad \varepsilon_{c,inf} = 0.002 \cdot \frac{x - h}{x - \frac{3}{7}h}$$

# Presso e tenso-flessione

## PICCOLA ECCENTRICITA'

Si valutano le tensioni nelle armature inferiori e superiori, che sono entrambe compresse:

$$se \ \varepsilon_{s,sup} \leq \varepsilon_{yd}$$

$$se \ \varepsilon_{s,sup} > \varepsilon_{yd}$$

$$se \ \varepsilon_{s,inf} \leq \varepsilon_{yd}$$

$$se \ \varepsilon_{s,inf} > \varepsilon_{yd}$$

$$\sigma_{s,sup} = E_s \cdot \varepsilon_{s,sup}$$

$$\sigma_{s,sup} = f_{yd}$$

$$\sigma_{s,inf} = E_s \cdot \varepsilon_{s,inf}$$

$$\sigma_{s,inf} = f_{yd}$$

# Presso e tenso-flessione

## PICCOLA ECCENTRICITA'

Si verifica l'equilibrio alla traslazione:

$$N_{Rd} = -f_{cd} \cdot \beta \cdot h \cdot b - \sigma_{s,sup} \cdot A_{s,sup} - \sigma_{s,inf} \cdot A_{s,inf}$$

- Se  $N_{Rd} = N_{Sd}$  la posizione dell'asse neutro è corretta
- Se  $N_{Rd} < N_{Sd}$  occorre ridurre  $x$  e quindi sollevare l'asse neutro
- Se  $N_{Rd} > N_{Sd}$  occorre aumentare  $x$  e quindi abbassare l'asse neutro

dove  $\beta = 1$  quando  $x = \infty$ , negli altri casi  $\beta = 100 \varepsilon_{c,inf} + 0.8$

**2. Si determina  $M_{Rd}$ :**

$$M_{Rd} = f_{cd} \cdot \beta \cdot b \cdot d \cdot \left( \frac{h}{2} - k \cdot h \right) + A_{s,sup} \cdot \sigma_{s,sup} \cdot \left( \frac{h}{2} - d' \right) - A_{s,inf} \cdot \sigma_{s,inf} \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right)$$

# Presso e tenso-flessione

## PICCOLA ECCENTRICITA'

dove:  $\beta = 1$  per  $x = \infty$ , negli altri casi  $\beta = 100 \varepsilon_{c,inf} + 0.8$

$k = 0.4$  per  $x = \infty$ , negli altri casi  $k = 50 \varepsilon_{c,inf} + 0.4$

