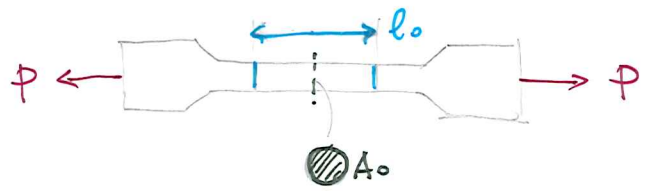


CRITERI DI INGEGNERIA

ABBIAVO VISTO QUALI SONO I STRUMENTI MATEMATICI NECESSARI PER LA DEFINIZIONE DELLO STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE IN UN SOLIDO SOTTO A DETERMINATE FORTE ESTERNE E VARIANTE VINCOLATO, FACENDO L'IPOTESI CHE IL MATERIALE COSTITUENTE IL CORPO SEGUA LE LEGGI DELL'ELASTICITA' LINEARE → IL COMPORTAMENTO REALE DEL MATERIALE DEVE ESSERE ADEQUATAMENTE PROSSIMO A QUESTO IDEALE IPOTIZZATO.

E' NECESSARIO DEFINIRE - PER VIA SPERIMENTALE - LE PROPRIETA' DEI MATERIALI E VALUTARE I LIMITI ENTRO I QUALI LE LEGGI TECNICHE PROPOSTE SONO IN GRADO DI RAPPRESENTARE ATTENDIBILMENTE IL FENOMENO REALE.

PROVA A TRAZIONE

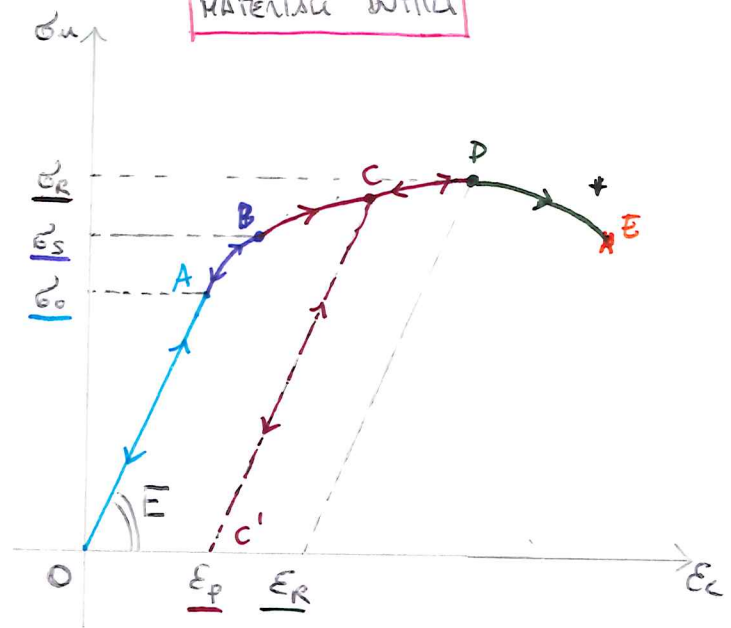


TENSIONI NOMINALI  $\sigma_u = \frac{P}{A_0}$   
[MPa]

DEFORMAZIONI CONVENZIONALI  $\epsilon_c = \frac{\Delta l}{l_0}$   
[ADIMENSIONALI]

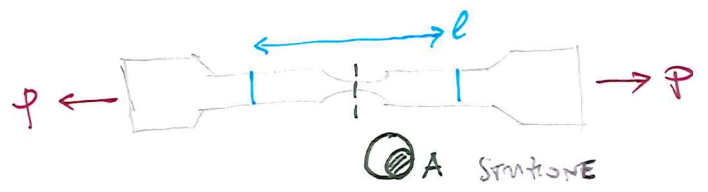
FACENDO RIFERIMENTO AI MATERIALI COMPRENSIVI OBTI NELLE COLONNINE - MATERIALI METALLICI ORE ACCIAIO O ALLUMINIO; LEGNO, CLS, etc - I DIAGRAMMI TENSIONI NOMINALI - DEFORMAZIONI CONVENZIONALI,  $\sigma_u - \epsilon_c$  HANNO UN ANDAMENTO QUALITATIVO DEL TIPO:

MATERIALI DUTTI



- $\sigma_0$  - TENSIONE AL LIMITE DI PROPORZIONALITA'
- $\sigma_s$  = TENSIONE DI INNEASTAMENTO
- $\sigma_R$  = TENSIONE DI ROTTURA
- $\epsilon_p$  = DEFORMAZIONE PERMANENTE
- $\epsilon_R$  = DEFORMAZIONE DI ROTURA (≈ 10÷20%)

- TRATTO OA → COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE
- TRATTO AB → COMPORTAMENTO ELASTICO NON-LINEARE
- TRATTO BD → COMPORTAMENTO PLASTICO - DEFORMAZIONI PERMANENTI → CC'

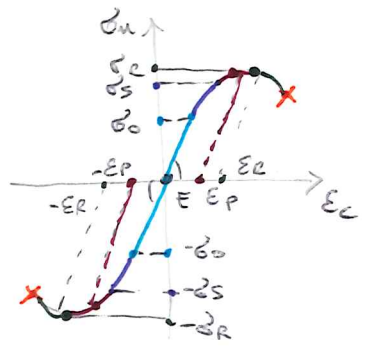


[E = MODULO DI YOUNG]

\* [N.B. SE SI TIENE CONTO DELL'EFFETTO DELLA STRUZIONE IL DIAGRAMMA DELLO STATO REALE  $\sigma_R = P/A$  - DEFORMAZIONE CONVENZIONALE HA ANDAMENTO CRESCENTE FINO A ROTURA

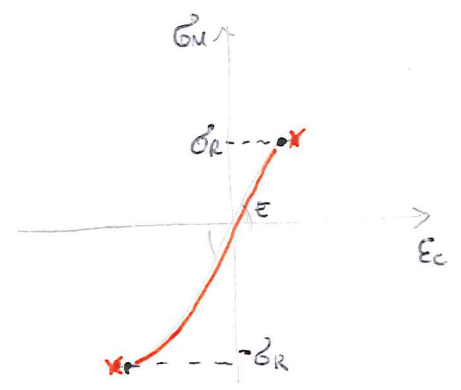
CRITERI DI SICUREZZA

NEI MATERIALI DUTILI IL COMPORTAMENTO A COMPRESIONE È SIMMETRICO



ACCIAIO  
ALUMINIO  
LEGNO  
L.S.

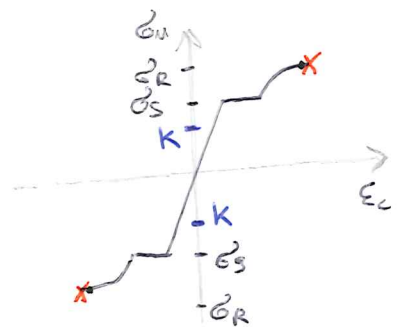
NEI MATERIALI FRAGILI LA ROTTA DIVIENE DEPENDENTEMENTE E IL COMPORTAMENTO NON È SIMMETRICO - A COMPRESIONE I VALORI SONO PIÙ ELEVATI, I DEFETTI HANNO PIÙ INCIDENZA NEL COMPORTAMENTO A TRAZIONE -



ASPETTA DI DEFINIZIONI PERMANENTI  $\epsilon_p$   
ROTURA IMPROVVISI

VEGA  
CENAFICA  
LA PINEI

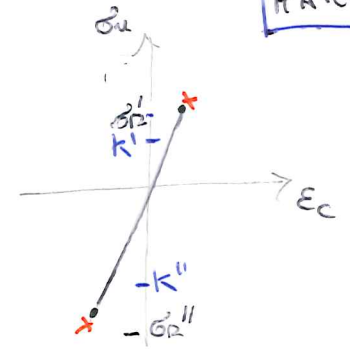
> MODELLO:



MATERIALI DUTILI

$K = \sigma_s / \Delta$   
 $\Delta =$  COEFFICIENTE DI INCURTITA > 1  
(DIPENDE DALL'AFFIDABILITÀ DI PRODUZIONE)  
RISPOSTA ELASTICA  $-K < \sigma_u < K$   
 $K =$  TENSIONE AMMISSIBILE (UGUALE A TRAZIONE E A COMPRESIONE)

MATERIALI FRAGILI



$K' = \sigma_r' / \Delta$   
 $K'' = \sigma_r'' / \Delta$   
 $K' < K''$   
RISPOSTA ELASTICA  
 $-K'' < \sigma_u < K'$

$K'$  TENSIONE AMMISSIBILE A TRAZIONE

$K''$  TENSIONE AMMISSIBILE A COMPRESIONE

NB:  $K'$  E  $K''$  SONO VALORI POSITIVI!

