

Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso Integrato di Scienza e Tecnica delle Costruzioni

Modulo di **Tecnica delle Costruzioni** (8 CFU)

A.A. 2025-2026  
2° semestre

Docente: Marco Zucca

# **STATI LIMITE ULTIMI FLESSIONE RETTA**



**POLITECNICO**  
MILANO 1863  
Scuola Master Fratelli Pesenti



Università degli Studi di Cagliari

**DICAAR**

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E ARCHITETTURA

# STATI LIMITE ULTIMI

## FLESSIONE RETTA

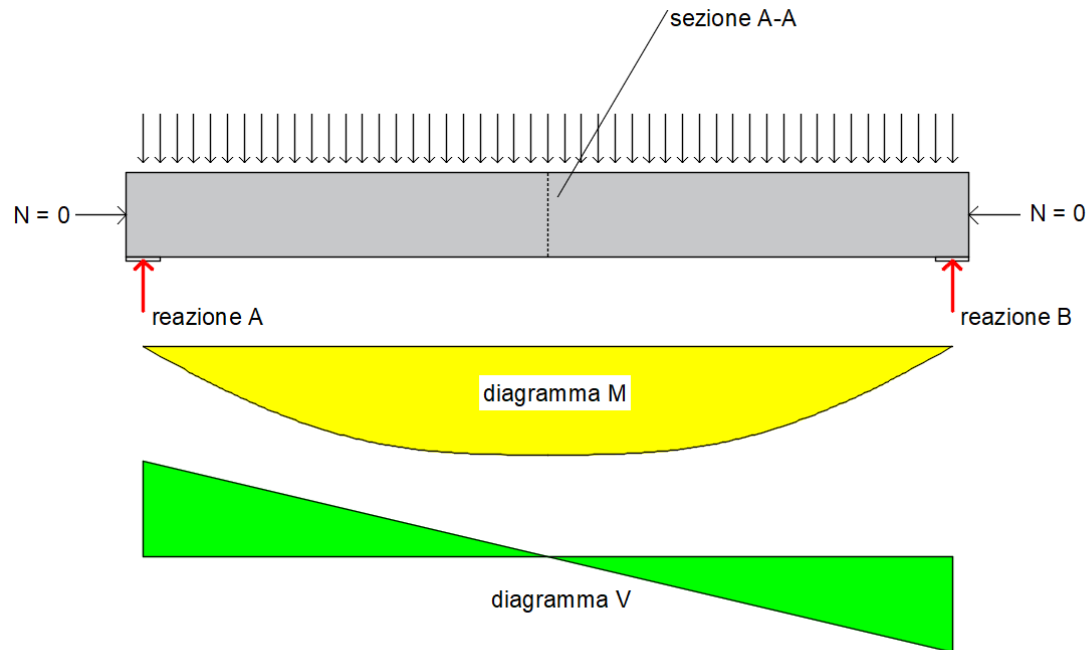
Obiettivo: verificare e progettare una sezione in calcestruzzo armato sollecitata a momento flettente

### **Strumenti:**

- **Norme Tecniche per le costruzioni D.M. 17.01.2018, G.U. n. 42 del 20.02.2018**  
**Circolare Ministeriale del 21.01.2019, G.U. n. 5 del 11.02.2019**

# Flessione retta

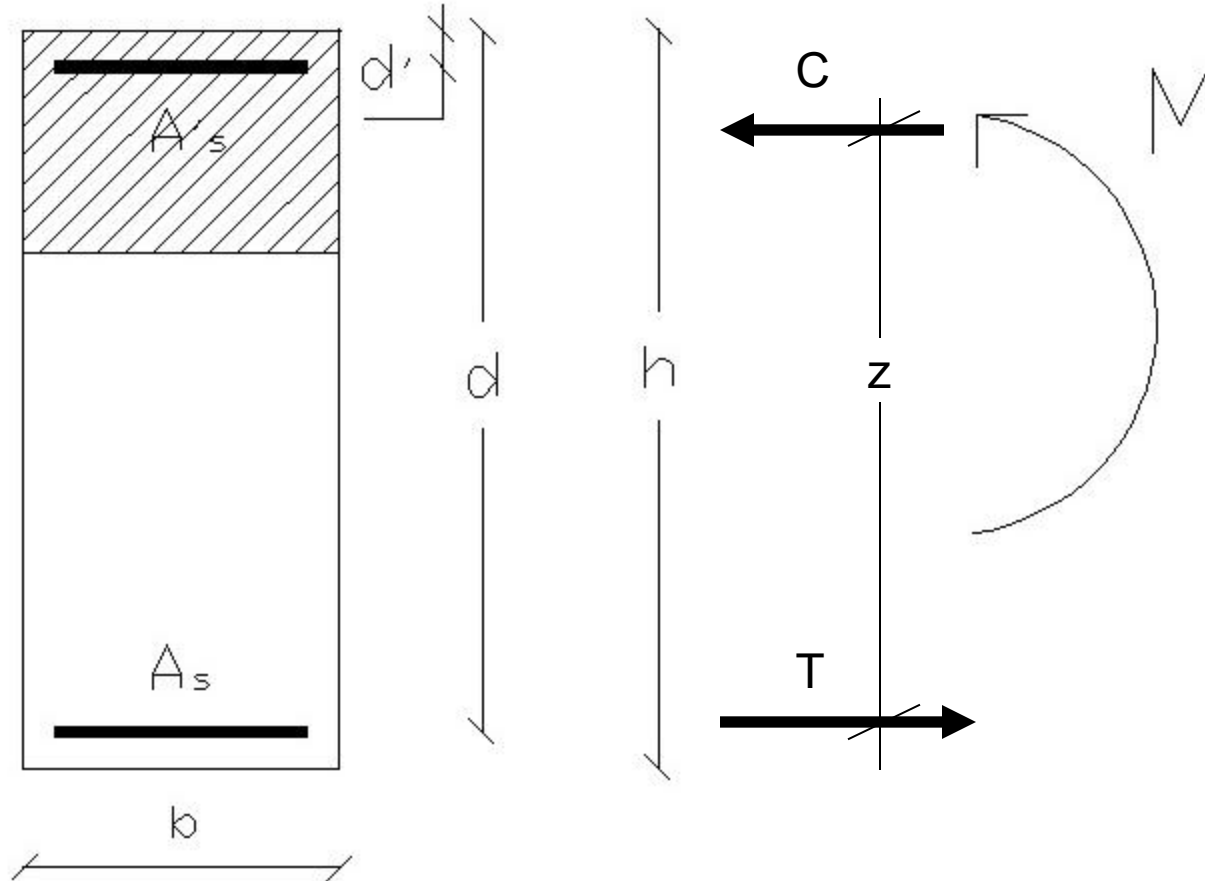
Una trave è un elemento strutturale che trasferisce i carichi su di essa applicati, compreso il peso proprio, modificando la loro retta d'azione attraverso l'effetto delle tensioni interne.



