

Parte I

Omotopia e gruppo fondamentale

Capitolo 1

Omotopia

1.1 Omotopia tra funzioni continue

Siano X e Y due spazi topologici. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette **omotope** se esiste un' applicazione continua

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad I = [0, 1],$$

detta **omotopia** tra f_0 e f_1 , tale che

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x), \quad \forall x \in X.$$

($X \times I$ denota il prodotto cartesiano tra X e I dotato della topologia prodotto).

Interpretazione meccanica dell'omotopia

Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra funzioni continue. Dato $t \in I$ consideriamo l'applicazione continua

$$f_t : X \rightarrow Y$$

definita da

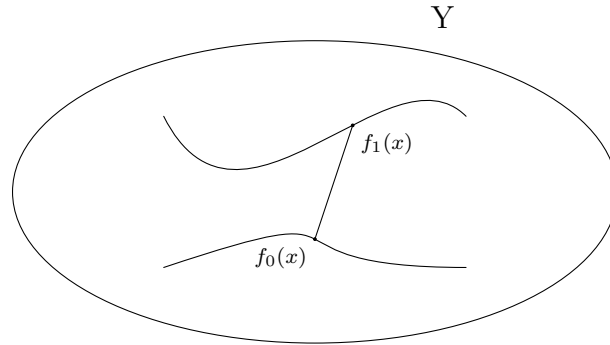
$$f_t(x) = F(x, t).$$

Al variare di $t \in I$, considerato come il tempo, otteniamo quindi una famiglia di funzioni continue che al tempo $t = 0$ vale f_0 e al tempo $t = 1$ vale f_1 . In modo intuitivo possiamo pensare che f_1 si possa ottenere da f_0 attraverso una “deformazione temporale” (il fatto che il tempo vari con continuità si riflette sulla continuità dell'omotopia F).

Esempio 1.1.1. Sia Y un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n e sia X uno spazio topologico qualunque. Allora due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope. Infatti possiamo considerare l'applicazione continua (l'omotopia lineare)

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x). \quad (1.1)$$

Più in generale se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$ sono due funzioni continue tali che il segmento di retta che congiunge $f_0(x)$ e $f_1(x)$ sia contenuto in Y per ogni $x \in X$ allora f_0 e f_1 sono omotope tramite l'omotopia F definita da (1.1).



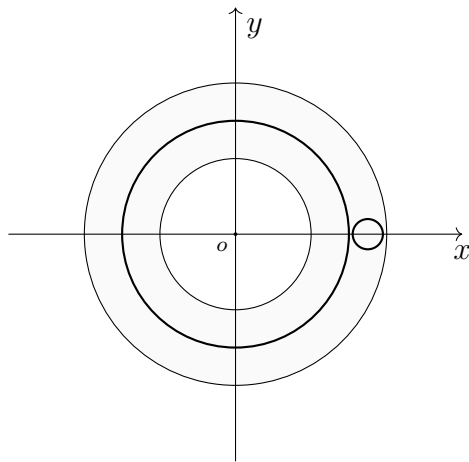
Esempio 1.1.2 (Funzioni non omotope). Sia

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

il cerchio unitario e

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

la corona circolare di centro l'origine, raggio interno 1 e raggio esterno 2. Consideriamo le applicazioni continue $f_0 : X \rightarrow Y$, $f_0((\cos t, \sin t)) = \frac{3}{2}(\cos t, \sin t)$ (la cui immagine è il cerchio di centro l'origine e raggio $\frac{3}{2}$) e $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_1((\cos t, \sin t)) = \frac{1}{5}(\cos t - \frac{7}{4}, \sin t)$ (la cui immagine è il cerchio di centro $(\frac{7}{4}, 0)$ e raggio $\frac{1}{5}$).



Allora si vede intuitivamente che f_0 non è omotopa a f_1 (per deformare con continuità f_0 su f_1 si deve passare attraverso il buco). Una dimostrazione rigorosa che f_0 e f_1 non sono omotope seguirà dagli strumenti sviluppati nel Capitolo 4 (si veda l'Esercizio 4.1).

Esempio 1.1.3 (Applicazione antipodale). Sia S^n la sfera unitaria di dimensione n e sia $A : S^n \rightarrow S^n$ l'**applicazione antipodale**, cioè $A(x) = -x$. Se n è dispari allora $\text{Id}_{S^n}, \text{Id}_{S^n}(x) = x, \forall x \in S^n$, è omotopa all'applicazione antipodale. Infatti sia $n = 2k - 1$. Allora, usando la notazione complessa e l'identificazione $\mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$, possiamo scrivere

$$S^{2k-1} = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\|^2 = 1\}$$

e l'applicazione

$$F : S^{2k-1} \times I \rightarrow S^{2k-1}, (z, t) \mapsto F(z, t) = e^{i\pi t} z$$

è un'omotopia tra $\text{Id}_{S^{2k-1}}$ e A .

Osservazione 1.1.4. Se n è pari allora l'applicazione antipodale $A : S^n \rightarrow S^n$ non è omotopa all'applicazione Id_{S^n} . La dimostrazione di questo fatto si può ottenere, per esempio, usando la teoria dell'omologia (si veda la Proposizione 14.0.2).

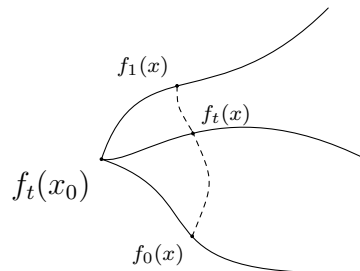
1.2 Omotopia relativa

Un insieme importante di applicazioni continue si ottiene quando $X = I$. In questo caso un'applicazione $f : I \rightarrow Y$ è chiamato **arco** di estremi $f(0)$ e $f(1)$. Il concetto di omotopia è banale nel caso di archi, in quanto un arco $f : I \rightarrow Y$ è sempre omotopo all'arco costante $\epsilon_y : I \rightarrow Y, \epsilon_y(I) = y = f(0)$. Infatti $F : I \times I \rightarrow Y$ definita da $F(x, t) = f((1-t)x)$ è un'omotopia tra f e ϵ_y . Per questo motivo introduciamo un concetto più generale di omotopia quello di **omotopia relativa**. Siano X e Y due spazi topologici e $A \subseteq X$ un sottoinsieme di X . Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono dette **omotope relativamente ad A** se esiste un'omotopia (detta **omotopia relativa ad A**)

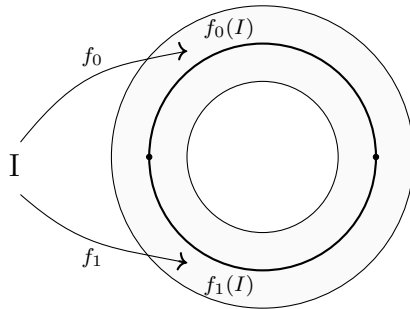
$$F : X \times I \rightarrow Y,$$

tra f_0 e f_1 , tale che $F(a, t)$ non dipende da t per ogni $a \in A$. Osserviamo che se $A = \emptyset$ allora il concetto di omotopia relativa coincide con quello di omotopia.

Esempio 1.2.1. Sia $A = \{x_0\} \subseteq X = I$. Allora l'omotopia relativa al punto $\{x_0\}$ può essere visualizzata come segue:



Esempio 1.2.2. Descriviamo ora un esempio di funzioni omotope ma non relativamente omotope. Sia $X = I$ e $A = \{0, 1\} \subseteq X$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Consideriamo le applicazioni continue $f_0 : I \rightarrow Y$, $f_0(t) = \frac{3}{2}(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ e $f_1 : I \rightarrow Y$, $f_1(t) = \frac{3}{2}(\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$.