> LE TENSIONI AMMISSIBILI RAPPRESENTANO PERTANTO IL CAMPO ENTRO IL QUALE È LEGATO SOSTANZIALMENTE IL COMPORTAMENTO DEL CORPO CHE È ELASTICO LINEARE

NB - REGIME MONOASSIALE

- PUNTUALI → VANNO VALUTATE NEI PUNTI PIÙ DEBOLIZZATI

# CRITERIO DI SICUREZZA

TENSIONE AMMISSIBILE  $\rightarrow$  QUANTIFICE IN REGIME ELASTICO LA DIPENDENZA TRA LE LEGGI DELL'EQUILIBRIUMO LINEARE E IL COMPORTAMENTO REALE SICUREZZA DELLA COPERTURA NEL QUADRO DELLO SPOSTAMENTO O DELLA ROTAZIONE

NEL CASO IN CUI NEL GENERALE PUNTO DELLA INTIMITA (IL PIU' SOLLECITATO) LO STATO DI TENSIONE NON E' ELASTICO MA CARATTERIZZATO DAI SEI COMPONENTI  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tau_{ij}$  DEL TENSORE DELLA TENSIONE  $[\underline{\underline{\sigma}}]$  NON E' PIU' UN PARAMETRO DA CONFRONTARE AQUE TENSIONI AMMISSIBILI MA E' NECESSARIO FISSARE DEI CRITERI:

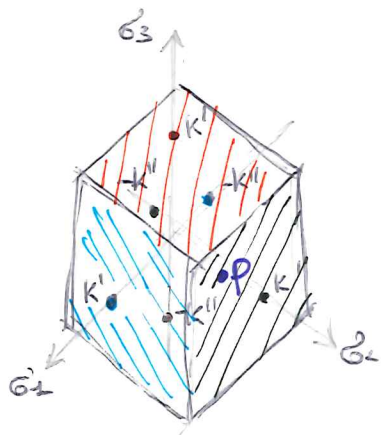
**CRITERIO DI SICUREZZA**  $\rightarrow$  SI SELEZIONA UNA "QUANTITA' INDICE DEL PERICOLO" - GIP - FUNZIONE DELLO STATO DI SFORTO E LA SI CONFRONTA CON UN VALORE SCELTA DETE RMINABILE MEDIANTE PROVE ELASTICHE

## I CRITERIO DI GAUSSI-RANKINE

GIP  $\rightarrow$  MASSIMO O MINIMO SFORTO PRINCIPALE

DATO  $[\underline{\underline{\sigma}}]$   $\text{MAX} \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} \leq k'$  E  $\text{MIN} \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} \geq -k''$

[N.B. IN CASO DI UGUALE NEUTRALITA' A TRAZIONE E COMPRESIONE]  
 $\text{MAX} \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} \leq k$

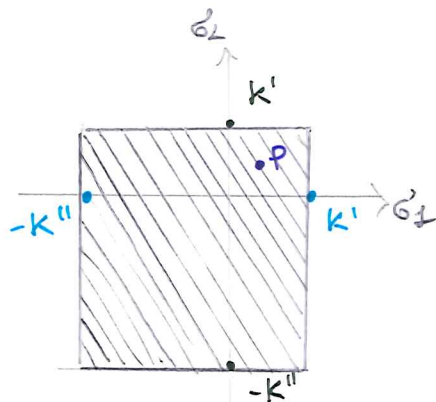


CONDEFINIAMO UNO SPAZIO  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  [SPAZIO DI HAIG-WESTERGAARD]

INDIVIDUAMO 3 COPPIE DI PIANI CHE INTERSECONO GLI ASSI NEI PUNTI DI VALORE  $k'$  E  $-k''$   
 SE IL PUNTO P E' ALL'INTERNO DEL CUBO, SIAMO IN UNA SITUAZIONE DI SICUREZZA

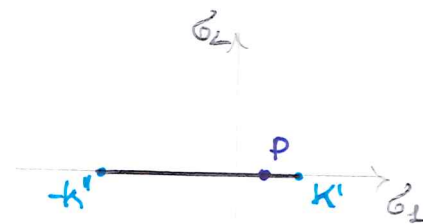
P RAPPRESENTA LO STATO DI SFORTO  $P = (\sigma_1^P, \sigma_2^P, \sigma_3^P)$

NEC CASO DI STATO DI SFORTO PIANO  $\sigma_3 = 0$



$\text{MAX} \{ \sigma_1, \sigma_2 \} \leq k'$  e  $\text{MIN} \{ \sigma_1, \sigma_2 \} \geq -k''$

NEC CASO DI STATO DI SFORTO ELONGAZIONE  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

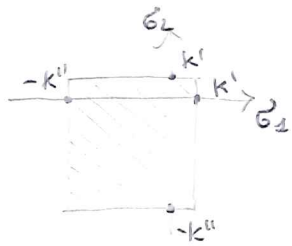


$-k'' \leq \sigma_1 \leq k'$

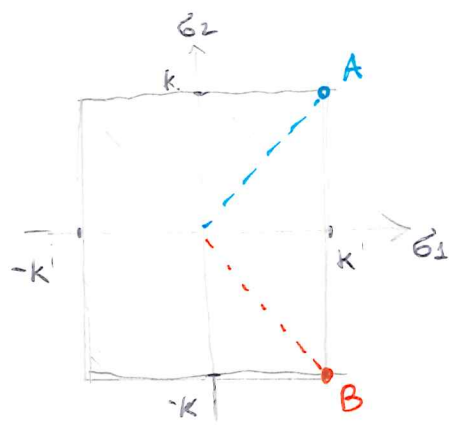
INDIVIDUA LE CONDIZIONI DI SICUREZZA NEL CASO ELONGAZIONE

CRITERIO DI BILANCIA

IL CRITERIO DI GAUSSO - RANKINE È IL PIÙ ANTICO E SEMPLICE, HA MOLTE LIMITAZIONI  
 PUÒ ANDARE BENE PER MATERIALI FUSILI, IN CUI IL CRITERIO DI DEFORMAZIONE È DIVENUTO IDENTICO A QUELLO A TRAZIONE E  $K' \neq K''$



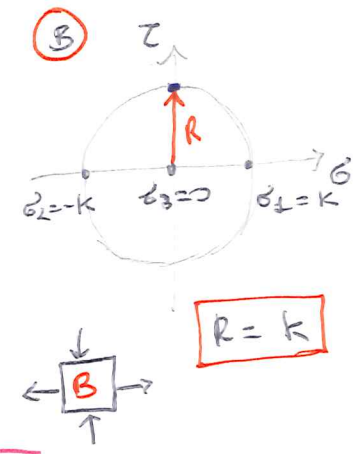
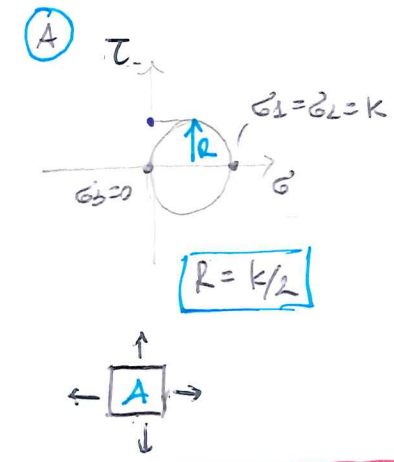
NEL CASO DI MATERIALI DUTTI, INVECE, PUÒ PORTARE A DUE SITUAZIONI NON ATTENDIBILI:



**A**  $\sigma_1 = K'$   
 $\sigma_2 = K'$

**B**  $\sigma_1 = K$   
 $\sigma_2 = -K$

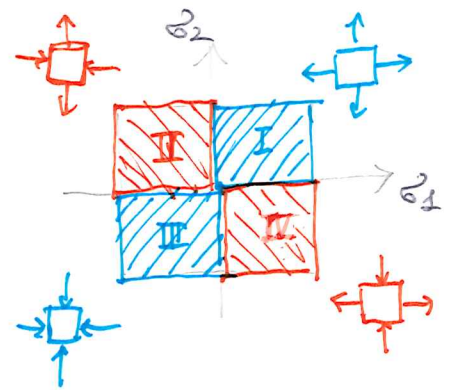
LO STATO DI TENSIONE  
 A E QUELLO B  
 SAREBBERO UGUALMENTE  
 IN PERICOLO, MA...



**\* B È PIÙ PERICOLOSO DI A**

NEI QUADRANTI IN CUI  $\sigma_1$  E  $\sigma_2$  HANNO LO STESSO SEGNO  
 IL CRITERIO VA BENE

NEI QUADRANTI IN CUI  $\sigma_1$  E  $\sigma_2$  HANNO SEGNI DIVERSI,  
 L'APPLICAZIONE NON VA BENE



CRITERI DI SICUREZZA

UNA PRIMA EVOLUZIONE DEL CRITERIO DI CAULCO-RANKINE È IL:

II CRITERIO DI GASHOF → CIP MASSIMA O MINIMA DILATAZIONE

\* LEGGE DI HOOKE

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 = \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 = \frac{1}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases}$$

IN CONDIZIONI PIANO-STRESS ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \sigma_1 \rightsquigarrow \epsilon' = \frac{1}{E} k = \frac{k'}{E} \\ \sigma - \epsilon'' &= \frac{1}{E} (-k'') = -\frac{k''}{E} \end{aligned}$$

$$\text{MAX } \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \} \leq \epsilon' = \frac{k'}{E} *$$

$$\text{MIN } \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \} \geq \epsilon'' = -\frac{k''}{E} *$$

N.B.  $k' = k'' = k$  MATERIALI DUTTI

$$\text{MAX } \{ |\epsilon_1|, |\epsilon_2|, |\epsilon_3| \} \leq \epsilon = \frac{k}{E} *$$

N.B.  $\epsilon'$  E  $\epsilon''$  SONO QUANTITÀ POSITIVE!

SI PUÒ PARLARE DI TRE DEFORMAZIONI AGLI ANGOLI:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} \sigma_{id1} \\ \text{ANALOGAMENTE } \epsilon_2 &= \frac{1}{E} \sigma_{id2} \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} \sigma_{id3} \end{aligned}$$

CON  $\sigma_{id} =$  TENSIONE IDEALE → SPORZO PIANO-STRESS CORRISPONDENTE CHE PRODUCE LA MASSIMA DILATAZIONE

ANCHE IL CRITERIO PUÒ ESSERE ESPRESSO IN FUNZIONE DELLE TENSIONI IDEALI  $\sigma_{id}$ :

$$\text{MAX } \left\{ \frac{1}{E} \sigma_{id1}, \frac{1}{E} \sigma_{id2}, \frac{1}{E} \sigma_{id3} \right\} \leq \frac{k'}{E}$$

$$\text{MAX } \{ \sigma_{id1}, \sigma_{id2}, \sigma_{id3} \} \leq k'$$

ANALOGAMENTE:  $\text{MIN } \{ \sigma_{id1}, \sigma_{id2}, \sigma_{id3} \} \geq -k''$

N.B.  $k' = k'' = k$  MATERIALI DUTTI

$$\text{MAX } \{ |\sigma_{id1}|, |\sigma_{id2}|, |\sigma_{id3}| \} \leq k$$

POSSIAMO RAPPRESENTARLE ANCHE PER IL CRITERIO DI GASHOF IL DOMINIO, INDIVIDUANDO 3 COPPIE DI PIANI CHE INTERSECANO GLI ASSI 1, 2, 3 I PIANI SONO PARALLELI TRA LORO A 2 A 2, MA NON PIÙ PERPENDICOLARI AGLI ASSI, GENERANDO UN CUBO SCHEMATICO