# Flessione retta

In assenza di Azione Normale ( $N = 0$ ), nella generica sezione, il momento flettente  $M$  produce una forza di compressione  $C$  e una forza di trazione  $T$ .

$$M = C \cdot z = T \cdot z$$

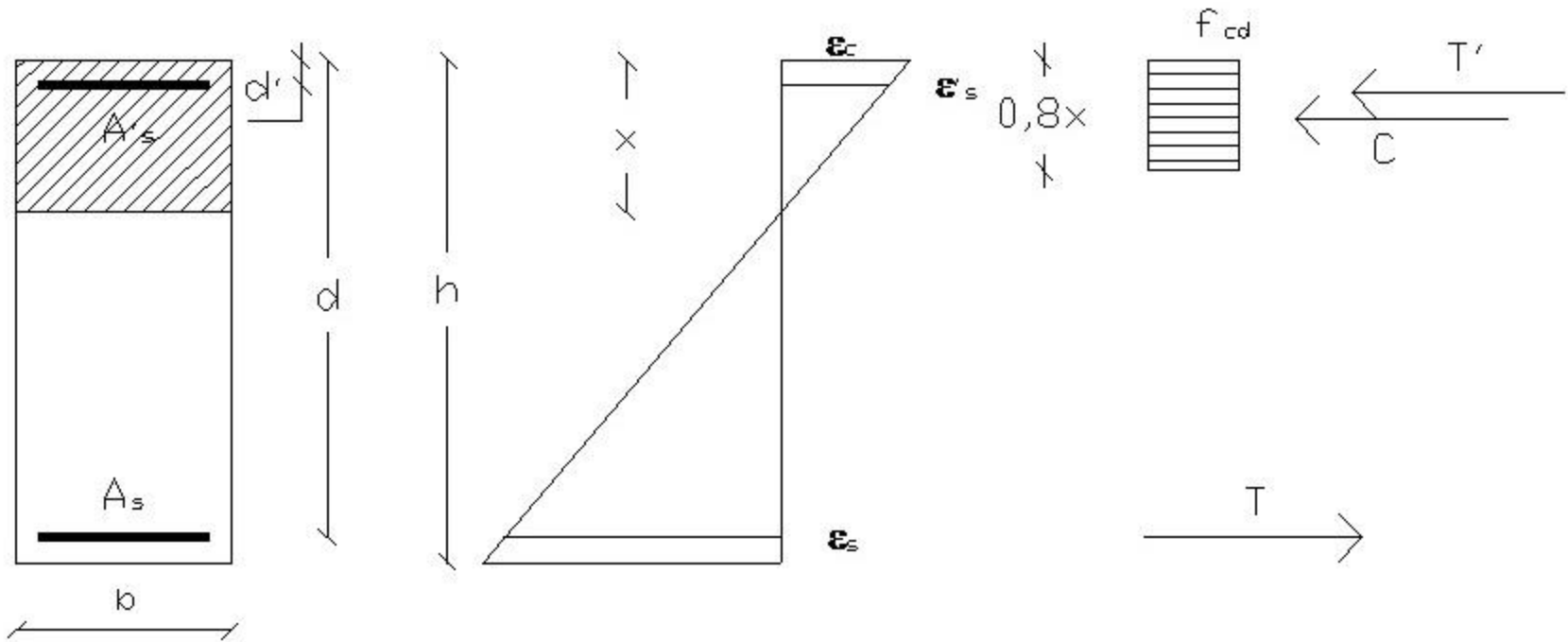


**OBIETTIVO:** determinare il Momento Resistente ( $M_{Rd}$ ) che produce il collasso della sezione, per confrontarlo con il Momento Sollecitante ( $M_{Sd}$ ).