Allora si può dimostrare che f_0 e f_1 sono omotope ma non lo sono relativamente ad A (anche qui rinviamo il lettore all'Esercizio 4.1).

Notazione: scriveremo $f_0 \sim_A f_1$ (risp. $f_0 \sim f_1$) per indicare che due funzioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope relativamente ad A (risp. omotope).

Questa notazione è giustificata dalla seguente:

Proposizione 1.2.3. Siano X e Y due spazi topologici e $A \subseteq X$. Allora \sim_A definisce una relazione di equivalenza sull'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X in Y .

Dimostrazione. Sia $f \in C(X, Y)$. La riflessività di \sim_A si ottiene ponendo $F(x, t) = f(x)$, $\forall x \in X$. Se $f \sim_A g$ tramite l'omotopia $F(x, t)$ allora $g \sim_A f$ tramite l'omotopia $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, e questo mostra la simmetria di \sim_A . Infine, per dimostrare la transitività, sia $f \sim_A g$ tramite F e $g \sim_A h$ tramite G . Allora $H(x, t)$ definita da $F(x, 2t)$, per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, e $G(x, 2t - 1)$, per $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, è un'omotopia relativa ad A tra f e h . \square

1.3 Alcune proprietà dell'omotopia

Siano X e Y due spazi topologici. Allora l'insieme $C(X, Y)$ delle applicazioni continue da X a Y può essere dotato della struttura di spazio topologico introducendo la **topologia dei compatti-aperti** come segue.

Siano $K \subset X$ un compatto e $W \subseteq Y$ un aperto e sia $S(K, W)$ il sottoinsieme di $C(X, Y)$ definito come:

$$S(K, W) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq W\}.$$

Sia \mathcal{S} la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $C(X, Y)$ costituita da $C(X, Y)$, il vuoto e da tutti gli insiemi della forma $S(K, W)$ al variare di $K \subset X$, K compatto, e $W \subseteq Y$, W aperto. Nella topologia dei compatti-aperti $\mathcal{U} \subseteq C(X, Y)$ è aperto se e solo se per ogni $f \in \mathcal{U}$ esistono sottoinsiemi S_1, \dots, S_k di \mathcal{S} tali che

$$f \in S_1 \cap \dots \cap S_k \subseteq \mathcal{U}.$$

La verifica che si tratti di una topologia è un esercizio per il lettore (cfr. Esercizio 1.1). In particolare, per K compatto in X e W aperto in Y , $S(K, W)$ è aperto in $C(X, Y)$. Da ora in poi $C(X, Y)$ sarà dotato della topologia dei compatti-aperti.

Osservazione 1.3.1. L'insieme \mathcal{S} appena definito è una sottobase per la topologia dei compatti-aperti, cioè le intersezioni finite di elementi di \mathcal{S} formano una base per la topologia.

Osservazione 1.3.2. Sia (Y, d) uno spazio metrico e X uno spazio compatto e di Hausdorff. Consideriamo la **topologia uniforme** su $C(X, Y)$, cioè la topologia indotta dalla metrica (si veda anche (D.1) nell'Appendice D)

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) che la topologia uniforme coincide con la topologia dei compatti-aperti.

Data un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tra due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ possiamo definire un'applicazione

$$\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$$

definita da:

$$\hat{F}(t)(x) = F(x, t) \tag{1.2}$$

e quindi $\hat{F}(0) = f_0$ e $\hat{F}(1) = f_1$. È naturale chiedersi se \hat{F} definisce un arco tra f_0 e f_1 cioè se \hat{F} è continua, dove $C(X, Y)$ è dotato della topologia dei compatti-aperti. La seguente proposizione mostra che questo è vero e, inoltre, se X è localmente compatto e di Hausdorff (il lettore è rinviato all'Appendice B per il materiale sugli spazi localmente compatti e le loro proprietà) e $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è continua allora $F : X \times I \rightarrow Y$ definita dalla (1.2), e cioè $F(x, t) = \hat{F}(t)(x)$, è continua.

Proposizione 1.3.3. *Siano X e Y due spazi topologici. Siano $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due applicazioni continue. Se f_0 e f_1 sono omotope tramite un'omotopia F allora $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ data da (1.2) definisce un arco tra f_0 e f_1 in $C(X, Y)$. Viceversa, se X è localmente compatto e di Hausdorff e se $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è un arco di estremi f_0 e f_1 , allora $F : X \times I \rightarrow Y$ data da (1.2) è un'omotopia tra f_0 e f_1 .*

Per la dimostrazione della proposizione abbiamo bisogno di un lemma.

Lemma 1.3.4. *Sia X uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e Y uno spazio topologico arbitrario. Allora la funzione valutazione*

$$e_v : X \times C(X, Y) \rightarrow Y, (x, f) \mapsto e_v(x, f) := f(x)$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $(x, f) \in X \times C(X, Y)$ e $W \subseteq Y$ un aperto tale che $e_v(x, f) = f(x) \in W$. Vorremo trovare un aperto $\mathcal{U} \subseteq X \times C(X, Y)$ tale che $e_v(\mathcal{U}) \subseteq W$ (questo mostrerebbe che e_v è continua nel punto (x, f)). Siccome $f : X \rightarrow Y$ è continua in x esiste un aperto U , $x \in U$, tale che $f(U) \subseteq W$. Essendo X localmente compatto e di Hausdorff segue dal Teorema B.2.1 che esiste V intorno aperto di x tale che \bar{V} è compatto e $\bar{V} \subseteq U$. Quindi $f(\bar{V}) \subseteq f(U) \subseteq W$. Consideriamo l'aperto $\mathcal{U} = V \times S(\bar{V}, W)$ di $X \times C(X, Y)$. Allora $(x, f) \in \mathcal{U}$ e $e_v(\mathcal{U}) \subseteq W$; infatti se $(x', f') \in \mathcal{U}$ allora $e_v(x', f') = f'(x') \in W$. \square

Dimostrazione della Proposizione 1.3.3. Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra f_0 e f_1 . Vogliamo mostrare che $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ è continua. Sia $t \in I$ e sia \mathcal{W} un aperto tale che $\hat{F}(t) \in \mathcal{W}$. Per dimostrare che \hat{F} è continua in t è sufficiente mostrare che esiste un aperto $A \subseteq I$, $t \in A$, tale che $\hat{F}(A) \subseteq \mathcal{W}$. Dato che una base per la topologia di $C(X, Y)$ è data da intersezioni finite di aperti della forma $S(K, W) \subseteq C(X, Y)$ (K compatto in X e W aperto di Y), basterà considerare $\mathcal{W} = S(K, W)$. Infatti, se $\mathcal{W} = S(K_1, W_1) \cap \dots \cap S(K_n, W_n)$ e per ogni aperto $S(K_i, W_i)$ dell'intersezione esiste un aperto $A_i \subset I$ tale che $\hat{F}(A_i) \subset S(K_i, W_i)$, allora avremo $\hat{F}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \subseteq \mathcal{W}$.

Sia dunque $S(K, W)$ un insieme tale che $\hat{F}(t) \in S(K, W)$. Questo significa che $\hat{F}(t)(K) \subseteq W$, ossia $F(K \times \{t\}) \subseteq W$. Segue che $K \times \{t\} \subseteq F^{-1}(W)$, il quale è un sottoinsieme aperto di $X \times I$ per la continuità di F . Dal momento che $K \times \{t\}$ è compatto esiste un aperto $A \subseteq I$ tale che $K \times A \subseteq F^{-1}(W)$. Segue che $F(K \times A) \subseteq W$, ossia $\hat{F}(A) \subseteq S(K, W)$.