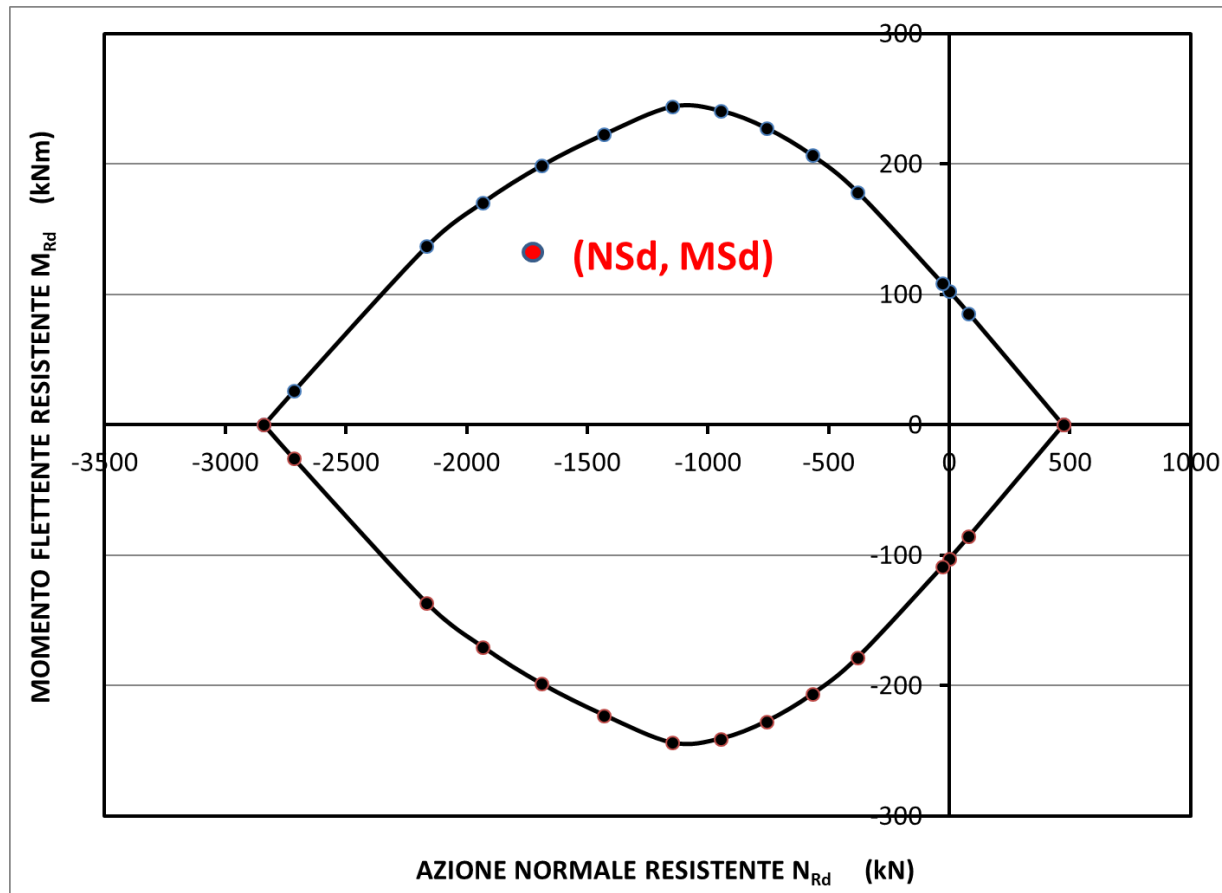
### 3. Controllo:

$$M_{Rd}(N_{Sd}) \geq M_{Sd}$$

# Presso e tenso-flessione

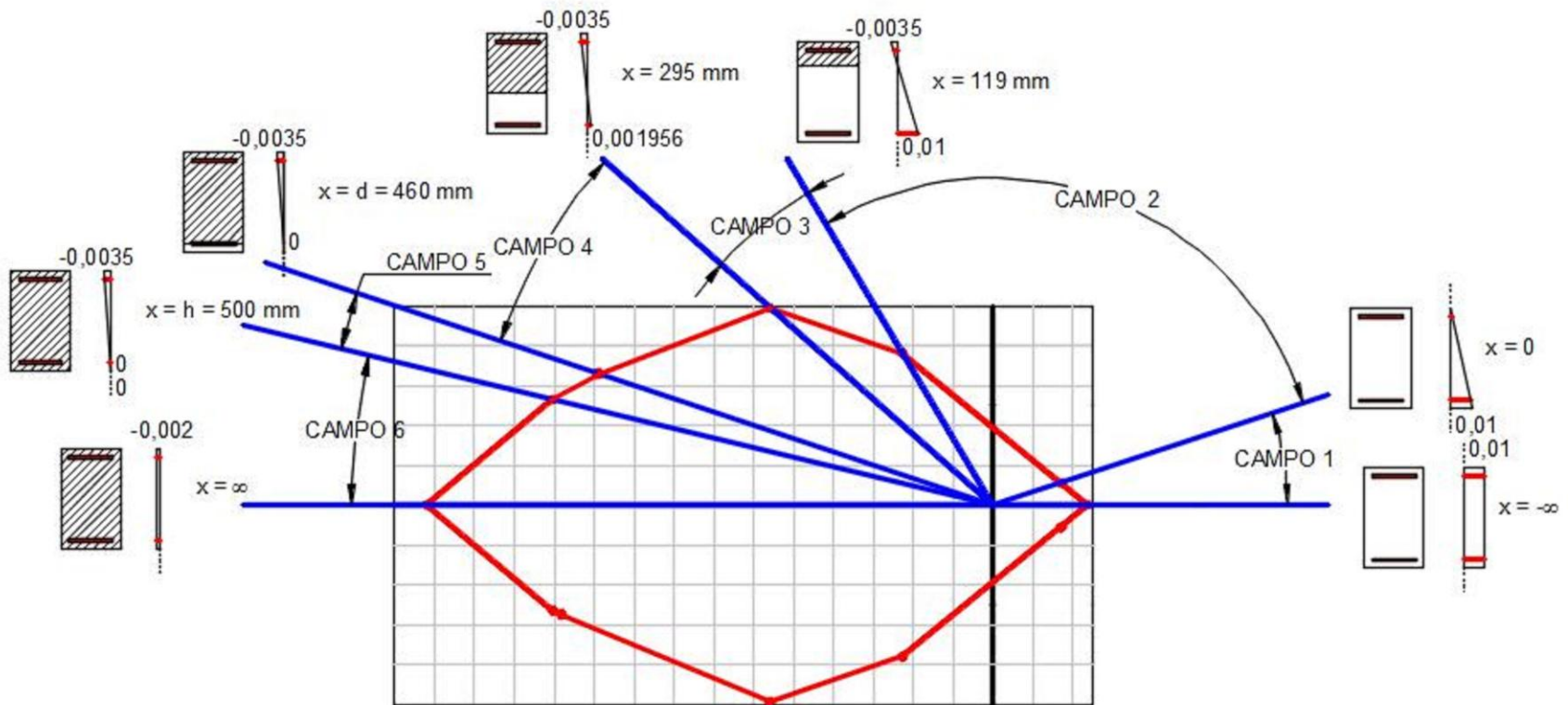
## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