**Verifica soddisfatta se  $M_{Rd} \geq M_{Sd}$**



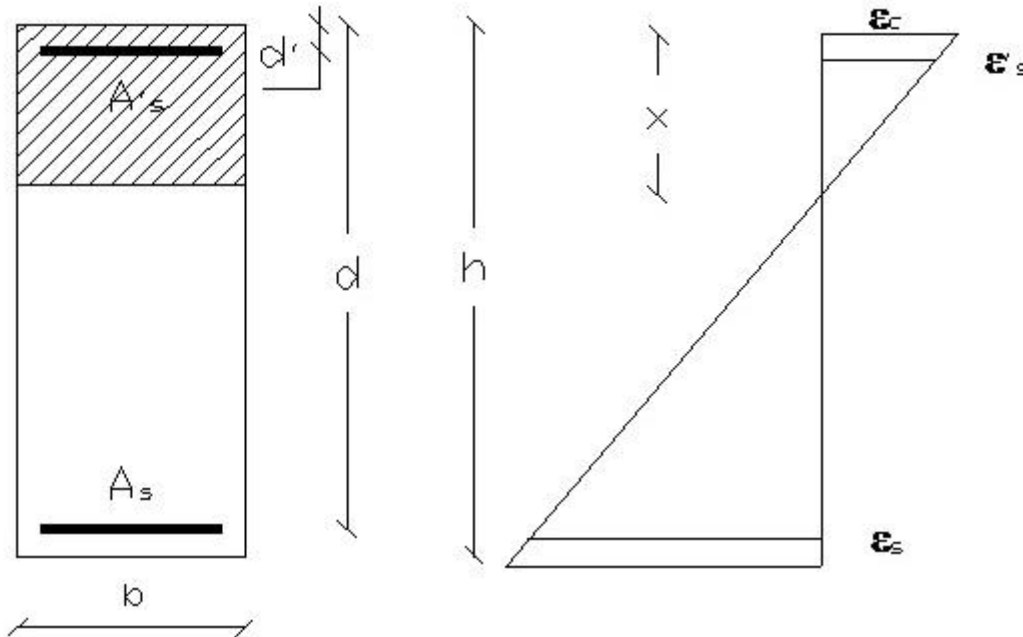
# Flessione retta



- $C$  risultante delle **tensioni di compressione nel calcestruzzo**
- $T'$  risultante delle **tensioni di compressione nell'acciaio compresso**
- $T$  risultante delle **tensioni di trazione nell'acciaio teso**

# Flessione retta

- L'ipotesi di **conservazione delle sezioni piane**, consente la determinazione dello **stato di deformazione per ogni corda della sezione parallela all'asse neutro**.
- Lo **stato di deformazione** di tipo **lineare** genera la formazione di **triangoli simili**.
- Il **collasso** avviene per colpa del calcestruzzo al lembo compresso, che raggiunge la **deformazione ultima**  $\varepsilon_{cu} = 0.0035$ .



La similitudine fra i triangoli determina:

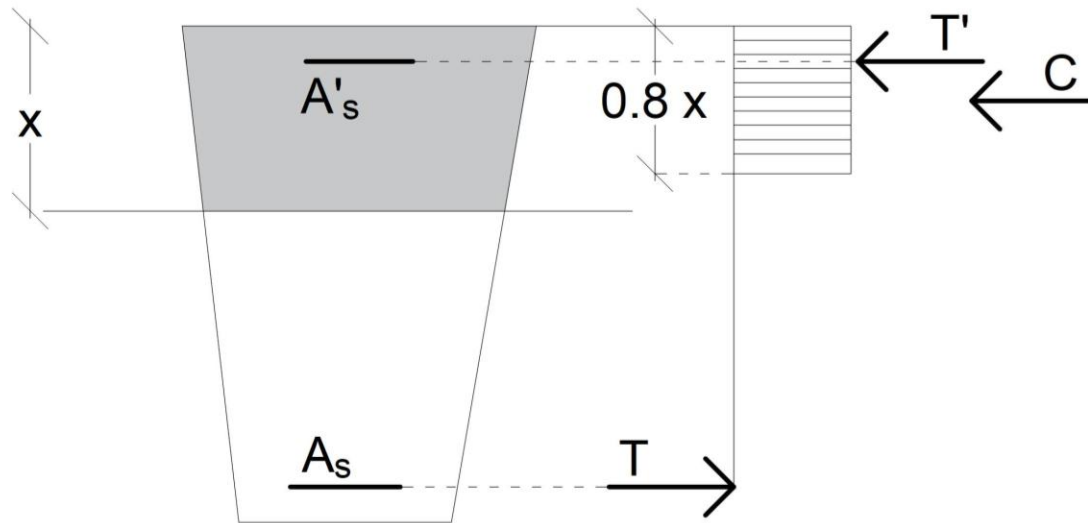
$$\varepsilon'_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (x - d')$$

$$\varepsilon_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (d - x)$$

# Flessione retta

## Sezioni di forma generica

Equilibrio alla traslazione:

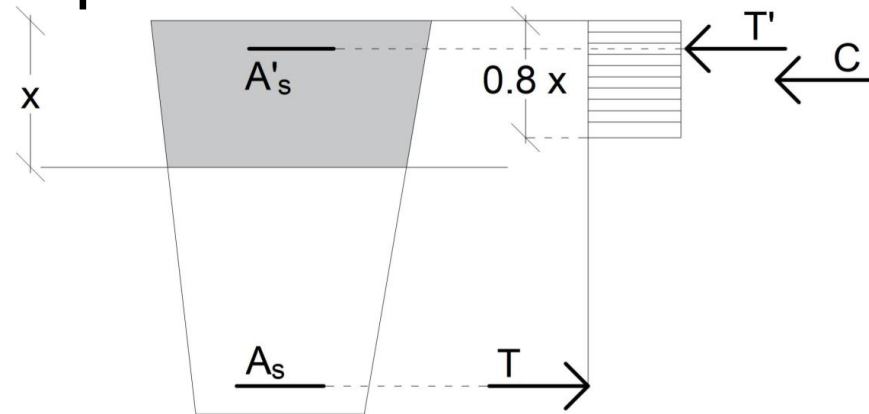


$$-\int_{A_c} \sigma_c \cdot dA_c - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s$$