Viceversa supponiamo che $\hat{F} : I \rightarrow C(X, Y)$ sia continua. Allora $F : X \times I \rightarrow Y$ è continua in quanto composizione dell'applicazione continua

$$\text{Id}_X \times \hat{F} : X \times I \rightarrow X \times C(X, Y), (x, t) \mapsto (x, \hat{F}(t))$$

con l'applicazione valutazione e_v (che è continua per il Lemma 1.3.4). \square

Osservazione 1.3.5. Nella prima parte della della Proposizione 1.3.3 abbiamo usato il fatto (vedi [Loi13, Proposizione 10.1.4]) che se X e Y sono spazi topologici con Y compatto e B è un aperto di $X \times Y$ che contiene $x_0 \times Y$, $x_0 \in X$, allora esiste un aperto A di X , $x_0 \in A$, tale che $A \times Y \subseteq B$. Osserviamo inoltre che l'intervallo I non gioca nessun ruolo importante nella dimostrazione della proposizione e può essere sostituito da un qualunque spazio topologico Z . In effetti si può dimostrare (la dimostrazione non fa parte di queste note) qualcosa di ancora più forte e cioè che se X è uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e Y, Z sono spazi topologici arbitrari allora l'applicazione

$$C(Z, C(X, Y)) \rightarrow C(X \times Z, Y), \hat{F} \mapsto F, F(x, z) := \hat{F}(z)(x)$$

è un omeomorfismo.

Proposizione 1.3.6 (Stabilità dell'omotopia rispetto alle composizioni). *Siano X, Y, Z spazi topologici, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ e $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ applicazioni continue. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$ allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.*

Dimostrazione. Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ l'omotopia tra f_0 e f_1 e $G : Y \times I \rightarrow Z$ un'omotopia tra g_0 e g_1 . Allora si verifica facilmente che l'applicazione $H : X \times I \rightarrow Z$ definita da $H(x, t) = G(F(x, t), t)$ è un'omotopia tra $g_0 \circ f_0$ e $g_1 \circ f_1$. \square

Proposizione 1.3.7. *Sia X uno spazio topologico e $f : S^1 \rightarrow X$ un'applicazione continua. Allora f è omotopa all'applicazione costante se e solo se f ammette un'estensione continua dal disco unitario $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ a X .*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $g : D^2 \rightarrow X$ sia un'estensione continua di f , cioè g è continua e $g|_{\partial D^2=S^1} = f$. Definiamo un'omotopia $H : D^2 \times I \rightarrow X$ tra ϵ_q , $q = g(0)$, e g ponendo $H(x, t) = g(tx)$. Sia $F : S^1 \times I \rightarrow X$ la restrizione di H a $S^1 \times I$. Allora F è un'omotopia tra $\epsilon_q = F(x, 0)$ e $f(x) = F(x, 1) = H(x, 1)$. Viceversa supponiamo che $F : S^1 \times I \rightarrow X$ sia un'omotopia tra $\epsilon_q = F(x, 0)$ e $f(x) = F(x, 1)$. Consideriamo l'applicazione continua $h : S^1 \times I \rightarrow D^2$ definita da $h(x, t) = tx$. Osserviamo che h è un'identificazione¹ (continua, suriettiva e chiusa). D'altra parte F passa al quoziente rispetto a h , cioè se

¹Il lettore potrà consultare [Loi13, Cap.11] per i dettagli sulla topologia quoziente e le identificazioni.

$h(x, t) = h(y, s)$ allora $F(x, t) = F(y, s)$. Infatti $h(x, t) = h(y, s)$ se e solo se $tx = sy$ e, passando alle norme, si ottiene $t = s$. Distinguiamo i due casi: se $t = s = 0$ allora $F(x, 0) = F(y, 0) = \epsilon_q$; se invece $t = s \neq 0$ allora $x = y$ e quindi $F(x, t) = F(y, s)$. Segue da [Loi13, Corollario 11.2.3] che esiste un'unica applicazione continua $g : D^2 \rightarrow X$ tale che $g \circ h = F$:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times I & \xrightarrow{F} & X \\ & \searrow h & \uparrow g \\ & & D^2 \end{array}$$

Allora

$$f(x) = F(x, 1) = g(h(x, 1)) = g(x), \quad \forall x \in S^1,$$

e quindi g è un'estensione continua di f . □

1.4 Spazi omotopicamente equivalenti

L'omotopia tra funzioni continue induce una relazione d'equivalenza tra spazi topologici come segue. Due spazi topologici X e Y sono detti **omotopicamente equivalenti** o **omotopi** se esistono due funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che

$$g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad f \circ g \sim \text{Id}_Y,$$

dove $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ (risp. $\text{Id}_Y : Y \rightarrow Y$) denota l'identità di X (risp. Y). Diremo anche che gli spazi X e Y hanno lo **stesso tipo di omotopia**. Resta così definita una relazione di equivalenza sull'insieme di tutti gli spazi topologici definendo $X \sim Y$ se e solo se X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Notazione: scriveremo $X \sim Y$ quando X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Due applicazioni f e g che soddisfano le condizioni precedenti sono chiamate **equivalenze omotopiche**.

Osserviamo che due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Il viceversa non è vero come mostra l'esempio che segue.

Esempio 1.4.1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Allora X è omotopo allo spazio $\{x_0\}$ costituito da un solo punto $x_0 \in X$. Infatti l'inclusione $i : \{x_0\} \rightarrow X$ e l'applicazione costante $\epsilon_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$ sono equivalenze omotopiche. Infatti $\epsilon_{x_0} \circ i = \text{Id}_{\{x_0\}}$ mentre $\text{Id}_X \sim i \circ \epsilon_{x_0}$ tramite l'omotopia lineare (cfr. Esempio 1.1.1)

$$F : X \times I \rightarrow X, \quad F(x, t) = (1 - t) \text{Id}_X(x) + t(i \circ \epsilon_{x_0})(x) = (1 - t)x + tx_0.$$

Diremo che uno spazio topologico X è **contraibile** se X è omotopicamente equivalente ad uno spazio topologico costituito da un solo punto. L'esempio precedente mostra che un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n è contraibile. In particolare \mathbb{R}^n stesso o il disco unitario $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ sono esempi di spazi topologici contraibili. Più in generale un sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto ad un suo punto x_0 , è contraibile (X è stellato rispetto a $x_0 \in X$ se il segmento di retta che unisce x_0 e x è contenuto in X , $\forall x \in X$).

Proposizione 1.4.2. *Uno spazio topologico X è contraibile se e solo se Id_X è omotopa all'applicazione costante.*

Dimostrazione. Si veda l'Esercizio 1.4. □

Osservazione 1.4.3. Quando parleremo del gruppo fondamentale mostreremo che il cerchio unitario S^1 non è contraibile. In effetti si riesce a dimostrare che S^n non è contraibile per $n \geq 1$ (si veda l'Osservazione 2.7.2).

Esempio 1.4.4. Il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

e il cerchio

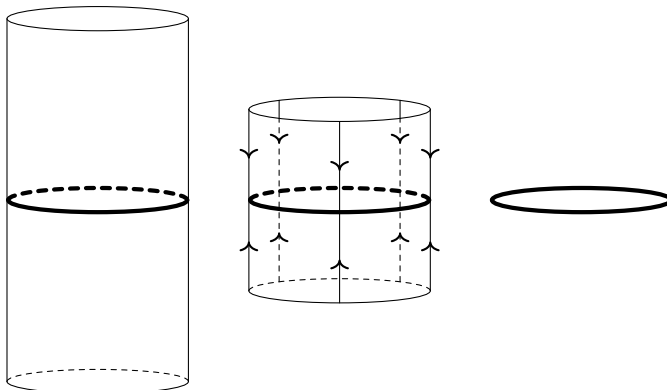
$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

sono omotopicamente equivalenti. Infatti siano $r : C \rightarrow S^1$, $r(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $i : S^1 \rightarrow C$, i inclusione naturale. Allora $r \circ i = \text{Id}_{S^1}$ e $\text{Id}_C \sim i \circ r$. La prima uguaglianza è immediata. Per dimostrare che $\text{Id}_C \sim i \circ r$ definiamo l'applicazione continua $F : C \times I \rightarrow C$, $F(x, y, z; t) = (x, y, (1-t)z)$. Allora

$$F(x, y, z; 0) = (x, y, z) = \text{Id}_C(x, y, z)$$

e

$$F(x, y, z; 1) = (x, y, 0) = (i \circ r)(x, y, z).$$



L'esempio precedente suggerisce qualche definizione. Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un sottoinsieme di X .