NEL CASO DELLO STATO PIANO DI SPORZO  $\sigma_3 = 0$  MA  $\sigma_{id3} \neq 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} \sigma_{id1} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \\ \sigma_{id2} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \\ \sigma_{id3} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{MAX } \{ \sigma_1 - \nu \sigma_2, \sigma_2 - \nu \sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \leq k' \quad \text{I}$$

$$\text{MIN } \{ \sigma_1 - \nu \sigma_2, \sigma_2 - \nu \sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \geq -k'' \quad \text{II}$$

# CRITERIO DI GRASHOF PER IL CASO PIANO.

LA CONDIZIONE (I) RICHIEDE CHE SIANO CONTEMPORANEAMENTE SODDISFATTE QUESTE 3 CONDIZIONI:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \nu \sigma_2 &\leq k' & [1] & & \sigma_2 - \frac{1}{\nu} \sigma_1 &\geq -\frac{k'}{\nu} & & \sigma_2 &\geq \frac{\sigma_1}{\nu} - \frac{k'}{\nu} & [1'] \\ \sigma_2 - \nu \sigma_1 &\leq k' & [2] & \Rightarrow & \sigma_2 - \nu \sigma_1 &\leq k' & \Rightarrow & \sigma_2 &\leq \nu \sigma_1 + k' & [2'] \\ -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) &\leq k' & [3] & & \sigma_2 + \sigma_1 &\geq -\frac{k'}{\nu} & & \sigma_2 &\geq -\sigma_1 - \frac{k'}{\nu} & [3'] \end{aligned}$$

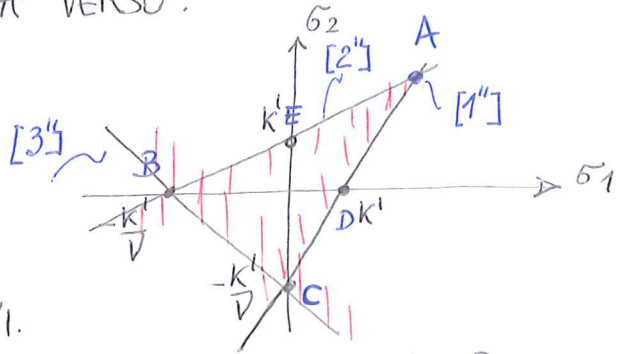
LE 3 DISEGUAGLIANZE [1'], [2'], [3'] DISCENDONO DALLE [1], [2], [3] TENENDO CONTO CHE, MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI DI UNA DISEGUAGLIANZA PER UNA COSTANTE NEGATIVA, LA DISEGUAGLIANZA CAMBIA VERSO.

NEL PIANO  $(\sigma_1, \sigma_2)$  LE 3 RETTE

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\nu} - \frac{k'}{\nu} \quad [1'']$$

$$\sigma_2 = \nu \sigma_1 + k' \quad [2'']$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1 - \frac{k'}{\nu} \quad [3'']$$



INDIVIDUANO CIASCUNA 2 SEMIPIANI.

IN PARTICOLARE, LA [1''] INTERSECA L'ASSE  $\sigma_2$  ( $\sigma_1=0$ ) NEL PUNTO  $C \equiv (0, -\frac{k'}{\nu})$  E L'ASSE  $\sigma_1$  ( $\sigma_2=0$ ) NEL PUNTO  $D \equiv (k', 0)$ ; LA [2''] INTERSECA L'ASSE  $\sigma_2$  ( $\sigma_1=0$ ) NEL PUNTO  $E \equiv (0, k')$  E L'ASSE  $\sigma_1$  ( $\sigma_2=0$ ) NEL PUNTO  $B \equiv (-\frac{k'}{\nu}, 0)$ ; LA [3''] INTERSECA L'ASSE  $\sigma_2$  ( $\sigma_1=0$ ) NEL MEDESIMO PUNTO  $C \equiv (0, -\frac{k'}{\nu})$  E L'ASSE  $\sigma_1$  ( $\sigma_2=0$ ) NEL PUNTO  $B \equiv (-\frac{k'}{\nu}, 0)$ .

L'INTERSEZIONE FRA LE RETTE [1''] E [2''] SI COLLOCA NEL PUNTO A, DEFINITO DALLA CONDIZIONE:

$$\frac{\sigma_1}{\nu} - \frac{k'}{\nu} = \nu \sigma_1 + k' \Rightarrow \sigma_1 \left( \frac{1}{\nu} - \nu \right) = k' \left( 1 + \frac{1}{\nu} \right) \quad \text{OVERO} \quad \sigma_1 \frac{1-\nu^2}{\nu} = k' \frac{1+\nu}{\nu}$$

DA CUI, SEMPLIFICANDO:  $\sigma_1 (1-\nu)(1+\nu) = k' (1+\nu) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{k'}{1-\nu}$ , MENTRE

$$\sigma_2 = \nu \frac{k'}{1-\nu} + k' = \frac{[\nu + (1-\nu)] k'}{1-\nu} = \frac{k'}{1-\nu}, \quad \text{SICCHE' } A \equiv \left( \frac{k'}{1-\nu}, \frac{k'}{1-\nu} \right)$$

ANALOGAMENTE SI PROCEDE CON LA CONDIZIONE (II) CHE RICHIEDE ANCORA IL CONTEMPORANEO SODDISFACIMENTO DI QUESTE 3 CONDIZIONI:

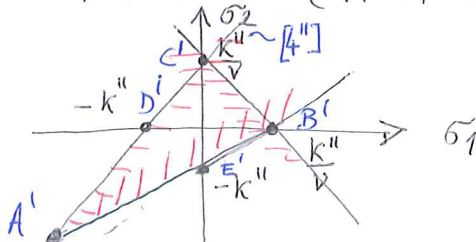
$$\begin{aligned} \sigma_1 - \nu \sigma_2 &\geq -k'' & [4] & & \sigma_2 - \frac{\sigma_1}{\nu} &\leq \frac{k''}{\nu} & & \sigma_2 &\leq \frac{\sigma_1}{\nu} + \frac{k''}{\nu} & [4'] \\ \sigma_2 - \nu \sigma_1 &\geq -k'' & [5] & \Rightarrow & \sigma_2 - \nu \sigma_1 &\geq -k'' & \Rightarrow & \sigma_2 &\geq \nu \sigma_1 - k'' & [5'] \\ -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) &\geq -k'' & [6] & & \sigma_2 + \sigma_1 &\leq \frac{k''}{\nu} & & \sigma_2 &\leq -\sigma_1 + \frac{k''}{\nu} & [6'] \end{aligned}$$

ANALOGAMENTE A QUANTO SOPRA VISTO, NEL PIANO  $(\sigma_1, \sigma_2)$  LE 3 RETTE

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\nu} + \frac{k''}{\nu} \quad [4'']$$

$$\sigma_2 = \nu \sigma_1 - k'' \quad [5'']$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1 + \frac{k''}{\nu} \quad [6'']$$



INDIVIDUANO CIASCUNA 2 SEMIPIANI.

SI VERIFICA CHE:

- LA RETTA [4"] INTERSECA GLI ASSI NEI PUNTI  $C' \equiv (0, \frac{k''}{v})$  E  $D' \equiv (-k'', 0)$ ;
- LA RETTA [5"] INTERSECA GLI ASSI NEI PUNTI  $E' \equiv (0, -k'')$  E  $B' \equiv (\frac{k''}{v}, 0)$ ;
- LA RETTA [6"] INTERSECA GLI ASSI NEI PUNTI  $C' \equiv (0, \frac{k''}{v})$  E  $B' \equiv (\frac{k''}{v}, 0)$ .

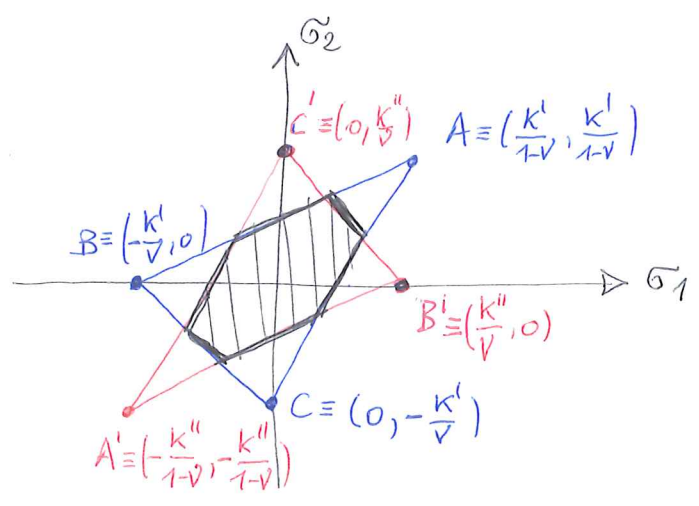
LE RETTE [4"] E [5"] SI INTERSECANO NEL PUNTO A', LE CUI COORDINATE SONO DEFINITE DALLE CONDIZIONI:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{v} + \frac{k''}{v} = v\sigma_1 - k'' \\ \sigma_2 = v\sigma_1 - k'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1(v - \frac{1}{v}) = k''(1 + \frac{1}{v}); & \sigma_1 \frac{v^2 - 1}{v} = k'' \frac{v+1}{v} \\ \text{E, SEMPLIFICANDO } \sigma_1 (v-1)(v+1) = k''(v+1) \\ \text{OVVERO } \sigma_1 = \frac{k''}{v-1} = -\frac{k''}{1-v} \end{cases}$$

SI HA POI  $\sigma_2 = -v \frac{k''}{1-v} - k'' = \frac{-v - (1-v)}{1-v} k'' = \frac{-v-1+v}{1-v} k'' = \frac{-1-v}{1-v} k'' = -\frac{k''}{1-v}$

DUNQUE  $A' \equiv (-\frac{k''}{1-v}, -\frac{k''}{1-v})$

COMBINANDO LE CONDIZIONI (I) E (II) SI OTTIENE:



CRITERI DI SIGNIFICAZZA

**I**  $\max \{ \beta_1 - \nu \beta_2, \beta_2 - \nu \beta_1, -\nu(\beta_1 + \beta_2) \} \leq K'$

DETERMINA 3 RETTE CHE SI INTERSECANO, A 2 A 2, NEI PUNTI:

$A = \left( \frac{K'}{1-\nu}, \frac{K'}{1-\nu} \right); B = \left( -\frac{K'}{\nu}, 0 \right); C = \left( 0, -\frac{K'}{\nu} \right)$

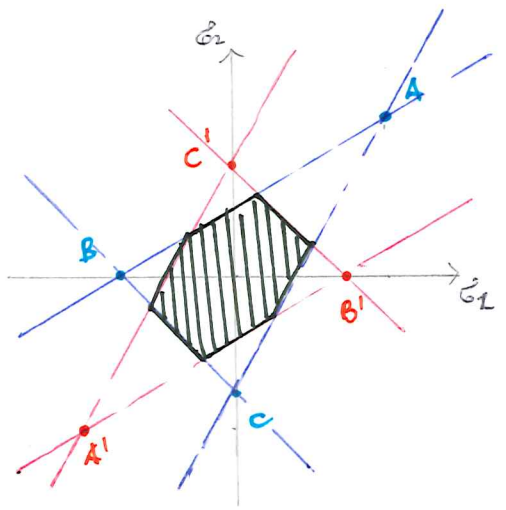
**II**  $\min \{ \beta_1 - \nu \beta_2, \beta_2 - \nu \beta_1, -\nu(\beta_1 + \beta_2) \} \geq -K''$

DETERMINA 3 RETTE CHE SI INTERSECANO, A 2 A 2, NEI PUNTI:

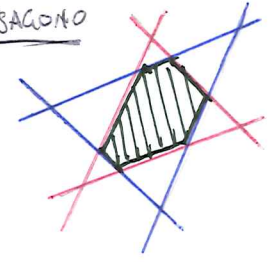
$A' = \left( \frac{-K''}{1-\nu}, \frac{-K''}{1-\nu} \right); B' = \left( +\frac{K''}{\nu}, 0 \right); C' = \left( 0, +\frac{K''}{\nu} \right)$

LA REGIONE SIGNA È QUELLA COMPRESA DALL'INTERSEZIONE DELLE 2 REGIONI, COMPRESA TRA LE 3 RETTE DETERMINATE DA **I** E LE 3 RETTE DETERMINATE DA **II**

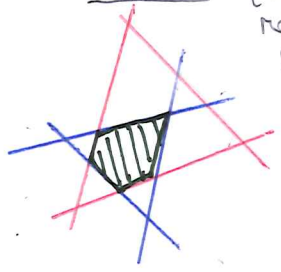
LA FORMA EFFETTIVA DIPENDE DAL VALORE DEL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE  $\nu$ , OLTRE CHE DAI VALORI DI  $K'$  E  $K''$



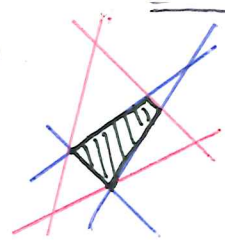
ESAGONO



PENTAGONO (1 TRIANGOLO PIU' PICCOLO)

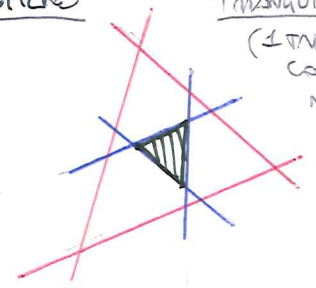


QUADRILATERO

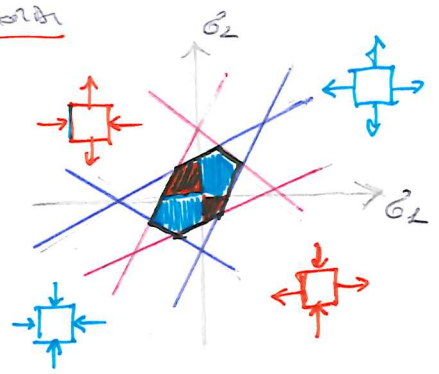


TRIANGOLO

(1 TRIANGOLO COMPRESO NEGLI ALTRI)



RISPETTO AL CRITERIO DI GAUSSI-MARKINE, IL CRITERIO DI QUADROF TIENE CONTO DELLE DIFFERENZE CHE CI SONO TRA I QUADRANTI IN CUI  $\beta_1$  E  $\beta_2$  SONO CONCORDI E QUELLI IN CUI SONO DISCORDI



LE ARRE  $\beta_1$  SONO PIU' GRANDI DELLE  $\beta_2$   
 ANCHE IL CRITERIO DI QUADROF È PIU' PERO' PIU' ADATTO AI SISTEMI FISICI CHE AI SISTEMI SOCIALI

CRITERIO DI SICUREZZA

NEL CASO DI MATERIE DUTTE, IL COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE È LIMITATO SUPERIORMENTE DAL MASCIUNGIMENTO DELLA TENSIONE DI SNERVAMENTO  $\sigma_s$ . COL MASCIUNGIMENTO AD UN STATO DI TENSIONE CARATTERIZZATO DALLE 3 COMPONENTI PRINCIPALI  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  NON NULLE SI PONE IL PROBLEMA DI DEFINIRE QUALI COMBINAZIONI DI ESSE PRODCA SNERVAMENTO DEL MATERIALE. DA EVIDENTE SPERIMENTAZIONE, LO SNERVAMENTO DEL MATERIALE NON È INFLUENZATO DA UN REGIME DI DEFORMAZIONE DI TIPO IDROSTATICO. NEL CASO DEI MATERIE DUTTE, LA GRANDEZZA INDICE DEL PERICOLO DA PRENDERE IN CONSIDERAZIONE SONO LE TENSIONI TANGENZIALI.

III CRITERIO DI TRASCA → CIP MASSIMO SFORTO TANGENZIALE

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \leq \frac{K}{2}$$

[N.B. MATERIALI DUTTE  $K' = K'' = K$  CORRISPONDENTE DI TRASCIA A COMPRESIONE E A TRAZIONE]

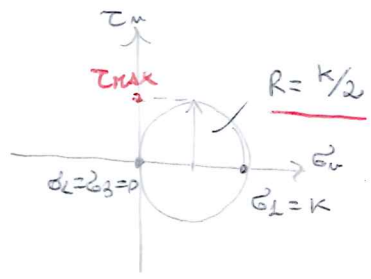
IL VALORE LIMITE DELLA TENSIONE TANGENZIALE  $\tau_{max}$  IN REGIME ELASTICO LINEARE DIVENTA  $\tau_{max} \leq K/2$

ALLORA LA VERIFICA DI SICUREZZA DEL MATERIALE RISULTA SODDISFATTA QUANDO:

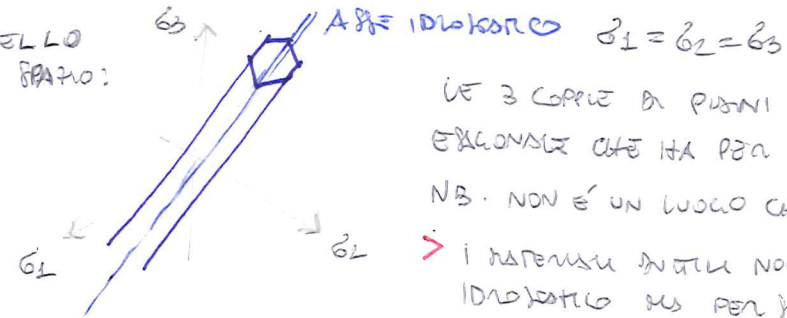
$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} \leq K$$

NEL CASO MONOASSIALE

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



NELLO STATO:



LE 3 COPPIE DI PUNTI DEFINISCONO UN TRIANGOLO EQUILATERO CHE HA PER ASSE, L'ASSE IDROSTATICO. NB. NON È UN LUOGO CHIUSO, MA APERTO

> I MATERIALI DUTTE NON VANNO IN CURVA PER SFORTO IDROSTATICO MA PER SFORTO DEVIATORICO

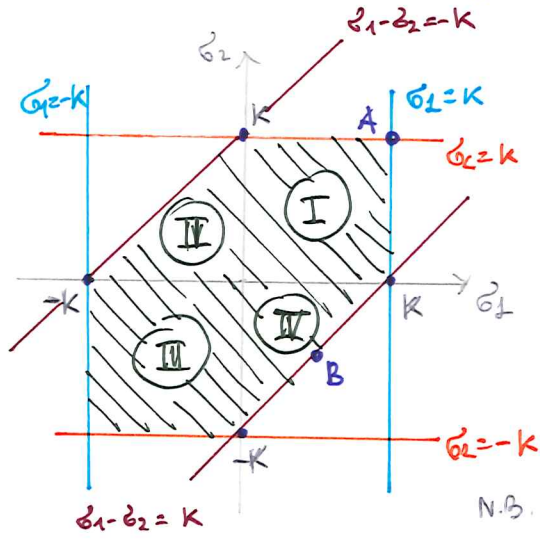
NEL CASO DI STATO PIANO

DI TENSIONE  $\sigma_3 = 0$

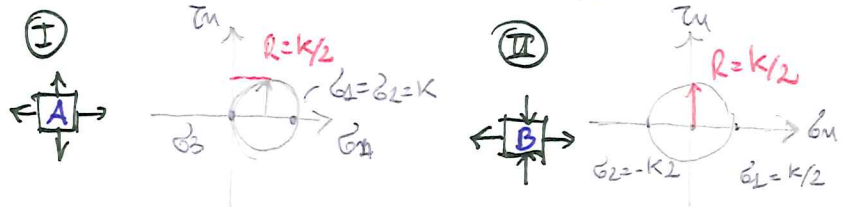
$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} \leq K$$

DA LUOGO A 3 COPPIE DI RETTE:

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| = K &< \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = K \\ \sigma_1 - \sigma_2 = -K \end{cases} \\ |\sigma_1| = K &< \begin{cases} \sigma_1 = K \\ -\sigma_1 = K \end{cases} \\ |\sigma_2| = K &< \begin{cases} \sigma_2 = K \\ -\sigma_2 = K \end{cases} \end{aligned}$$



NEI QUADRANTI I E III IL CRITERIO DI TRASCIA COINCIDE CON QUELLO DI CAULLEI-MAXWELL; NEI QUADRANTI II E IV SI MASCIUNGA LA FRONTIERA PURA, PER IL VALORE  $K/2$



IN A E B IL VALORE DI  $\tau_{max}$  È LO STESSO  $\tau_{max} = K/2$

N.B. NEL PIANO L'ESAGONO DI TRASCIA NON È NECESSARIO, PERCHÉ L'ASSE IDROSTATICO NON COINCIDE NE È PARALLELO CON L'ASSE  $\sigma_3$

# CRITERIO DI HUBER - HENCKY - VON MISES

GRANDEZZA INDICE DEL PERICOLO? MASSIMO LAVORO DEL DEVIATORE DI FORMA

SCOMPOSIZIONE DEL TENSORE DEGLI SFORZI (SCRITTO NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = p \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE IDROSTATICA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE DEVIATORICA}} = p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}$$

DOVE  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  È LO SFORZO NORMALE MEDIO:  $p = \frac{I_1}{3}$  [CIOÈ  $3p = I_1$ ]

CON  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , INVARIANTE PRIMO DI  $\underline{\underline{\sigma}}$

$$s_1 = \sigma_1 - p = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}; \quad s_2 = \sigma_2 - p = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}; \quad s_3 = \sigma_3 - p = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

RICORDANDO CHE  $I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$  È L'INVARIANTE SECONDO DI  $\underline{\underline{\sigma}}$ , SI POSSONO ANALOGAMENTE DEFINIRE GLI INVARIANTI PRIMO E SECONDO DI  $\underline{\underline{S}}$ :

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3p = 0;$$

$$J_2 = -(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3) = -[(\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p) + (\sigma_1 - p)(\sigma_3 - p) + (\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p)] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3p^2] =$$

$$= -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - \underbrace{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}_{= 6p} + 3p^2] = -[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 3p^2]$$

$$= -\underbrace{[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3]}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{3}(3p)^2}_{I_1^2} = I_2 + \frac{1}{3}I_1^2$$

IN MODO ANALOGO SI SCOMPONE IL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , SEMPRE SCRITTO NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_V}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE SFERICA}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}}_{\text{PARTE DEVIATORICA}} = \frac{\epsilon_V}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{E}}$$

DOVE  $\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = I_1'$  È LA DEFORMAZIONE VOLUMETRICA, CON  $I_1'$  INVARIANTE PRIMO DI  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , MENTRE

$$\epsilon_1 = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}{3}; \quad \epsilon_2 = \epsilon_2 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3}{3}; \quad \epsilon_3 = \epsilon_3 - \frac{\epsilon_V}{3} = \frac{2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{3}$$

RICORDANDO CHE  $I_2' = -(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3)$  È L'INVARIANTE SECONDO DI  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , SI POSSONO DEFINIRE GLI ANALOGHI INVARIANTI,  $J_1'$  E  $J_2'$  DI  $\underline{\underline{\epsilon}}$ :

$$J_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3 \frac{\varepsilon_V}{3} = 0;$$

$$\begin{aligned} J_2' &= -[\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3] = -\left[ \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_V}{3}\right) \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_V}{3}\right) + \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_V}{3}\right) \left(\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_V}{3}\right) + \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_V}{3}\right) \left(\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_V}{3}\right) \right] = \\ &= -\left[ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_V}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 3 \left(\frac{\varepsilon_V}{3}\right)^2 \right] = \\ &= -\left[ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \frac{2}{3} \varepsilon_V^2 + \frac{1}{3} \varepsilon_V^2 \right] = -\left[ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \right] + \frac{1}{3} \varepsilon_V^2 = I_2' + \frac{1}{3} (I_1')^2 \end{aligned}$$

ORA, PER IL LEGAME ELASTICO LINEARE ISOTROPO SI HA:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\underbrace{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}_{I_1}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} 3p$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\underbrace{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}_{I_1}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} 3p$$

$$[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1 = 3p]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\underbrace{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}_{I_1}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} 3p$$

ALLORA

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E} (\underbrace{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}_{I_1}) - \frac{3\nu}{E} (\underbrace{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}_{I_1}) = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

OVVERO ANCHE

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E} \cdot 3p \quad \text{E DUNQUE} \quad \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{1-2\nu}{E} p$$

PERTANTO

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{3\nu}{E} p - \frac{1-2\nu}{E} p = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{1+\nu}{E} p = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_1 - p]$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{3\nu}{E} p - \frac{1-2\nu}{E} p = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{1+\nu}{E} p = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_2 - p]$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{3\nu}{E} p - \frac{1-2\nu}{E} p = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{1+\nu}{E} p = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_3 - p]$$

L'ENERGIA TOTALE, CORRISPONDENTE AL LAVORO IMMAGAZZATO DURANTE LA DEFORMAZIONE VALE:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{TOT} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (S_1 + p) \left( \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_V}{3} \right) + (S_2 + p) \left( \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_V}{3} \right) + (S_3 + p) \left( \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_V}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (S_1 \varepsilon_1 + S_2 \varepsilon_2 + S_3 \varepsilon_3) + p (\underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{J_1' = 0}) + \frac{\varepsilon_V}{3} (\underbrace{S_1 + S_2 + S_3}_{J_1 = 0}) + 3p \cdot \frac{\varepsilon_V}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{S_1 \varepsilon_1 + S_2 \varepsilon_2 + S_3 \varepsilon_3}_{\mathcal{E}_{DEV}} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{p \cdot \varepsilon_V}_{\mathcal{E}_{VOL}} \right\} = \mathcal{E}_{DEV} + \mathcal{E}_{VOL} \end{aligned}$$

DOVE  $\mathcal{E}_{VOL}$  E' L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER VARIAZIONE DI VOLUME ED  $\mathcal{E}_{DEV}$  LA ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER VARIAZIONE DI FORMA  
SI NOTI CHE GLI SFORZI DEVIATORICI COMPONO LAVORO NULLO PER LA DEFORMAZIONE VOLUMERICA E LO SFORZO IDROSTATICO COMPIE LAVORO NULLO PER LA DEFORMAZIONE DEVIATORICA.

DI CONSEGUENZA NON ESISTE ALCUN ACCOPPIAMENTO FRA  $\epsilon_{DEV}$  ED  $\epsilon_{VOL}$ .  $\frac{3}{3}$   
 SI HA COSÌ:

$$\begin{aligned}\epsilon_{DEV} &= \frac{1}{2} \left\{ S_1 \epsilon_1 + S_2 \epsilon_2 + S_3 \epsilon_3 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_1 - p) \left[ \frac{1+\nu}{E} (\sigma_1 - p) \right] + (\sigma_2 - p) \left[ \frac{1+\nu}{E} (\sigma_2 - p) \right] + (\sigma_3 - p) \left[ \frac{1+\nu}{E} (\sigma_3 - p) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left\{ (\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3p^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3p^2 \right\}\end{aligned}$$

ORA,  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = 9p^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$

PERTANTO

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left\{ 9p^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) - 3p^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left\{ 6p^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right\}$$

SICCHÉ

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2} \frac{2(1+\nu)}{E} \left\{ 3p^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \left\{ \frac{1}{3} (3p)^2 + I_2 \right\} = \frac{1}{2G} \left\{ I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right\}$$

DUNQUE

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2G} \left\{ I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right\} = \frac{1}{2G} J_2$$

IN CONDIZIONE DI SFORZO LIMITE MONOASSIALE SI HA  $\sigma_1 = k$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = 0$  CON  $k = \text{SFORZO AMMISSIBILE}$

PERTANTO  $I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = -(k \cdot 0 + k \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0$   
 $\frac{1}{3} I_1^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{3} (k + 0 + 0)^2 = \frac{1}{3} k^2$

DUNQUE

$$\epsilon_{DEV} = \frac{1}{2G} \left\{ 0 + \frac{1}{3} k^2 \right\} = \frac{1}{6G} k^2$$

LA VERIFICA DI RESISTENZA RICHIEDE QUINDI CHE

$$\epsilon_{DEV} = \frac{6 \cdot 1}{2G} \left\{ I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right\} \leq \epsilon_{DEV} = \frac{6 \cdot 1}{6G} k^2 \Rightarrow 3 \left\{ I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right\} \leq k^2 \Rightarrow \sqrt{3 \left\{ I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right\}} \leq k$$

E, PER COMPONENTI

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq k$$

$$\sqrt{3I_2 + I_1^2} \leq k$$

PASSANDO A COMPONENTI CARTESIANE SI PUÒ SCRIVERE:

$$\begin{aligned}\epsilon_{DEV} &= \frac{1}{2G} \left\{ I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \right\} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{3} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] \right\} \\ &= \frac{1}{6G} \left\{ 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \right\} \\ &= \frac{1}{6G} \left\{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \right\}\end{aligned}$$

E LA VERIFICA DI RESISTENZA DIVIENE:

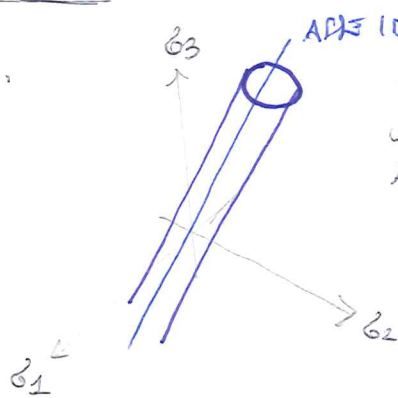
$$\frac{1}{6G} \left\{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \right\} \leq \frac{1}{6G} k^2$$

CIOÈ

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)} \leq k$$

CITERIO DI SICUREZZA

NELLO STATO:

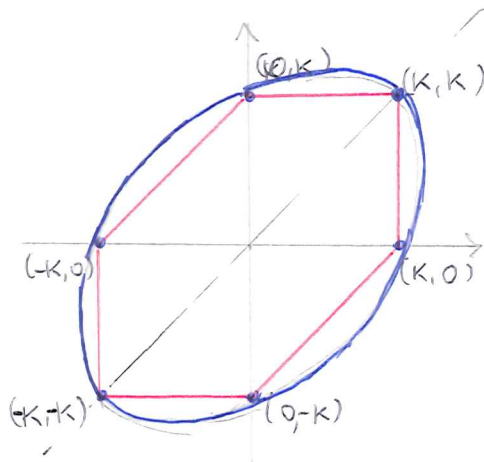


ASSE IDROSTATICO  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$   
 IL CITERIO DEFINISCE  
 UN CILINDRO LIMITATO  
 AVENTE COME ASSE L'ASSE  
 IDROSTATICO

NEL CASO DELLO STATO  
 PIANO DI TENSIONE

$\sigma_3 = 0$

$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq K$   $\rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = K^2$



ESEMPIO DA  
 PIRE A CAR

$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -120 & 70 & 0 \\ 70 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  MPa  $K = 200$  MPa

ESEGUIRE LA VERIFICA  
 UTILIZZANDO I 4  
 CITERI DI SICUREZZA

(\* IN FATTI SE  $\underline{\underline{\epsilon}}_{DEV} = \frac{1}{6G} [3I_2 + I_1^2]$   
 $= \frac{1}{6G} \{ 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \}$   
 $\underline{\underline{\epsilon}}_{DEV} = \frac{1}{6G} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]$

AL CITERIO

N.B. ANALOGAMENTE A TRESCA, NEL PIANO  $\sigma_1 \sigma_2$  NON ABBIAMO UN CERCIO, PERCHÉ L'ASSE IDROSTATICO È DIVENTO E NON PARALLELO ALL'ASSE  $\sigma_3$

EQUAZIONE DI UN'ELLISSE CHE HA L'ASSE MAGGIORE ORIENTATO CON LA BIFASIONE DEL I E III QUADRANTE

N.B. L'ELLISSE DI VON MISES È CIRCOSCRITTA ALL'ESAGONO DI TRESCA  
 PARI INDETTI PER I PUNTI IN CORNER SULLE RETTE DI TRESCA

$\rightarrow$  SE  $\sigma_1 = -\sigma_2$   $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = K^2 \rightarrow 3\sigma_1^2 = K^2 \rightarrow \sigma_1 = \frac{K}{\sqrt{3}} > \frac{K}{2}$  (TRESCA)  
 C'È PU' TANGENTE NEI QUADRANTI II E III MODO A TRESCA

N.B. SI PUO' USARE IL CITERIO DI VON MISES DIRETTAMENTE IN COMPONENTI CARTESIANE

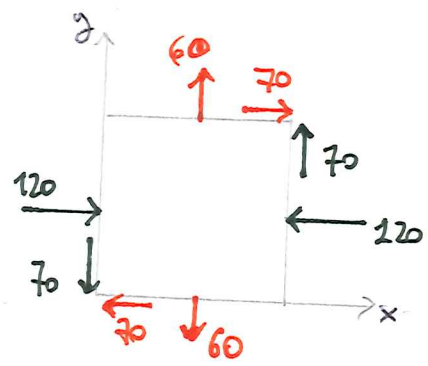
$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2} \leq K$  (\*)

E NEL CASO PIANO:  $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$

$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq K$

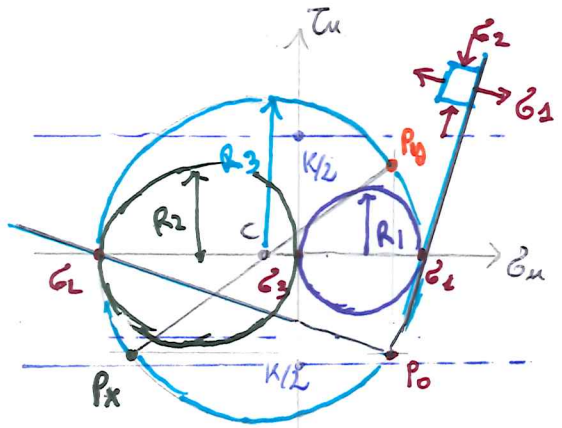
**ESERPIO APPLICATIVO**

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -120 & 70 & 0 \\ 70 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



$\sigma_x = -120 \text{ MPa}$   
 $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$   
 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 70 \text{ MPa}$

$K = \text{TENSIONE AMMISSIBILE} = \frac{\sigma_0}{\lambda}$   
 $\sigma_0 = \text{TENSIONE DI INNEVAMENTO [MATERIALE DUTILE]}$   
 $\lambda = \text{COEFF. DI SICUREZZA } \lambda > 1$   
 $K = 200 \text{ MPa}$

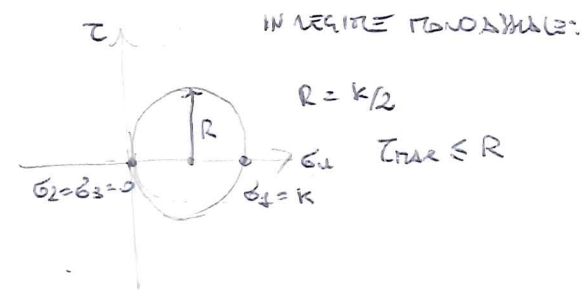


$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 84,018 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -144,018 \text{ MPa}$$

$\sigma_3 = 0$   
 $R_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = 114,018 \text{ MPa}$   
 $R_1 = |\sigma_3/2| = 72,009 \text{ MPa}$   
 $R_2 = |\sigma_2/2| = 72,009 \text{ MPa}$

$\tau_{max} \leq K/2 \rightarrow \tau_{max} \leq 100 \text{ MPa}$



**GAUZZO MANKINE**  
(NON VA BENE PER MATERIALI DUTILI)

$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leq K$

**QUADROF**  
(NON VA BENE PER MATERIALI DUTILI)

$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} \leq K$

NON TENGONO CONTO DELLE  $\tau_{max}$   
NON ADATTI PER MATERIALI DUTILI

**TRESCA**  
(MAX TENSIONE TANGENZIALE)

$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq K$

$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq K$   
 $\rightarrow 228,035 \leftarrow$

$228,035 > 200 \text{ MPa}$  NON VERIFICATO

**VOU MISES**  
(MAX TENSIONE TANGENZIALE MEDIA 0)

$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq K$

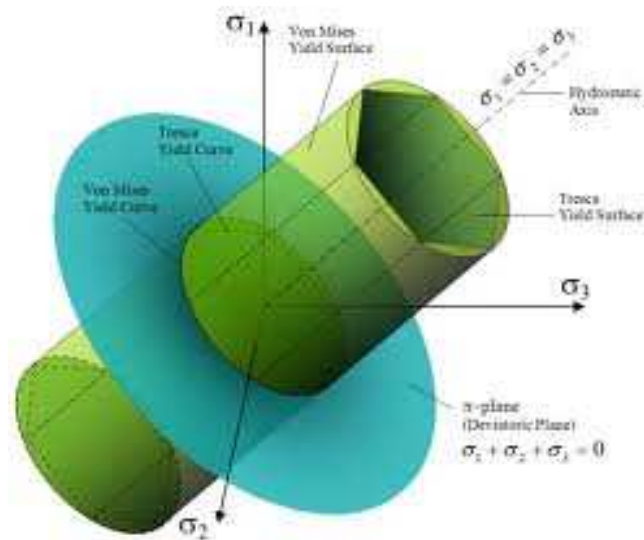
$\sqrt{(84,018)^2 + (-144,018)^2 - (84,018)(-144,018)} = \sqrt{33800,000} = 183,770 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa}$  VERIFICATO

$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_z + 3\tau_{xz}^2} \leq K$

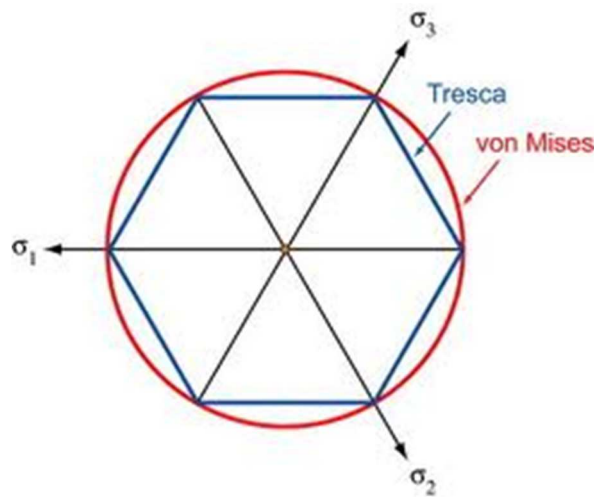
$\sqrt{(-120)^2 + (60)^2 - (-120)(60) + 3(70)^2} = \sqrt{33800,000} = 183,750 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa}$  VERIFICATO

MAX UNICO PER DEVIATORE DI FORMAZIONE

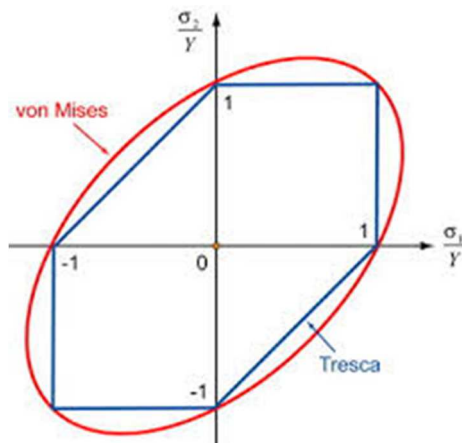
[N.B. STRESS MINORATO IN COMPONENTI PRINCIPALI E QUADRANTE]



Confronto fra i criteri di Tresca e di Huber-Hencky-von Mises nello spazio (3-D) delle tensioni principali (ovvero nello spazio di Haigh-Westergaard)



Confronto fra i criteri di Tresca e di Huber-Hencky-von Mises nel piano deviatorico



Confronto fra i criteri di Tresca e di Huber-Hencky-von Mises nel piano degli sforzi principali  $\sigma_1$ -  $\sigma_2$  (per stati di sforzo piano:  $\sigma_3 = 0$ )

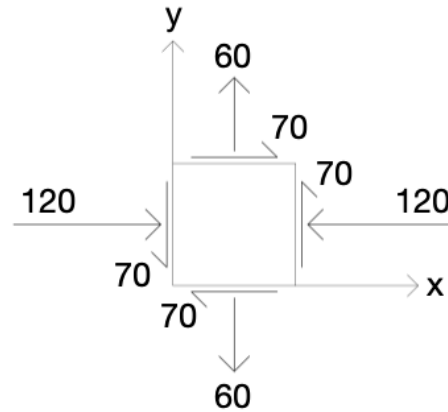
## ESERCIZIO

Assegnato lo stato di sforzo piano  $\sigma$  applicare i criteri di sicurezza e procedere alla verifica.