# Flessione retta

## Sezioni di forma generica

Equilibrio alla rotazione:



Equilibrio alla rotazione, ad esempio rispetto all'asse neutro:

$$\int_{A_c} \sigma_c \cdot y \cdot dA_c + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot (x - d') + \sigma_s \cdot A_s \cdot (d - x) = M_{Rd}$$

Il valore di  $M_{Rd}$  non cambia se l'equilibrio è fatto rispetto al baricentro delle armature tese, in quanto è assente l'azione normale:

$$\int_{A_c} \sigma_c \cdot y_d \cdot dA_c + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot (d - d') = M_{Rd}$$

# Flessione retta

## Verifica di una sezione rettangolare

Dati:

- $M_{Sd}$
- base, altezza,  $A_s$ ,  $A'_s$ , posizione delle armature
- classe del calcestruzzo e acciaio

**VERIFICA:**

$$M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

Procedura:

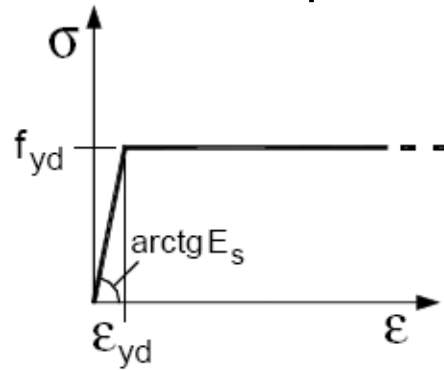
1. **Determinazione posizione asse neutro:** si ipotizza una posizione dell'asse neutro e si determina lo stato di deformazione delle armature in zona tesa e compressa, sapendo che il collasso avviene per raggiungimento della deformazione ultima nel lembo compresso di calcestruzzo.

$$\varepsilon'_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (x - d') \quad \varepsilon_s = \frac{0.0035}{x} \cdot (d - x)$$

# Flessione retta

## Verifica di una sezione rettangolare

Diagramma dell'acciaio in trazione e compressione:



Si valutano le tensioni nelle armature tese e compresse:

$$\text{se } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$$

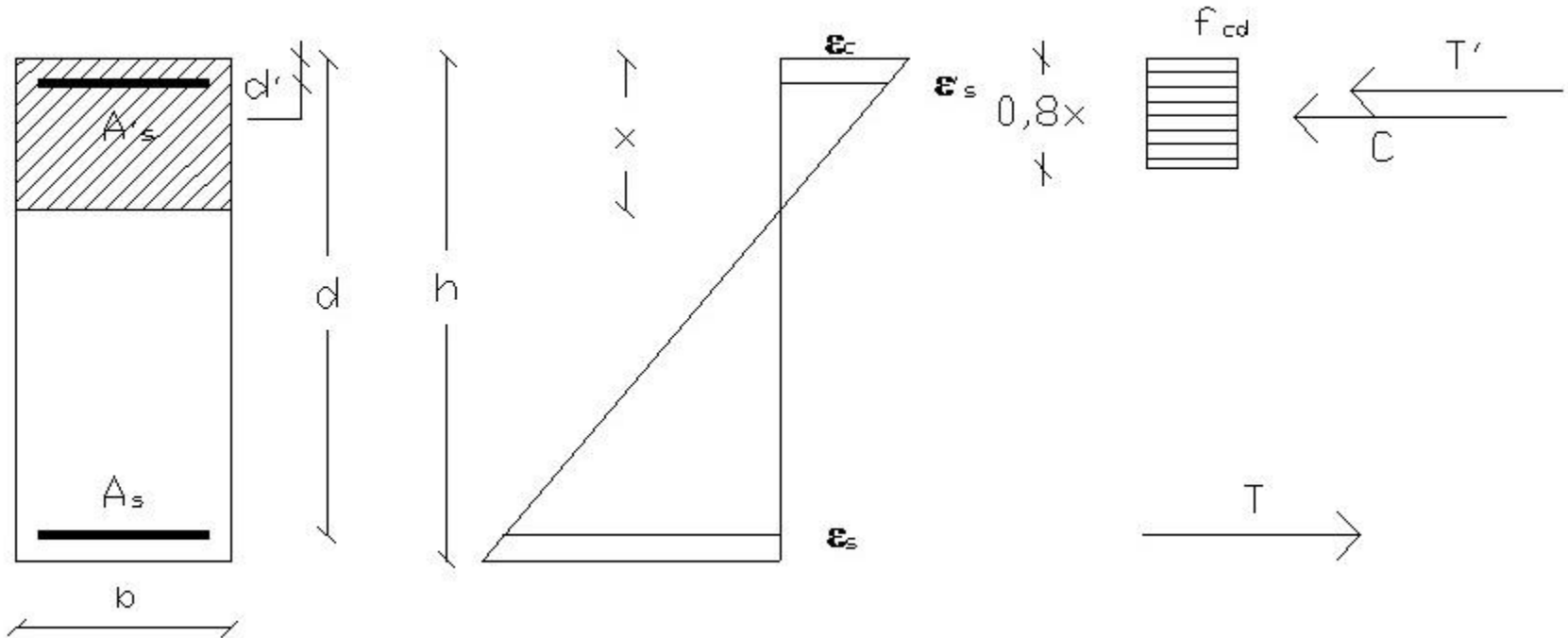
$$\text{se } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = f_{yd}$$

$$\text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

$$\text{se } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = f_{yd}$$

# Flessione retta

## Verifica di una sezione rettangolare



Si verifica l'equilibrio alla traslazione:

$$N_{Rd} = -f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s$$

# Flessione retta

## Verifica di una sezione rettangolare

Si verifica l'equilibrio alla traslazione:

$$N_{Rd} = -f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s$$

- Se  $N_{Rd} = 0$  la posizione dell'asse neutro è corretta
- Se  $N_{Rd} < 0$  occorre ridurre  $x$  e quindi sollevare l'asse neutro
- Se  $N_{Rd} > 0$  occorre aumentare  $x$  e quindi abbassare l'asse neutro