A è un **retrato** di X se esiste una funzione continua $r : X \rightarrow A$, chiamata **retrazione** di X su A , tale che $r \circ i = \text{Id}_A$ (equivalentemente $r|_A = \text{Id}_A$) dove $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione.

A è un **retrato di deformazione** di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $\text{Id}_X \sim i \circ r$. Quindi $A \subseteq X$ è un retratto di deformazione se e solo se esiste $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A, \forall x \in X$, $F(a, 1) = a, \forall a \in A$.

Osservazione 1.4.5. Se $A \subseteq X$ è un retratto di deformazione allora $X \sim A$. Esistono però sottoinsiemi $A \subseteq X$ di uno spazio topologico X che sono omotopicamente equivalenti a X ma che non sono retratti di X . Per esempio l'intervallo aperto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ è omotopo a \mathbb{R} (entrambi sono contraibili) ma non può esistere una retrazione di \mathbb{R} in $(0, 1)$ in quanto $(0, 1)$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R} (cfr. Esercizio Esercizio 1.9).

Osservazione 1.4.6. Se $r : X \rightarrow A$ è una retrazione non è detto che A sia un retratto di deformazione di X . Infatti ogni spazio si retrae ad un suo punto ma non è detto che X sia contraibile (cfr. Esercizio 1.5).

A è un **retrato forte di deformazione** di X se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $\text{Id}_X \sim_A i \circ r$. Quindi $A \subseteq X$ è un retratto forte di deformazione se e solo se esiste $F : X \times I \rightarrow X$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A, \forall x \in X$, $F(a, t) = a, \forall a \in A, \forall t \in I$.

Intuitivamente $A \subseteq X$ è un retratto (forte) di deformazione se X può essere deformato con continuità su A fino a farlo coincidere con A mantenendo fisso A (ogni punto $a \in A$) durante il processo di deformazione. Ovviamente un retratto forte di deformazione è un retratto di deformazione ma non vale il viceversa (si veda l'Esercizio 1.15).

Esempio 1.4.7. Il cerchio S^1 è un retratto forte di deformazione del cilindro C come si deduce dall'Esempio 1.4.4.

Esempio 1.4.8. La sfera n -dimensionale S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si consideri infatti la retrazione

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Allora $r \circ i = \text{Id}_{S^n}$ mentre

$$i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (i \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

è omotopa (relativamente a S^n) a $\text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ tramite l'omotopia $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definita da:

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|},$$

che soddisfa $F(a, t) = a, \forall a \in S^n$ e $\forall t \in I$.

Esempio 1.4.9. Sia L l'unione di due lati di un triangolo T . Allora L è un retrato forte di deformazione di T . Dato che due triangoli qualsiasi sono omeomorfi, per dimostrare quest'affermazione possiamo supporre che T sia il triangolo nel piano di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e dimostrare che l'insieme L , unione dei segmenti che uniscono $(0, 0)$ e $(1, 0)$ e $(0, 0)$ e $(0, 1)$, è un retrato forte di deformazione di T .

Definiamo la retrazione $r : T \rightarrow L$,

$$r(x, y) = \begin{cases} (0, y - x) & \text{se } x \leq y \\ (x - y, 0) & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

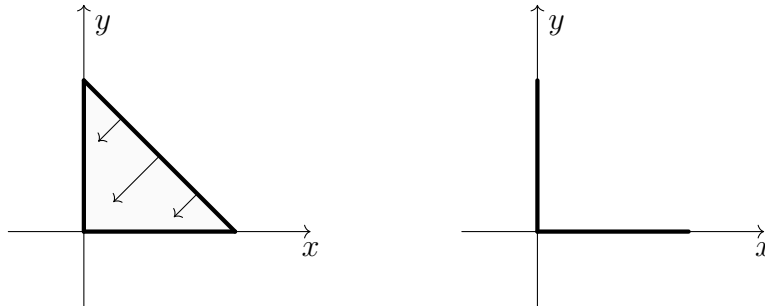
o, equivalentemente,

$$r(x, y) = (x - \min(x, y), y - \min(x, y)).$$

Allora $F : T \times I \rightarrow T$,

$$F(x, y, t) = (1 - t)(x, y) + t(i \circ r)((x, y))$$

è tale che $F(x, y, 0) = (x, y) = \text{Id}_T(x, y)$ e $F(x, y, 1) = (i \circ r)((x, y))$, $F(a, b, t) = (a, b)$ per ogni $(a, b) \in L$ (infatti se $(a, b) \in L$, allora $\min(a, b) = 0$).



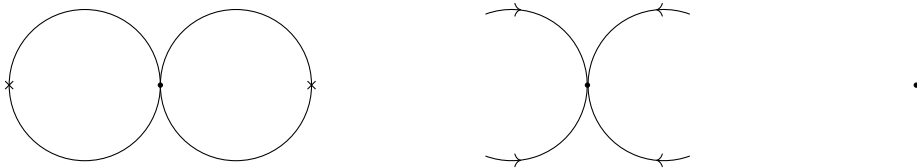
Esempio 1.4.10. Consideriamo la figura $\infty = C_1 \cup C_2$, dove

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos(\pi(s+1))+1, \sin(\pi(s+1))) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [-1, 1]\},$$

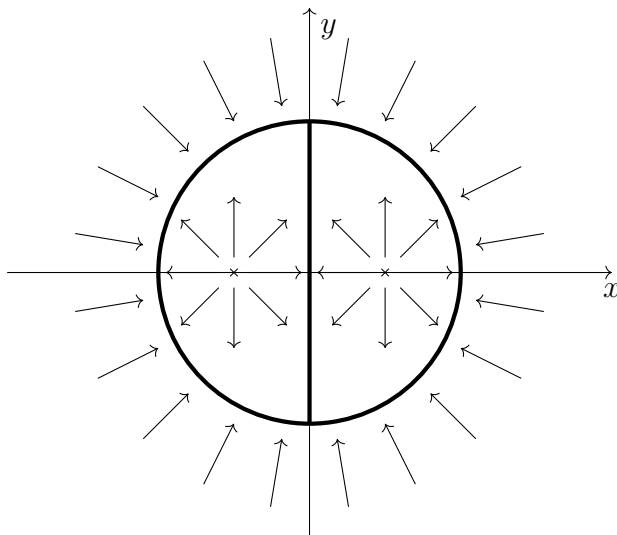
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos(\pi s)-1, \sin(\pi s)) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [-1, 1]\}.$$

Lo spazio $X = \infty \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$ si retrae per deformazione forte all'origine $(0, 0)$ tramite l'omotopia $F : X \times I \rightarrow X$

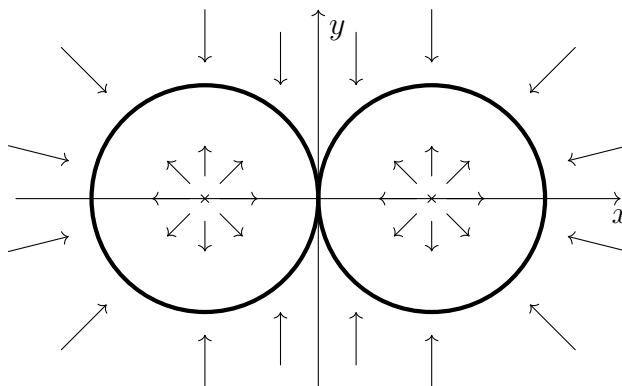
$$F(x, t) = \begin{cases} (\cos(\pi((1-t)s + 1)) + 1, \sin(\pi((1-t)s + 1))) & \text{su } C_1 \setminus \{(2, 0)\} \\ (\cos(\pi s(1-t)) - 1, \sin(\pi s(1-t))) & \text{su } C_2 \setminus \{(-2, 0)\} \end{cases}$$



Esempio 1.4.11. La figura Θ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.