Un altro modo per procedere alla verifica è quello di costruire il DOMINIO DI SICUREZZA.



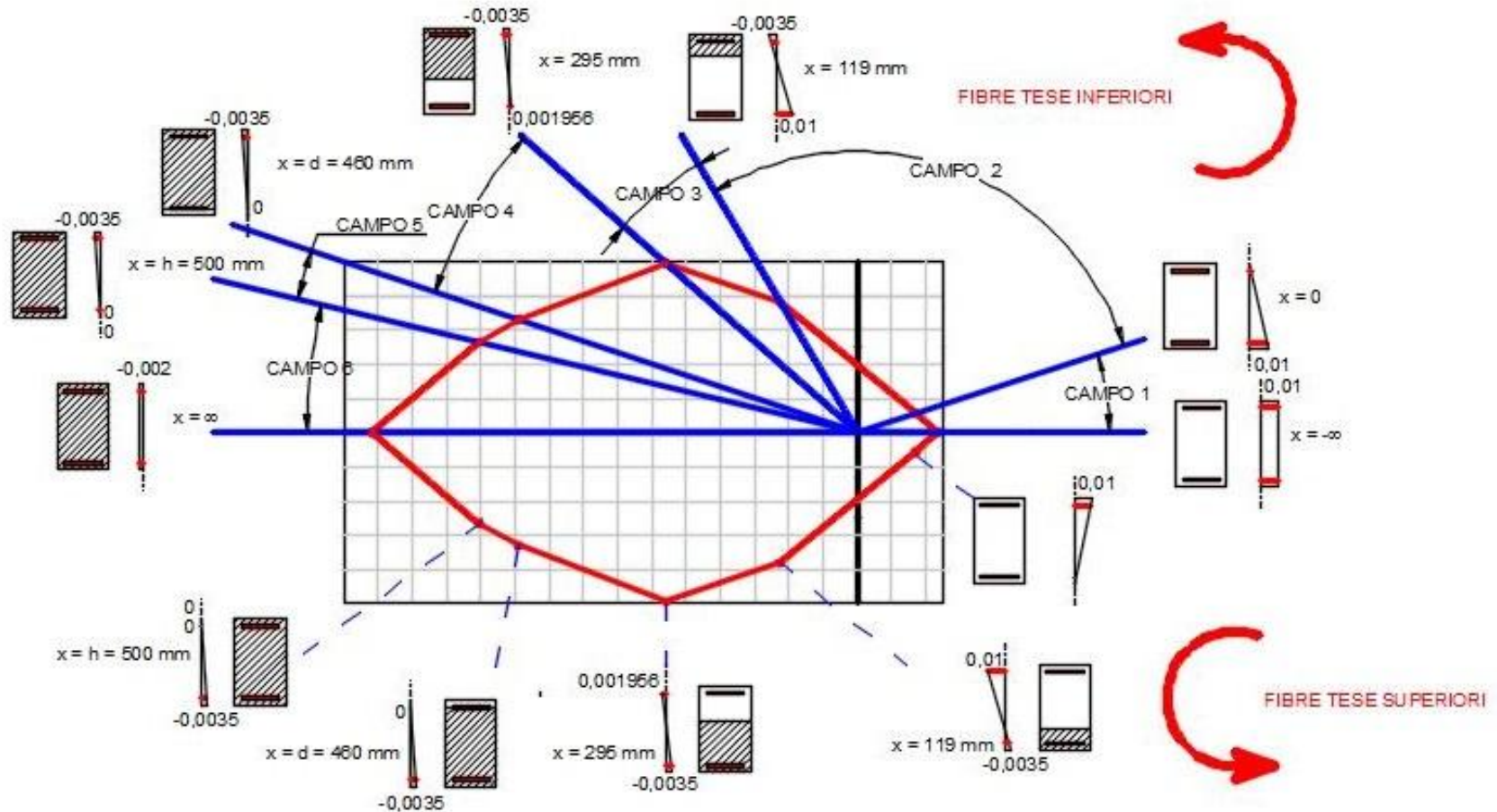
# Presso e tenso-flessione

## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE



# Presso e tenso-flessione

## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

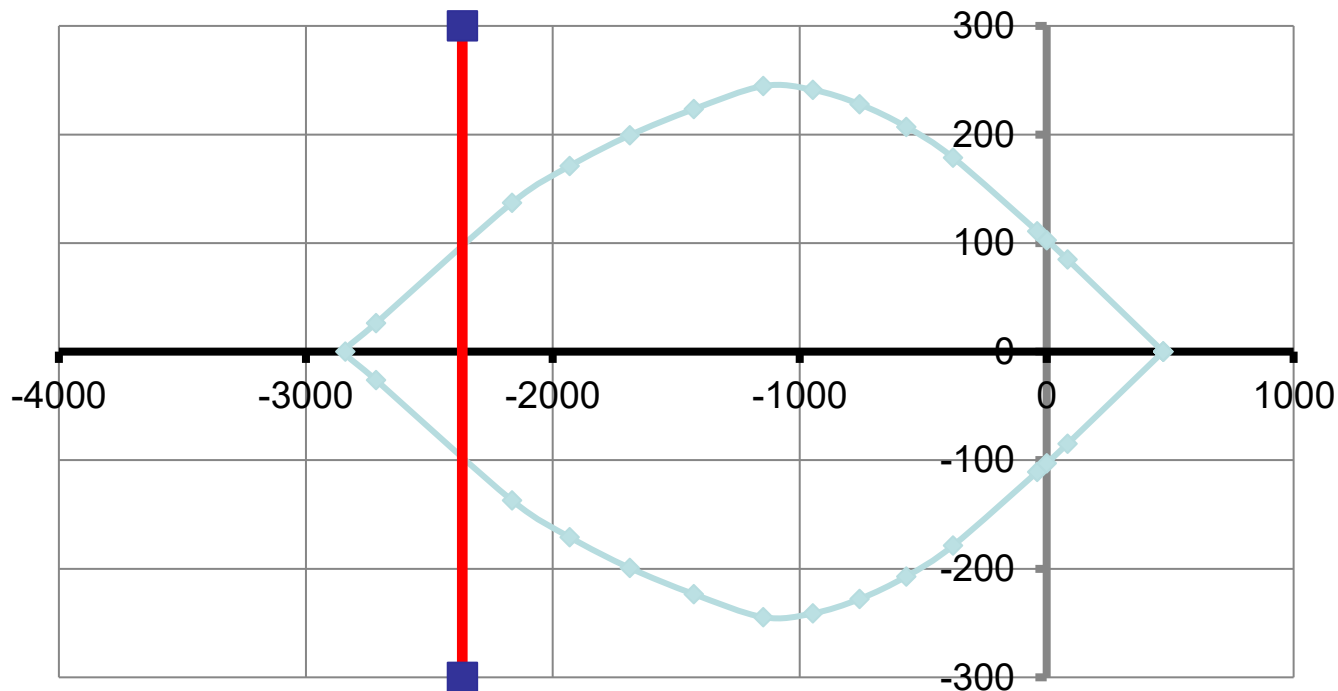


# Presso e tenso-flessione

## VERIFICA DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

Una ulteriore prescrizione cautelativa è rappresentata dall'azione normale di compressione limite  $N_{Rd,lim}$

$$N_{Rd,lim} = 0.8 \cdot f_{cd} \cdot A_c + A_{s,tot} \cdot f_{yd}$$



# Presso e tenso-flessione

## PROGETTO DI UNA SEZIONE RETTANGOLARE

**PROGETTO CONDIZIONATO:** sono note le dimensioni geometriche ed occorre determinare le armature

Le indicazioni successive sono valide per pressoflessione GRANDE ECCENTRICITÀ, valide nel caso in cui l'asse neutro taglia la sezione.