**2. Si determina  $M_{Rd}$ :**

$$M_{Rd} = f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot (d - 0.4 \cdot x) + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot (d - d')$$

**3. Controllo:**

$$\mathbf{M_{Rd} \geq M_{Sd}}$$

# Osservazioni sulle modalità di rottura

La verifica a flessione prevede un duplice controllo:

$$M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

Modalità di rottura: DUTTILE

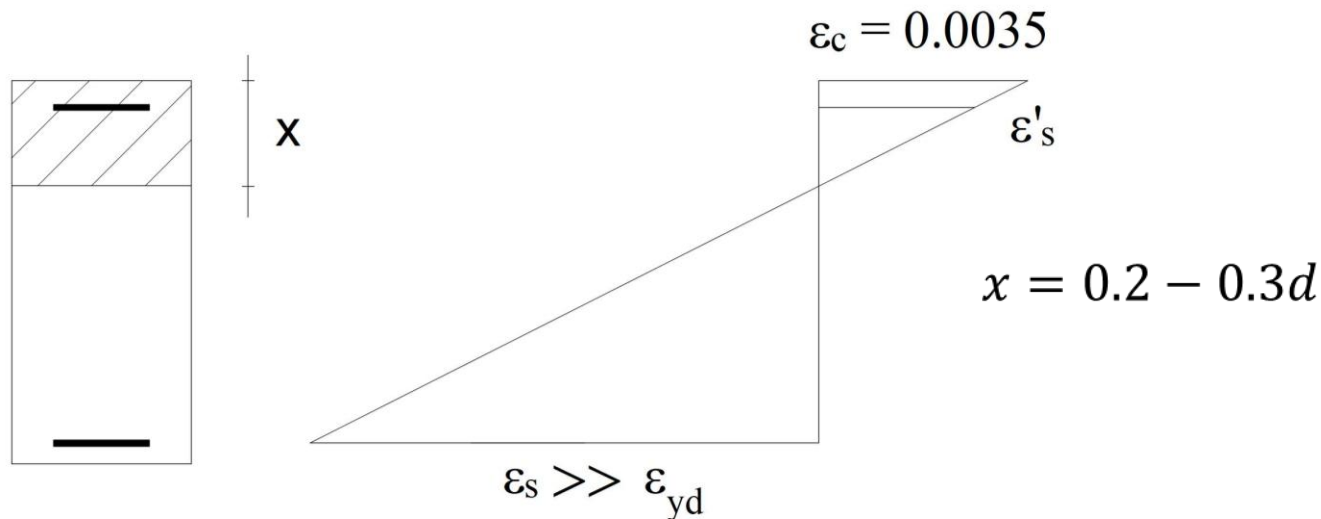
La modalità di rottura può essere:

- duttile: se la deformazione dell'acciaio teso  $\varepsilon_s \gg \varepsilon_{yd}$
- fragile: se la deformazione dell'acciaio teso  $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$

# Osservazioni sulle modalità di rottura

## Con la rottura di tipo duttile:

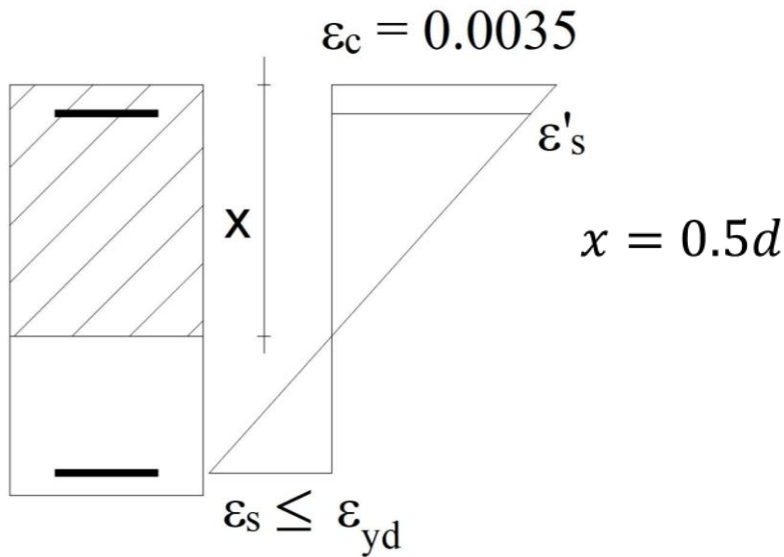
- l'acciaio teso ha un valore elevato di deformazione ( $\varepsilon_s > 0.01$ );
- l'asse neutro ha una piccola profondità;
- la sezione presenta una elevata curvatura, a cui corrisponde grande deformabilità a collasso della trave.