Esempio 1.4.12. La figura ∞ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.



Osservazione 1.4.13. Dagli ultimi due esempi e dalla proprietà transitiva dell'omotopia si deduce che $\infty \sim \Theta$. Questo è un fatto generale. Un teorema di Fuchs afferma infatti che due spazi topologici X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se sono (omeomorfi a) retratti di deformazione di uno stesso spazio Z .

1.5 Esercizi

Esercizio 1.1. Dimostrare che la topologia dei compatti-aperti è effettivamente una topologia e che $\mathcal{U} \subseteq C(X, Y)$ è aperto in questa topologia se e solo se $\mathcal{U} = C(X, Y)$, $\mathcal{U} = \emptyset$ oppure \mathcal{U} può essere scritto come unione di intersezioni finite di elementi di \mathcal{S} .

Esercizio 1.2. Siano X e Y due spazi omotopicamente equivalenti e sia $f : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Un'applicazione $g : Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$ è detta un'**inversa omotopica** di f . Dimostrare che un'inversa omotopica di f è unica a meno di omotopie.

Esercizio 1.3. Dimostrare che nel nastro di Möbius N esiste una circonferenza che risulta essere un retratto forte di deformazione di N . Dedurne che N è omotopicamente equivalente al cilindro.

Esercizio 1.4. Dimostrare la Proposizione 1.4.2.

Esercizio 1.5. Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è connesso (risp. connesso per archi).

Esercizio 1.6. E' vero che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio compatto è compatto?

Esercizio 1.7. Dimostrare che un retratto di uno spazio compatto (risp. connesso, connesso per archi) è compatto (risp. connesso, connesso per archi).

Esercizio 1.8. Si dimostri che un retratto di uno spazio contraibile è contraibile.

Esercizio 1.9. Dimostrare che un retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Esercizio 1.10. Sia \mathbb{T}^2 il toro e X il complementare di un suo punto. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente alla figura ∞ . Dedurne che il complementare di tre punti distinti in S^2 è omotopicamente equivalente a X .

Esercizio 1.11. Sia X uno spazio topologico e $f, g : X \rightarrow S^n$ due funzioni continue tali che $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è omotopa a g .

Esercizio 1.12. Dimostrare che $SL(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante uguale a 1) è un retratto forte di deformazione di $GL^+(n, \mathbb{R})$ (le matrici $n \times n$ con determinante strettamente positivo).

Esercizio 1.13. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X . Supponiamo che A sia un retratto (forte) di deformazione di X . Sia $r : X \rightarrow A$ una qualsiasi retrazione (cioè $r \circ i = id_A$) dimostrare che r è una retrazione (forte) per deformazione di X su A (cioè $i \circ r \sim_A id_X$).

Esercizio 1.14. Dimostrare che il bicchiere vuoto A è un retratto forte di deformazione del bicchiere pieno X . In termini matematici dimostrare che $A = (D^2 \times \{0\}) \cup S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retratto forte di deformazione di $X = D^2 \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.15. Dare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico che sia un retratto di deformazione ma non un retratto forte di deformazione.

[Suggerimento: sia Y lo spazio descritto nell'Osservazione A.1.3 dell'Appendice A e sia $P_0 = (0, 1)$. Supponiamo che esista un'applicazione continua $F : Y \times I \rightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = P_0$, $F(P_0, t) = P_0$ per ogni $t \in I$ e per ogni $x \in Y$. Consideriamo il punto P_n di coordinate $P_n = (\frac{1}{n}, 1)$. Ovviamente $P_n \rightarrow P_0$. Per ogni n esiste un $t_n \in I$ tale che $y(F(P_n, t_n)) = 0$, dove $y(P)$ denota l'ordinata del punto P (infatti consideriamo l'arco $F(P_n, t)$, quest'arco soddisfa $F(P_n, 0) = P_n$ e $F(P_n, 1) = P_0$ e dato che il punto P_0 rimane fisso dovrà esistere un tale t_n). Ma allora essendo I compatto esisterà una sottosuccessione, chiamiamola ancora t_n , che converge ad un punto $t_0 \in I$. Segue che $(P_n, t_n) \rightarrow (P_0, t_0)$ e quindi $0 = y(F(P_n, t_n)) \rightarrow y(F(P_0, t_0)) = y(P_0) = 1 \neq 0$ che è assurdo.]

Capitolo 2

Il gruppo fondamentale

2.1 Prodotto di archi

Siano $f, g : I \rightarrow X$ due archi in uno spazio topologico X , tali che $f(1) = g(0)$. La loro concatenazione è l'arco $f \cdot g : I \rightarrow X$ definito come:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

La continuità dell'applicazione $f \cdot g : I \rightarrow X$ segue dal lemma di incollamento (cfr. [Loi13]). Due archi $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono omotopi relativamente al sottoinsieme $\{0, 1\} \subset I$ se esiste un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ ossia un'applicazione continua

$$F : I \times I \rightarrow X, (t, s) \mapsto F(t, s)$$

tale che $F(t, 0) = f_0(t)$, $F(t, 1) = f_1(t)$, $F(0, s) = f_0(0)$, $F(1, s) = f_0(1)$ per ogni $s \in I$. Quindi, necessariamente il punto iniziale e il punto finale degli archi f_0 e f_1 coincidono, cioè $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$.

Notiamo che, a differenza del capitolo precedente, stiamo usando il parametro s come parametro della deformazione (ossia come tempo) e t come parametro degli archi.

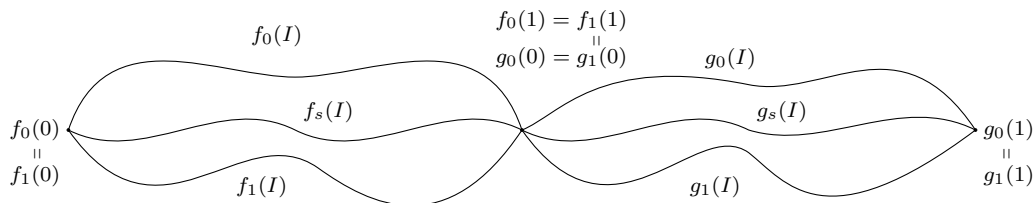
Da ora in poi diremo che due archi f_0 e f_1 tali che $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$ sono **equivalenti** se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$ e scriveremo $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$. Scriveremo $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$ quando vorremo sottolineare l'omotopia F relativa a $\{0, 1\}$ tra f_0 e f_1 . Dato un arco $f : I \rightarrow X$ denoteremo con $[f]$ la classe di equivalenza relativa alla relazione d'equivalenza definita da $\sim_{\{0,1\}}$, cioè dato un arco $g : I \rightarrow X$ ($g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)$), $g \in [f]$ se e solo se $g \sim_{\{0,1\}} f$.

Il seguente lemma mostra che la concatenazione conserva l'omotopia tra archi.