Proprietà del materiale:  $E = 200 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0.25$ .

Tensione ammissibile  $k = 200 \text{ MPa}$  ( $k' = k'' = k$ ).

$$\sigma = \begin{bmatrix} -120 & 70 & 0 \\ 70 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



Calcolo delle tensioni principali:

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 84.018 \text{ MPa}$$

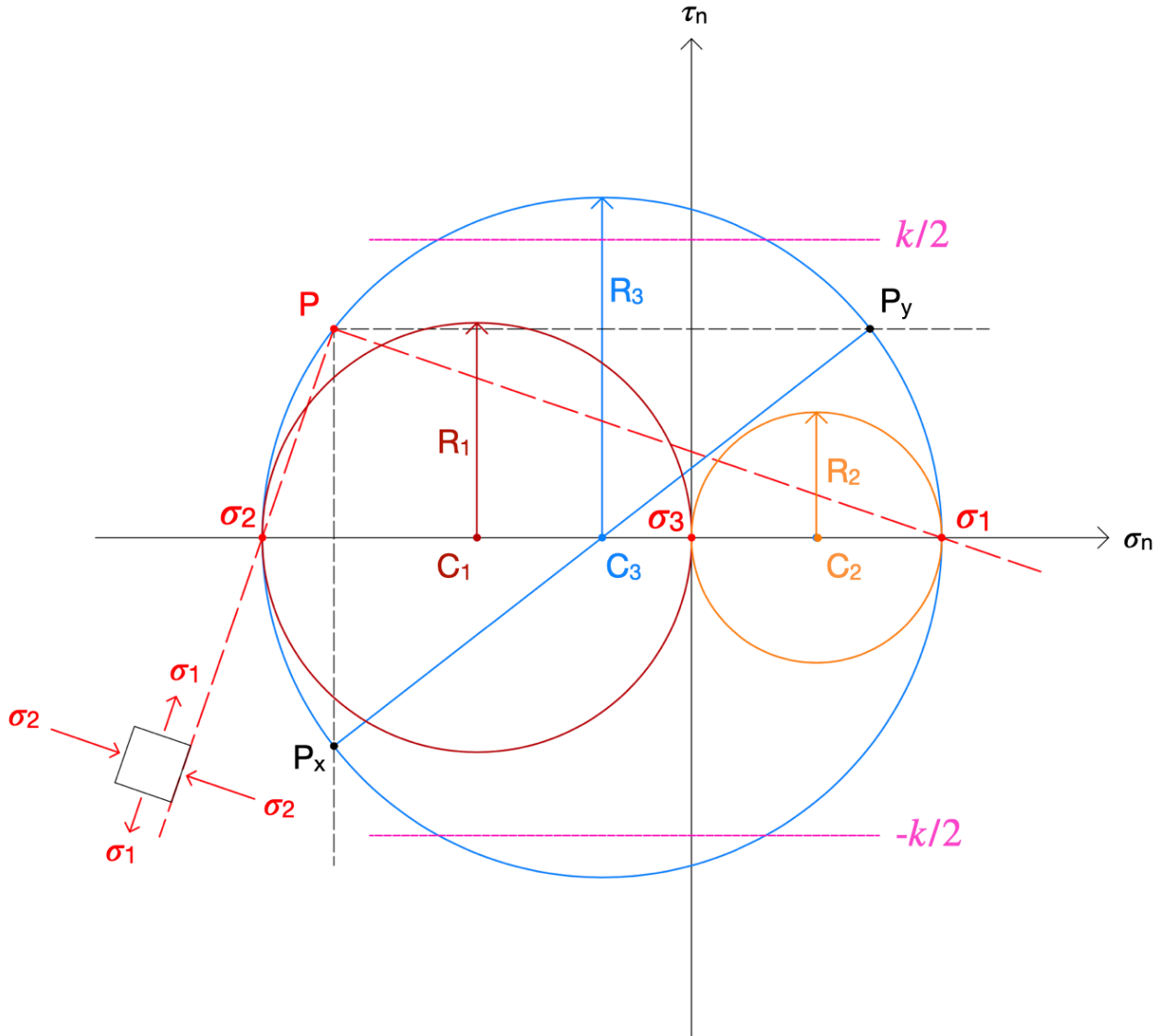
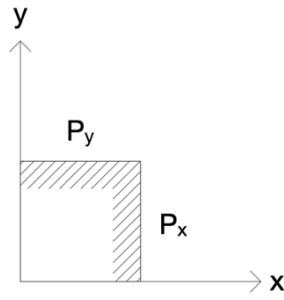
$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -144.018 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0.000 \text{ MPa}$$

Cerchi di Mohr:

$$P_x = (-120, -70)$$

$$P_y = (60, 70)$$



$$C_1 = \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad R_1 = \left| \frac{\sigma_2}{2} \right| = 72.009 \text{ MPa}$$

$$C_2 = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad R_2 = \left| \frac{\sigma_1}{2} \right| = 42.009 \text{ MPa}$$

$$C_3 = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \quad R_3 = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = 114.018 \text{ MPa}$$

Criterio di **Galilei-Rankine**, *GIP*: massima o minima tensione principale

$$MAX \{ \sigma_1, \sigma_2 \} \leq k' = k$$

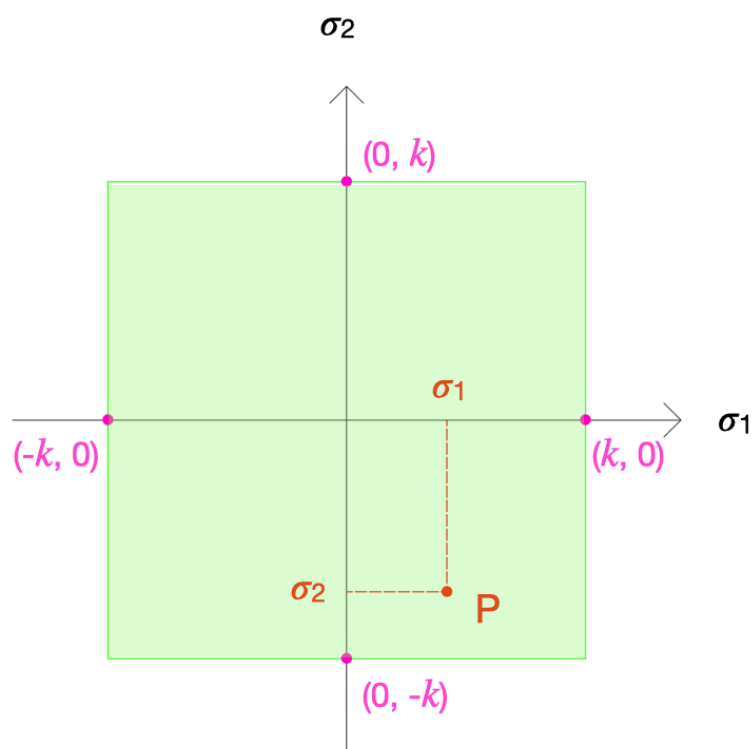
$$MIN \{ \sigma_1, \sigma_2 \} \geq -k'' = -k$$

$$MAX \{ 84.018, -144.018 \} \leq 200 \text{ MPa}$$

84.018 MPa < 200 MPa – **verificato**

$$MIN \{ 84.018, -144.018 \} \geq -200 \text{ MPa}$$

-144.018 MPa > -200 MPa – **verificato**



Criterio di **Grashof**, *GIP*: massima o minima dilatazione

$$\nu = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$MAX \{ \sigma_1 - \nu\sigma_2, \sigma_2 - \nu\sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \leq k' = k$$

$$MIN \{ \sigma_1 - \nu\sigma_2, \sigma_2 - \nu\sigma_1, -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \} \geq \bar{\nu}k'' = -k$$

$$MAX \{ 84.018 - 0.25(-144.018), -144.018 - 0.25(84.018), -0.25(84.018 - 144.018) \} \leq 200 \text{ MPa}$$