# Osservazioni sulle modalità di rottura

## Con la rottura di tipo fragile:

- l'acciaio teso ha un valore deformazione limitato ( $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$ );
- l'asse neutro ha una grande profondità;
- la sezione presenta piccola curvatura, a cui corrisponde esigua deformabilità a collasso della trave;



# Verifica a flessione

$$M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

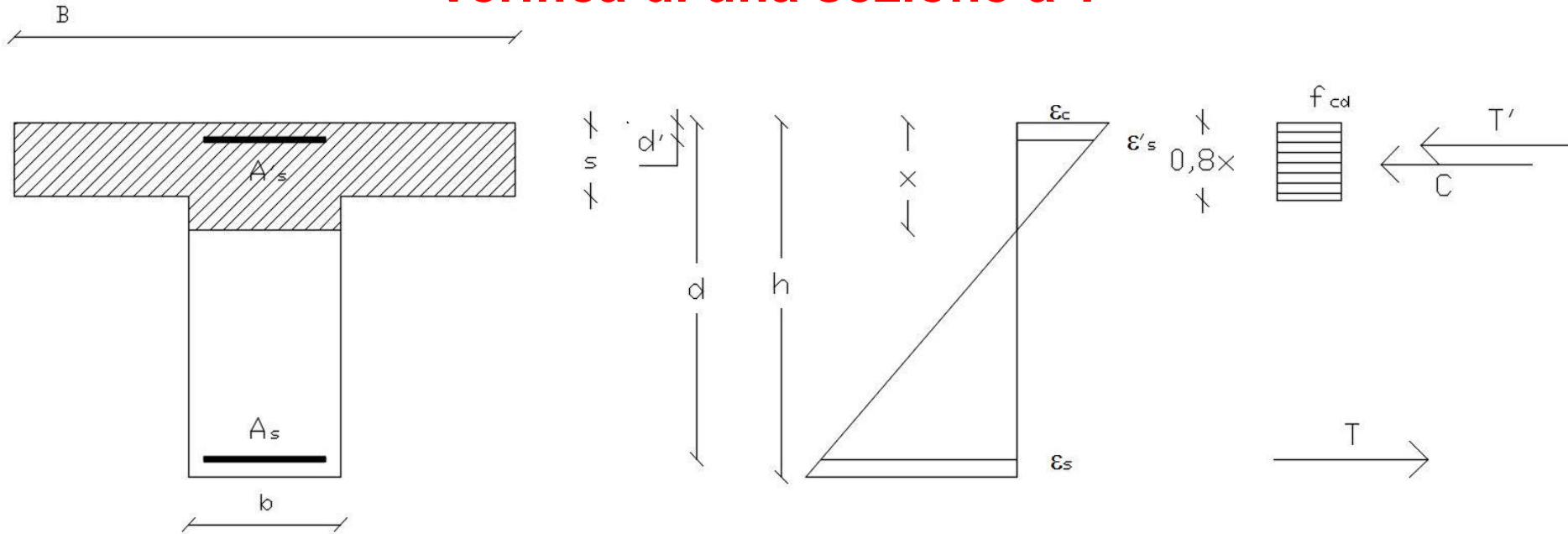
Modalità di rottura: DUTTILE

Il comportamento DUTTILE si può controllare in due modi:

- a) Deformazione dell'acciaio teso  $\varepsilon_s \gg \varepsilon_{yd}$
- b) Posizione dell'asse neutro  $x < 0.3 d$

# Flessione retta

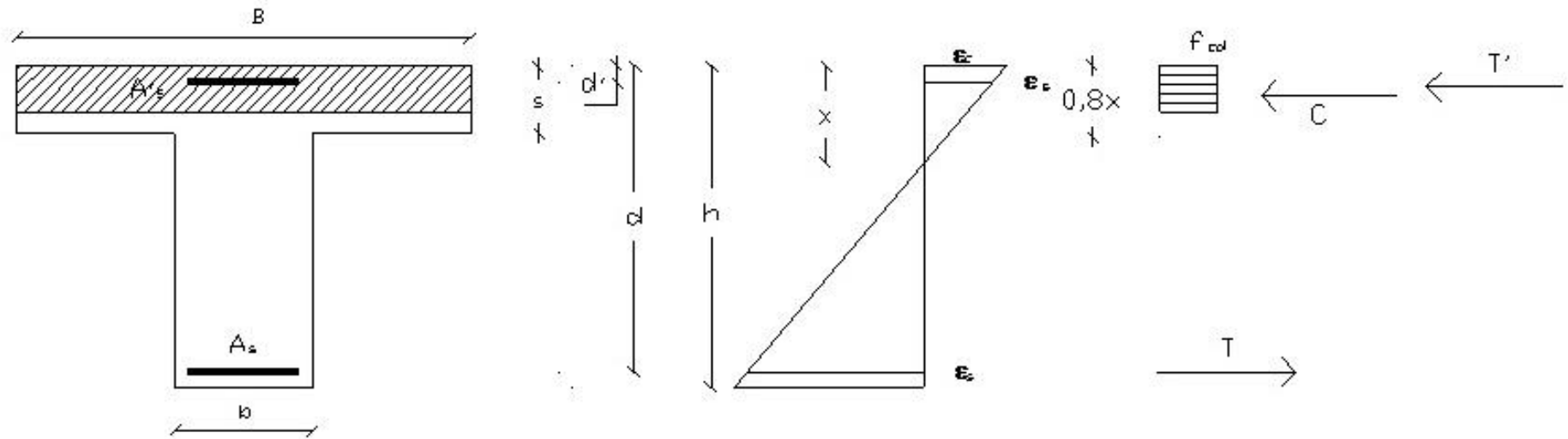
## Verifica di una sezione a T



$$N_{Rd} = -f_{cd} \cdot B \cdot s - f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x - s) - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s$$

# Flessione retta

## Verifica di una sezione a T



Le stesse relazioni della sezione rettangolare con sezione di base B

# Progetto di una sezione rettangolare

Esistono due tipi di progetto:

- **Progetto libero:** determinare le dimensioni geometriche della sezione e le armature.
- **Progetto condizionato:** sono note le dimensioni geometriche ed occorre determinare le armature.