Lemma 2.1.1. *Sia X uno spazio topologico e siano $f_0, f_1, g_0, g_1 : I \rightarrow X$ quattro archi tali che $f_1(1) = g_0(0)$. Supponiamo che $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$ e $g_0 \sim_{\{0,1\}} g_1$. Allora $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdot g_1$.*

Dimostrazione. Sia F un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra f_0 e f_1 e sia G un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra g_0 e g_1 . Definiamo

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Allora H è continua per il lemma di incollamento. Inoltre, si verifica immediatamente, che $H(t, 0) = (f_0 \cdot g_0)(t)$, $H(t, 1) = (f_1 \cdot g_1)(t)$ e che $H(0, s) = F(0, s)$ e $H(1, s) = G(1, s)$ non dipendono da s . Segue che $f_0 \cdot g_0 \sim_{\{0,1\},H} f_1 \cdot g_1$. \square

Dal Lemma 2.1.1 otteniamo che se f e g sono due archi in X tali che $f(1) = g(0)$, possiamo definire l'operazione

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g] \quad (2.2)$$

tra le rispettive classi di equivalenza. Notiamo che il primo “ \cdot ” è l'operazione che stiamo definendo mentre il secondo “ \cdot ” denota la concatenazione tra f e g . Le principali proprietà di questa operazione sono riassunte nel seguente teorema.

Teorema 2.1.2. *Siano $f, g, h : I \rightarrow X$ tre archi in uno spazio topologico X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Sia $x = f(0)$ e $y = f(1)$. Valgono i seguenti fatti:*

- (1) $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ (associatività);
- (2) $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$, $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$ (elemento neutro sinistro e destro);
- (3) $[f] \cdot [i(f)] = [\epsilon_x]$, $[i(f)] \cdot [f] = [\epsilon_y]$ (inverso sinistro e destro),

dove ϵ_x (risp. ϵ_y) è l'arco costante e $i(f) : I \rightarrow X$ è l'arco definito da $i(f)(t) = f(1 - t)$ (che inizia in y e finisce in x).

Osservazione 2.1.3. Se $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono due archi in uno spazio topologico X allora $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$ se e solo se $i(f_0) \sim_{\{0,1\},G} i(f_1)$, dove $G(t, s) = F(1 - t, s)$. Quindi, per un arco $f : I \rightarrow X$, la classe $[i(f)]$ in (3) è ben definita.

Osservazione 2.1.4. Il Teorema 2.1.2 mostra che l'operazione definita in (2.2) soddisfa proprietà simili a quelle di un gruppo. Bisogna però fare attenzione che non si tratta di un gruppo in quanto il prodotto ha senso solo tra classi di equivalenza di archi f e g che soddisfano la condizione $f(1) = g(0)$ (cioè l'arco g inizia dove finisce l'arco f). Si noti inoltre che l'elemento neutro non è unico: questo infatti dipende dal valore in 0 e in 1 della classe considerata.

Dimostrazione. Nella dimostrazione del teorema faremo uso dei tre seguenti fatti (2.3), (2.4) e (2.5) la cui verifica è lasciata al lettore (cfr. Esercizio 2.1). Siano $f, g : I \rightarrow X$ due archi tali che $f(1) = g(0)$ e $\varphi \in C(X, Y)$. Allora

$$\varphi \circ (f \cdot g) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g) \quad (2.3)$$

e

$$\varphi \circ (i(f)) = i(\varphi \circ f). \quad (2.4)$$

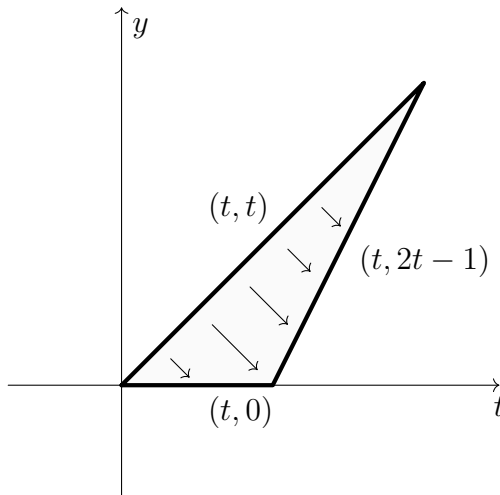
Se $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sono due archi e $\varphi \in C(X, Y)$ tali che $f_0 \sim_{\{0,1\},F} f_1$, allora

$$(\varphi \circ f_0) \sim_{\{0,1\},\varphi \circ F} (\varphi \circ f_1). \quad (2.5)$$

Iniziamo a dimostare la (2). Sia $\epsilon_0 : I \rightarrow I$ l'arco costante, $\epsilon_0(t) = 0, \forall t \in I$, e sia $\text{Id} : I \rightarrow I$ l'applicazione identica, $\text{Id}(t) = t$ per ogni $t \in I$. Allora

$$\epsilon_0 \cdot \text{Id} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un arco che congiunge $(\epsilon_0 \cdot \text{Id})(0) = 0$ con $(\epsilon_0 \cdot \text{Id})(1) = 1$.



Siccome I è convesso $\text{Id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{Id})$, cioè esiste un'omotopia $G : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ tra Id e $\epsilon_0 \cdot \text{Id}$ ¹. Dalla (2.3) si ha

$$f \circ (\epsilon_0 \cdot \text{Id}) = (f \circ \epsilon_0) \cdot (f \circ \text{Id}) = \epsilon_x \cdot f$$

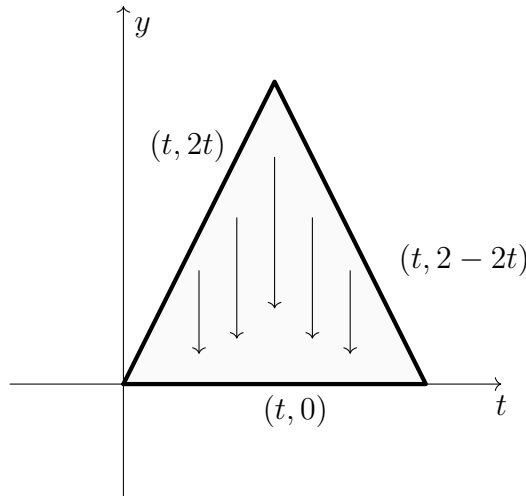
e applicando la (2.5) a $\text{Id} \sim_{\{0,1\},G} (\epsilon_0 \cdot \text{Id})$ si ottiene

$$f \sim_{\{0,1\},F} (\epsilon_x \cdot f),$$

dove $F = f \circ G^2$. Quindi $[\epsilon_x] \cdot [f] = [f]$. La dimostrazione che $(f \cdot \epsilon_y) \sim_{\{0,1\}} f$, cioè $[f] \cdot [\epsilon_y] = [f]$, si ottiene in modo simile considerando l'arco costante $\epsilon_1 : I \rightarrow I$ e usando $\text{Id} \sim_{\{0,1\}} (\text{Id} \cdot \epsilon_1)$ che induce un'omotopia $f \sim_{\{0,1\}} (f \cdot \epsilon_y)$.