Dati:

- $M_{Sd}$ ,  $N_{Sd}$
- base, altezza
- classe del calcestruzzo e acciaio

Procedura:

1. Si ipotizza la posizione dell'asse neutro compatibile con l'eccentricità

$$e = \frac{M_{Sd}}{N_{Sd}}$$

Se  $e > h/6$

Si pone

$$x = d \div 0.3 d$$

$$d = h - 40 \text{ mm}$$

# Presso e tenso-flessione

## PROGETTO CONDIZIONATO

Si considerano le due equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione:

$$\begin{cases} -f_{cd} \cdot b \cdot 0,8 \cdot x - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s = N_{Sd} \\ f_{cd} \cdot b \cdot 0,8 \cdot x \cdot \left( \frac{h}{2} - 0,4 \cdot x \right) + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot \left( \frac{h}{2} - 40 \right) + \sigma_s \cdot A_s \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) = M_{Sd} \end{cases}$$

Si ipotizza la posizione dell'asse neutro, compatibile con lo stato di sollecitazione ( $e = M_{Sd}/N_{Sd}$ ) e si determina lo stato di deformazione delle armature tese  $A_s$  e compresse  $A'_s$ , da cui ricavare gli stati tensionali  $\sigma_s$  e  $\sigma'_s$

# Presso e tenso-flessione

## PROGETTO CONDIZIONATO

Si pone  $d = h - 40 \text{ mm}$ ,  $d' = 40 \text{ mm}$

$$\varepsilon'_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (x - d') \quad \varepsilon_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (d - x)$$

Si valutano le tensioni nelle armature tese e compresse:

$$\text{se } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$$

$$\text{se } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = f_{yd}$$

$$\text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

$$\text{se } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = f_{yd}$$

# Presso e tenso-flessione

## PROGETTO CONDIZIONATO

Il sistema risolvente è di due equazioni nelle due incognite  $A_s$  e  $A'_s$ .

La scelta dell'asse neutro determina soluzioni non sempre accettabili da un punto di vista fisico, potremo trovare anche valori negativi o valori molto differenti di  $A_s$  e  $A'_s$  al variare dell'asse neutro imposto.

## COME SCEGLIERE L'ASSE NEUTRO X?

La posizione dell'asse neutro dipende principalmente dall'azione normale sollecitante  $N_{sd}$ .

# Presso e tenso-flessione

## PROGETTO CONDIZIONATO

Procedimento consigliato: si determinano le armature minime imposte per i pilastri. Il quantitativo di armatura totale

$$A_{s,tot} = A_s + A'_s$$

deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$A_{s,tot} \geq \begin{cases} 0.10 \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \\ 0.003 \cdot A_c \end{cases}$$

possono essere impiegate barre  $\varnothing \geq 12$  mm, almeno una barra per spigolo e la distanza fra due barre contigue deve essere  $\leq 300$  mm.

# Presso e tenso-flessione

## PROGETTO CONDIZIONATO

- Si procede alla verifica di questa sezione, si determina la posizione dell'asse neutro  $x$  e il momento esistente  $M_{Rd}$ .
- Se  $M_{Rd} (N_{Sd}) \geq M_{Sd}$  la sezione è verificata ed il progetto è concluso.
- Se  $M_{Rd} (N_{Sd}) \leq M_{Sd}$  occorre aumentare le armature  $A_s$  e  $A'_s$  tramite la risoluzione del sistema avendo posto l'asse neutro  $x$  determinato con le armature minime, ovvero procedendo per tentativi fino a che la sezione non è verificata.

Nel caso di PROGETTO CONDIZIONATO con PICCOLA ECCENTRICITÀ si procede come nel caso di pilastro semplicemente compresso.