# Progetto libero

## DATI:

- Momento sollecitante  $M_{Sd}$
- Materiali Impiegati

## INCOGNITE:

- Dimensioni geometriche della sezione ( $b$ ,  $h$ ) e armature ( $A_s$ ,  $A'_s$ )

## PROCEDURA:

- Si ipotizza di disporre solo armatura in zona tesa ( $A'_s = 0$ ) e si impone la posizione dell'asse neutro in modo che sia assicurato un comportamento duttile alla sezione ( $x = 0.2h$ ). Inoltre si pone  $d = h$ .
- La base  $b$  è posta pari a  $0.5h$ .

# Progetto libero

Dall'equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro delle armature tese ponendo:

$$M_{Sd} = M_{Rd}$$

$$f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot (d - 0.4 \cdot x) = M_{Rd}$$

$$f_{cd} \cdot 0.5 \cdot h \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot h \cdot (h - 0.4 \cdot 0.2 \cdot h) = M_{Sd}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{M_{Sd}}{f_{cd} \cdot 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot (1 - 0.4 \cdot 0.2)}}$$

$$b = 0.5 \cdot h$$

# Progetto libero

Dall'equilibrio alla traslazione si ottiene l'armatura in zona tesa:

$$-f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x + \sigma_s \cdot A_s = 0$$

$$\varepsilon_s = \frac{0.0035}{0.2 \cdot h} \cdot (h - 0.2 \cdot h) = 0.014$$

$$\varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma_s = f_{yd}$$

$$-f_{cd} \cdot 0.5 \cdot h \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot h + f_{yd} \cdot A_s = 0$$

$$A_s = \frac{f_{cd} \cdot 0.08 \cdot h^2}{f_{yd}}$$

# Progetto condizionato

## DATI:

- Momento sollecitante  $M_{Sd}$
- Materiali Impiegati
- Base  $b$
- Altezza  $h$

## INCOGNITE:

- Armature ( $A_s, A's$ )

## PROCEDURA:

- Si ipotizza la posizione dell'asse neutro:  $x = 0.2d$
- Si pone:  $d = h - 40 \text{ mm}$

# Progetto condizionato

Si considerano le due equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione:

$$\begin{cases} -f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x - \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s = 0 \\ f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot (d - 0.4 \cdot x) + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot (d - 40) = M_{Sd} \end{cases}$$

$$\varepsilon_s = \frac{0.0035}{0.2 \cdot d} \cdot (d - 0.2 \cdot d) = 0.014 \quad \sigma_s = f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{0.0035}{0.2 \cdot d} \cdot (0.2 \cdot d - 40)$$

$$\text{se } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = f_{yd}$$

$$\text{se } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \quad \sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$$

# Progetto condizionato

In alternativa si può impiegare una semplice formula per determinare l'armatura tesa  $A_s$ :

$$A_s = \frac{M_{sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd}}$$

Questa relazione è ricavata dall'equazione di equilibrio alla rotazione avendo trascurato il contributo di  $A'_s$  e avendo imposto  $x = 0.259d$ .

Tale posizione di asse neutro corrisponde a  $\varepsilon_c = 0.0035$  e  $\varepsilon_s = 0.01$ .

Effettuato il progetto occorre definire le dimensioni effettive della sezione, possibilmente multipli di 50 mm e le armature, possibilmente scegliere armatura ben distribuita, diametri piccoli e unico diametro.

Si procede alla verifica.

# Disposizioni costruttive

## 4.1.6.1.1 *Armatura delle travi*

L'area dell'armatura longitudinale in zona tesa non deve essere inferiore a

$$A_{s,\min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b_t \cdot d \text{ e comunque non minore di } 0,0013 \cdot b_t \cdot d , \quad (4.1.43)$$

dove:

$b_t$  rappresenta la larghezza media della zona tesa; per una trave a T con piattabanda compressa, nel calcolare il valore di  $b_t$  si considera solo la larghezza dell'anima;

$d$  è l'altezza utile della sezione;

$f_{ctm}$  è il valore medio della resistenza a trazione assiale definita nel § 11.2.10.2;

$f_{yk}$  è il valore caratteristico della resistenza a trazione dell'armatura ordinaria.

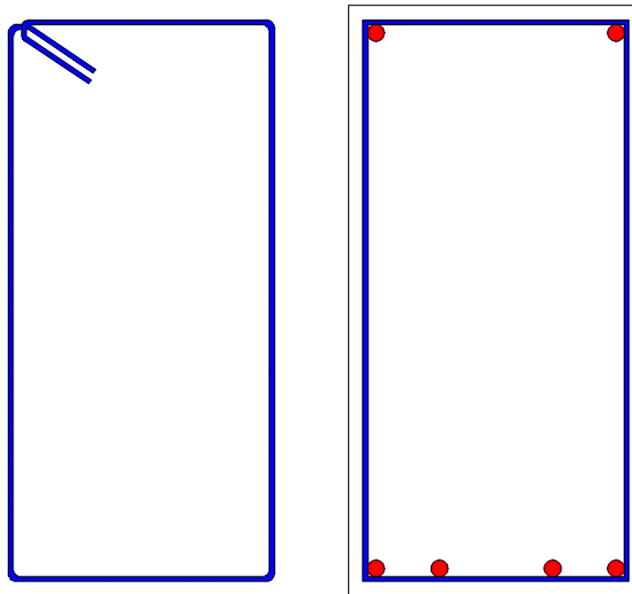
Al di fuori delle zone di sovrapposizione, l'area di armatura tesa o compressa non deve superare individualmente  $A_{s,\max} = 0,04 A_c$ , essendo  $A_c$  l'area della sezione trasversale di calcestruzzo.