Dimostriamo la (3). Anche in questo caso ci limitiamo a dimostrare che $(f \cdot i(f)) \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$ (cioè $[f][i(f)] = [\epsilon_x]$) e l'uguaglianza $[i(f)] \cdot [f] = \epsilon_y$ seguirà in modo del tutto simile. Consideriamo la concatenazione tra Id e $i(\text{Id})$, cioè

$$(\text{Id} \cdot i(\text{Id}))(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Questo rappresenta un laccio in I di base 0 che è quindi omotopo (ancora perché I è convesso) tramite un'omotopia $H : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ all'arco costante

¹Un esempio di tale omotopia è l'omotopia lineare (cfr. Esempio 1.1.1)

$$G(t, s) = (1 - s)\text{Id}(t) + s(\epsilon_0 \cdot \text{Id})(t) = \begin{cases} (1 - s)t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1 - s)t + s(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

²Possiamo scrivere una tale omotopia $F = f \circ G : I \times I \rightarrow X$ esplicitamente come:

$$F(t, s) = \begin{cases} f((1 - s)t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f((1 - s)t + s(2t - 1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$\epsilon_0 : I \rightarrow I$, cioè $(\text{Id} \cdot i(\text{Id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$ (lasciamo al lettore il compito di scrivere una tale omotopia H esplicitamente). Dalla (2.3) e (2.4) si ha

$$f \circ (\text{Id} \cdot i(\text{Id})) = (f \circ \text{Id}) \cdot (f \circ i(\text{Id})) = (f \circ \text{Id}) \cdot (i(f \circ \text{Id})) = f \cdot i(f).$$

Inoltre applicando la (2.5) a $(\text{Id} \cdot i(\text{Id})) \sim_{\{0,1\},H} \epsilon_0$ e usando il fatto che $\epsilon_x = f \circ \epsilon_0$ si ottiene $f \cdot i(f) \sim_{\{0,1\},F} \epsilon_x$, dove $F = f \circ H$ (il lettore è invitato a scrivere una tale F esplicitamente).

Infine dimostriamo la (1), cioè l'associatività. Introduciamo qualche terminologia. Dati $[a, b]$ e $[c, d]$ in $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ definiamo l'**applicazione lineare positiva da $[a, b]$ in $[c, d]$** come l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} L_{[a,b],[c,d]} : [a, b] &\longrightarrow [c, d] \\ t &\longmapsto \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c \end{aligned}$$

Si noti che $L_{[a,b],[c,d]}(a) = c$, $L_{[a,b],[c,d]}(b) = d$ ed il grafico di $L_{[a,b],[c,d]}$ è il segmento di retta che congiunge i punti (a, c) e (b, d) . La composizione di applicazioni lineari positive è ancora un'applicazione lineare positiva. Più precisamente:

$$L_{[a,b],[e,f]} = L_{[c,d],[e,f]} \circ L_{[a,b],[c,d]}.$$

Con questa terminologia, possiamo interpretare la concatenazione (2.1) $f \cdot g : I \rightarrow X$ tra due archi $f, g : I \rightarrow X$, $f(1) = g(0)$ nel seguente modo: $f \cdot g$ nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ è la composizione dell'applicazione lineare positiva da $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ ($L_{[0, \frac{1}{2}], [0, 1]}(t) = 2t$) con f , mentre $f \cdot g$ nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ è la composizione dell'applicazione lineare positiva da $[\frac{1}{2}, 1]$ a $[0, 1]$ ($L_{[\frac{1}{2}, 1], [0, 1]}(t) = 2t - 1$) con g . In simboli:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(L_{[0, \frac{1}{2}], [0, 1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(L_{[\frac{1}{2}, 1], [0, 1]}(t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siano ora $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b < 1$ e $f, g, h : I \rightarrow X$ tre archi tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Definiamo un arco $K_{a,b}(f, g, h) : I \rightarrow X$ nel seguente modo:

$$K_{a,b}(f, g, h)(t) = \begin{cases} f(L_{[0,a],[0,1]}(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ g(L_{[a,b],[0,1]}(t)) & \text{se } a \leq t \leq b \\ h(L_{[b,1],[0,1]}(t)) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$

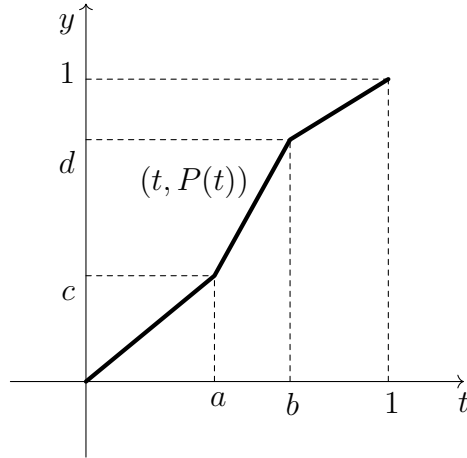
Vogliamo mostrare che

$$K_{a,b}(f, g, h) \sim_{\{0,1\}} K_{c,d}(f, g, h) \tag{2.6}$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $0 < a < b < 1$, $0 < c < d < 1$. Da questa seguirà l'associatività se si osserva che $(f \cdot g) \cdot h = K_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(f, g, h)$ e $f \cdot (g \cdot h) = K_{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}}(f, g, h)$.

Fissiamo tali a, b, c, d e sia $P : I \rightarrow I$ l'applicazione continua definita da:

$$P(t) = \begin{cases} L_{[0,a],[0,c]}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ L_{[a,b],[c,d]}(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ L_{[b,1],[d,1]}(t) & \text{se } b \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Segue immediatamente che:

$$K_{c,d}(f, g, h) \circ P = K_{a,b}(f, g, h). \quad (2.7)$$

D'altra parte P è un arco in I con estremi 0 e 1 e quindi esiste un'omotopia $G : I \times I \rightarrow I$ relativa a $\{0, 1\}$ tra P e Id , cioè $P \sim_{\{0,1\}, G} \text{Id}$. Segue allora dalla (2.5) e dalla (2.7), ponendo $\varphi = K_{c,d}(f, g, h)$, che:

$$K_{a,b}(f, g, h) = (K_{c,d}(f, g, h) \circ P) \sim_{\{0,1\}, \varphi \circ G} (K_{c,d}(f, g, h) \circ \text{Id}) = K_{c,d}(f, g, h)$$

la quale dimostra la (2.6) e conclude la dimostrazione del teorema. \square

La dimostrazione dell'associatività nel Teorema 2.1.2 ci permette di ottenere anche il seguente risultato.

Teorema 2.1.5 (del minestrone omotopico). *Sia $f : I \rightarrow X$ un arco in uno spazio topologico X . Siano $a_0, a_1, \dots, a_q \in I$ tali che $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$. Per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ sia $f_\alpha : I \rightarrow X$ l'arco definito da:*

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha).$$

Allora $[f] = [f_1] \cdots [f_q]$ o, equivalentemente, $f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_q$.

2.2 Il gruppo fondamentale

Vogliamo ora sfruttare l'operazione definita da (2.2) per dotare della struttura di gruppo un opportuno spazio di archi in uno spazio topologico. Come notato nell'Osservazione 2.1.4, lo spazio degli archi in uno spazio topologico X non può essere dotato di questa struttura per cui dobbiamo restringere l'insieme considerato.

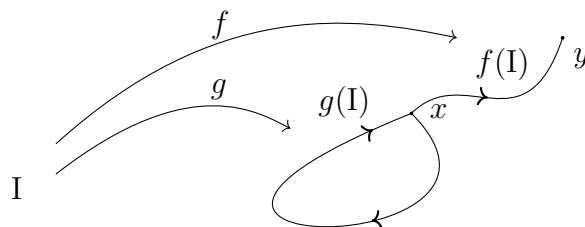
Sia X uno spazio topologico. Un arco $f : I \rightarrow X$ è detto **arco chiuso** o **laccio di base** x se $f(0) = f(1) = x$. Ricordiamo che due archi chiusi f e g di base x ($f(0) = f(1) = x = g(0) = g(1)$) sono equivalenti se $f \sim_{\{0,1\}} g$. Come nel paragrafo precedente indicheremo con $[f]$ la classe di equivalenza dell'arco chiuso f rispetto a questa relazione di equivalenza. Segue immediatamente dal Teorema 2.1.2 che l'insieme delle classi di equivalenza dei lacci chiusi di base x nello spazio topologico X con il prodotto dato da (2.2) ha la struttura di gruppo (cfr. l'Osservazione 2.1.4). Questo gruppo, denotato con $\pi_1(X, x)$, è detto il **gruppo fondamentale** di X basato nel punto x (x viene anche detto **punto base**). Il gruppo $\pi_1(X, x)$ viene anche chiamato il **primo gruppo di omotopia** o **gruppo di Poincaré** in onore del suo inventore.