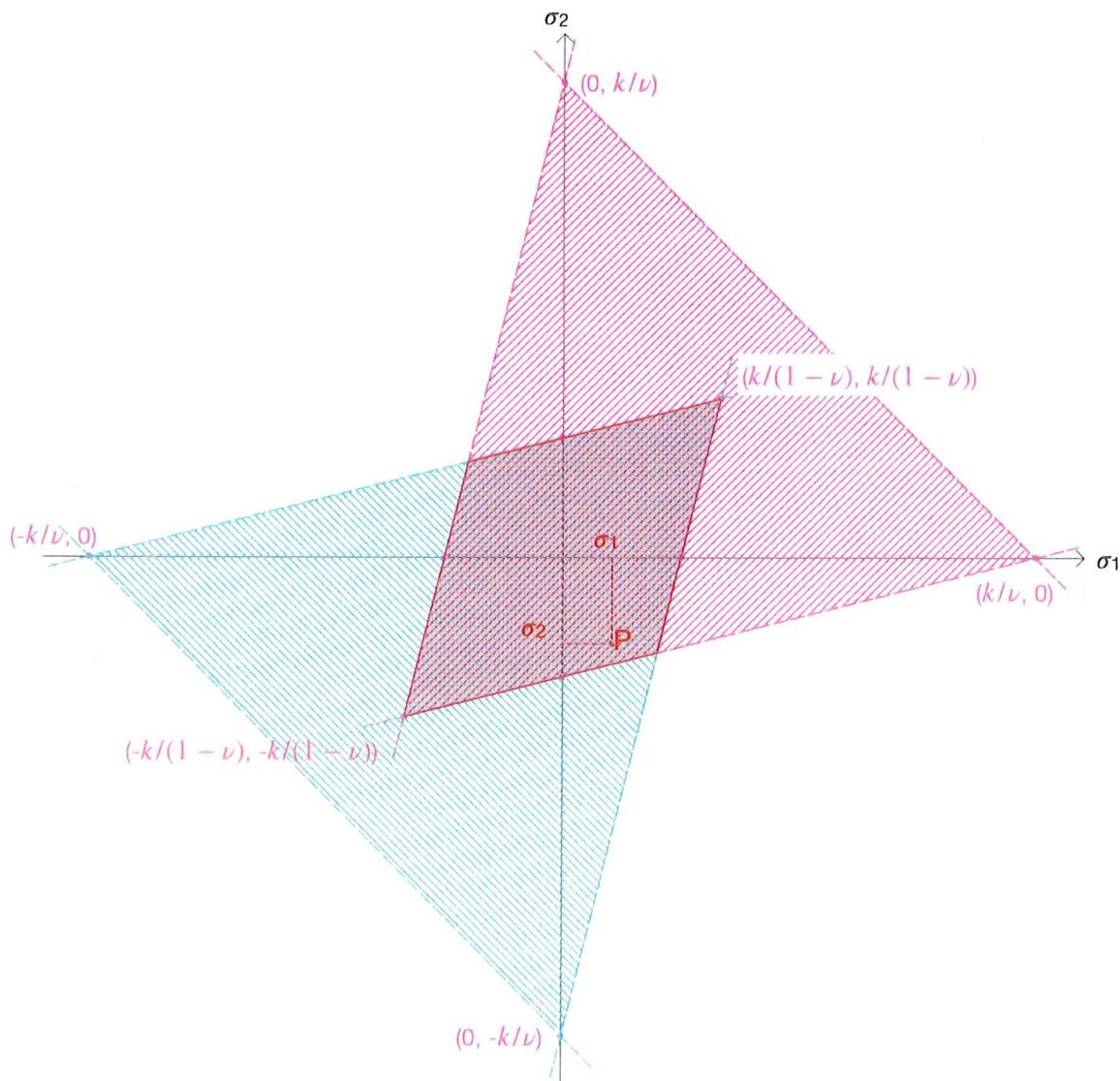
$$MAX \{ 120.023, -165.023, -15 \} \leq 200 \text{ MPa}$$

$$120.023 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa} - \text{verificato}$$

$$MIN \{ 84.018 - 0.25(-144.018), -144.018 - 0.25(84.018), -0.25(84.018 - 144.018) \} \geq -200 \text{ MPa}$$

$$MIN \{ 120.023, -165.023, -15 \} \geq -200 \text{ MPa}$$

$$-165.023 \text{ MPa} > -200 \text{ MPa} - \text{verificato}$$



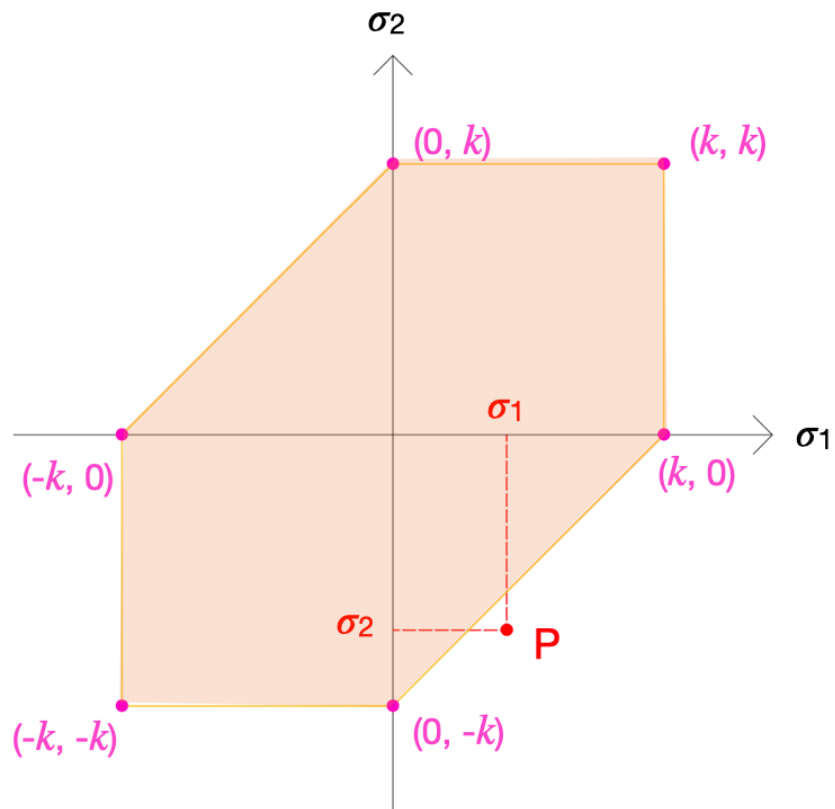
Criterio di **Tresca**, *GIP*: massima tensione tangenziale

$$\text{MAX} \{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leq k$$

$$\text{MAX} \{|84.018 - (-144.018)|, |84.018|, |144.018|\} \leq 200 \text{ MPa}$$

$$\text{MAX} \{228.036, 84.018, 144.018\} \leq 200 \text{ MPa}$$

228.036 MPa > 200 MPa – **non verificato**



Criterio di **Huber-Hencky-Von Mises**, *GIP*: massimo lavoro del deviatore di forma

In componenti principali di tensione:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq k$$

$$\sqrt{(84.018)^2 + (-144.018)^2 - (84.018)(-144.018)} \leq 200 \text{ MPa}$$

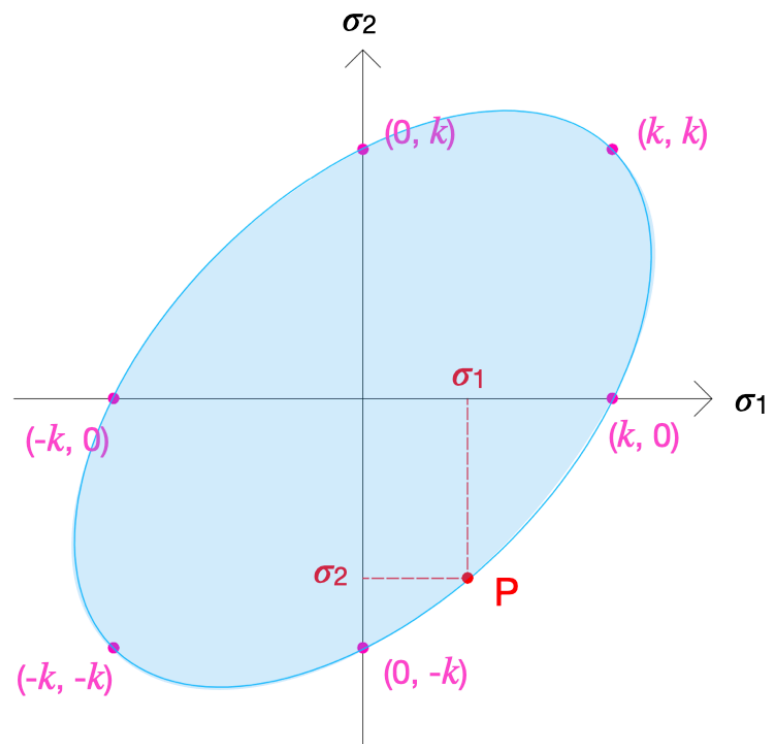
$$\sqrt{39900.000} = 199.750 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa} - \text{verificato}$$

In componenti cartesiane di tensione:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq k$$

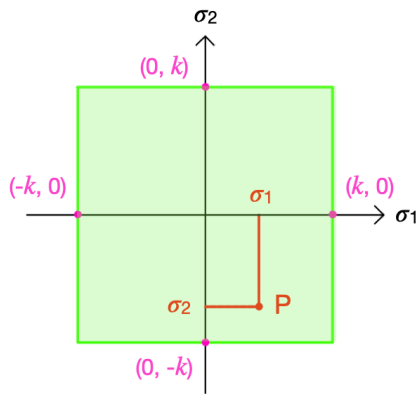
$$\sqrt{(-120)^2 + (60)^2 - (-120)(60) + 3(70)^2} \leq 200 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{39900.000} = 199.750 \text{ MPa} < 200 \text{ MPa} - \text{verificato}$$

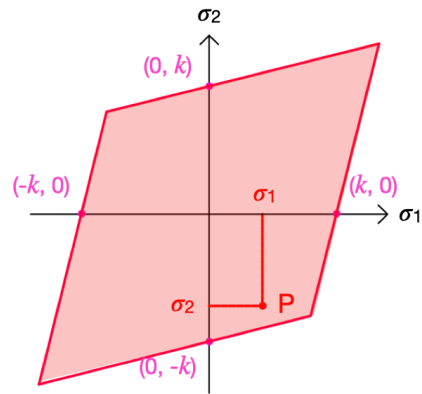


Confronto tra i criteri:

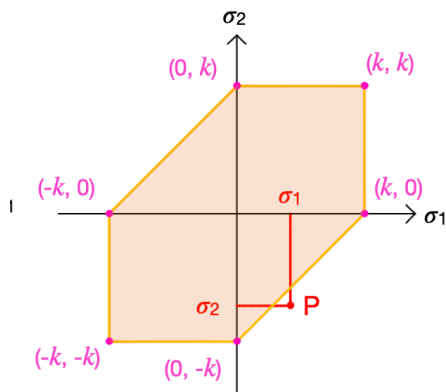
Galilei-Rankine



Grashof



Tresca



Huber-Hencky-Von-Mises