Le travi devono prevedere armatura trasversale costituita da staffe con sezione complessiva non inferiore ad  $A_{st} = 1,5 b \text{ mm}^2/\text{m}$  essendo  $b$  lo spessore minimo dell'anima in millimetri, con un minimo di tre staffe al metro e comunque passo non superiore a 0,8 volte l'altezza utile della sezione.

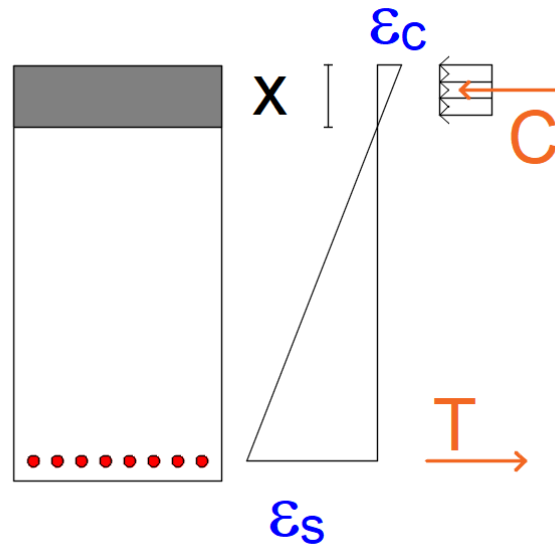
# Armatura compressa A's

A cosa serve?

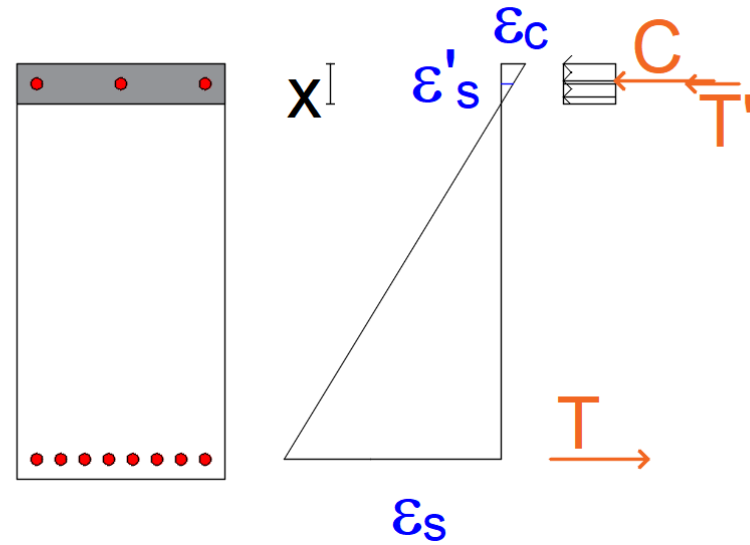
- Deve essere sempre presente perché funge da reggi staffe.
- Aumenta la duttilità della sezione a rottura.
- Incrementa la capacità flessionale della sezione.



# Armatura compressa A's



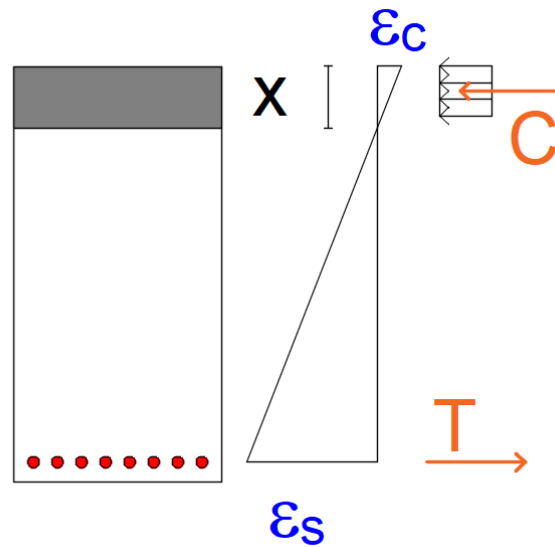
$$x = 149.36 \text{ mm}$$
$$\epsilon_s = 0.019$$



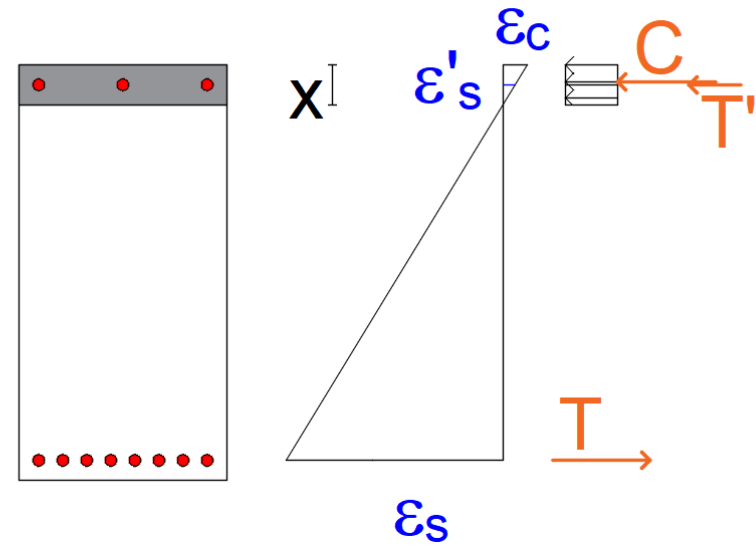
$$x = 94.67 \text{ mm}$$
$$\epsilon_s = 0.031$$

Aumenta la duttilità della sezione a rottura.

# Armatura compressa A's



$$M_{Rd} = 882 \text{ kNm}$$



$$M_{Rd} = 902 \text{ kNm}$$

Incrementa la capacità flessionale della sezione.