Osservazione 2.2.1. Visto che l'intervallo I con gli estremi identificati è omeomorfo al cerchio S^1 allora $\pi_1(X, x)$ può essere descritto anche come l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni continue da S^1 a X che mandano il punto $(1, 0) \in S^1$ nel punto x e dove due applicazioni sono equivalenti se sono omotope relativamente al punto $(1, 0)$ (cfr. Esercizio 2.2).

Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$ due punti distinti. Non esiste in generale un legame tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$. Tuttavia vale il seguente risultato:

Proposizione 2.2.2. *Se esiste un arco che unisce x e y allora $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono gruppi isomorfi.*

Dimostrazione. Sia $f : I \rightarrow X$ un arco che congiunge $f(0) = x$ a $f(1) = y$ e sia $g : I \rightarrow X$ un laccio di base x . Allora $i(f) \cdot g \cdot f$ (dove $i(f)(t) = f(1-t)$) definisce un laccio di base y .



Definiamo:

$$\begin{aligned} u_f : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, y) \\ [g] &\longmapsto [i(f) \cdot k \cdot f] \end{aligned} \quad (2.8)$$

e osserviamo che u_f è ben definita. Infatti segue dal Lemma 2.1.1 che se $g \sim_{\{0,1\}} g'$, allora $(i(f) \cdot g \cdot f) \sim_{\{0,1\}} (i(f) \cdot g' \cdot f)$. Si verifica facilmente che u_f è un omomorfismo di gruppi. Infatti se $[g], [h] \in \pi_1(X, x)$ allora, ancora per il Lemma 2.1.1, si ottiene

$$\begin{aligned} u_f([g] \cdot [h]) &= u_f([g \cdot h]) = [i(f) \cdot g \cdot h \cdot f] = [i(f) \cdot g \cdot f \cdot i(f) \cdot h \cdot f] \\ &= [i(f) \cdot g \cdot f] \cdot [i(f) \cdot h \cdot f] = u_f([g]) \cdot u_f([h]). \end{aligned}$$

Inoltre u_f è invertibile. La sua inversa è data da

$$\begin{aligned} u_{i(f)} : \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [k] &\longmapsto [f \cdot k \cdot i(f)] \end{aligned}$$

come si verifica facilmente. Quindi u_f è un isomorfismo tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$. \square

Corollario 2.2.3. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Allora $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ sono isomorfi per ogni coppia di punti $x, y \in X$.*

In virtù del corollario precedente se X è connesso per archi useremo la notazione $\pi_1(X)$ per indicare il gruppo fondamentale di X .

Osservazione 2.2.4. Se non esiste un arco che unisce x e y i gruppi fondamentali $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ potrebbero non essere isomorfi. Per esempio sia $X = S^1 \cup \{(-2, 0)\}$ il sottospazio di \mathbb{R}^2 dato da l'unione del cerchio unitario e del punto $(-2, 0)$. Allora $\pi_1(X, (-2, 0))$ è il gruppo banale mentre $\pi_1(X, (1, 0)) = \mathbb{Z}$ (si veda il Teorema 4.2.1). Anche se lo spazio X è connesso (ma non connesso per archi) il gruppo fondamentale può dipendere dal punto scelto (vedi Esercizio 2.4). Osserviamo inoltre che se lo spazio X è connesso per archi, l'isomorfismo u_f definito nella (2.8) non è canonico, ovvero dipende dall'arco f . In effetti si riesce a dimostrare che l'isomorfismo u_f è indipendente dall'arco f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è abeliano (cfr. l'Esercizio 2.6).

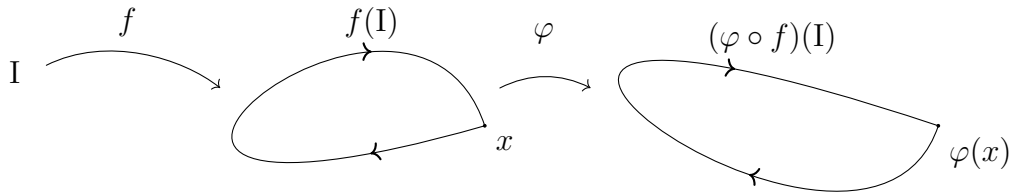
2.3 Omomorfismo indotto da un'applicazione continua

Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y e sia $x \in X$. Se f è un laccio di base x in X allora $\varphi \circ f$ è un laccio di base $\varphi(x)$

in Y . Inoltre segue dalla (2.5) che se f_0 e f_1 sono due lacci di base x tali che $f_0 \sim_{\{0,1\}} f_1$, allora $(\varphi \circ f_0) \sim_{\{0,1\}} (\varphi \circ f_1)$. Quindi l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ [f] &\longmapsto [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

è ben definita.



Si verifica facilmente che φ_* è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per ogni $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ si ha:

$$\varphi_*([f] \cdot [g]) = \varphi_*([f \cdot g]) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g]).$$

Dato $x \in X$, l'omomorfismo φ_* si chiama l'**omomorfismo indotto** da φ sui gruppi fondamentali $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(Y, \varphi(x))$. Le principali proprietà di quest'omomorfismo sono riassunte nel seguente:

Teorema 2.3.1. *Siano X, Y e Z spazi topologici, $\varphi \in C(X, Y)$ e $\psi \in C(Y, Z)$. Valgono i seguenti fatti:*

- (1) $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$;
- (2) $(id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x)}$, per ogni $x \in X$;
- (3) se φ è un omeomorfismo con inversa $\psi : Y \rightarrow X$ allora, per ogni $x \in X$, $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo con inversa $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$.

Dimostrazione. Sia $[f] \in \pi_1(X, x)$. Allora

$$(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi \circ (\varphi \circ f)] = \psi_*([\varphi \circ f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) = (\psi_* \circ \varphi_*)([f])$$

e

$$(Id_X)_*([f]) = [Id_X \circ f] = [f].$$

le quali mostrano i punti (1) e (2). Per dimostrare il punto (3) applichiamo i punti (1) e (2) alle uguaglianze $\psi \circ \varphi = \text{Id}_X$ e $\varphi \circ \psi = \text{Id}_Y$ e otteniamo che, per ogni $x \in X$,

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi_1(X,x)}$$

e

$$\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\pi_1(Y,\varphi(x))}.$$

Quindi $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(X, x)$ è l'inversa di $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ e questo conclude la dimostrazione del punto (3) e del teorema. \square

Osservazione 2.3.2. Si noti che la tesi del Teorema 2.3.1 equivale a dire che il gruppo fondamentale è un funtore dalla categoria degli spazi topologici puntati alla categoria dei gruppi, si veda anche l'Esempio 6.2.4.

2.4 Invarianza omotopica del gruppo fondamentale

Il punto (3) del Teorema 2.3.1 ci assicura che spazi topologici omeomorfi (e connessi per archi) hanno gruppi fondamentali isomorfi. In questa sezione vogliamo mostrare che questo vale anche sotto l'ipotesi di una relazione più debole di quella di omeomorfismo, ovvero sotto l'ipotesi di equivalenza omotopica. Per far questo studieremo gli omomorfismi indotti da applicazioni continue che sono omotope.

Lemma 2.4.1. *Siano X e Y due spazi topologici e siano $\varphi, \psi \in C(X, Y)$. Se $\varphi \sim_F \psi$ allora, per ogni $x \in X$, il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ & \searrow \psi_* & \downarrow u_f \\ & & \pi_1(Y, \psi(x)) \end{array}$$

dove $u_f : \pi_1(Y, \varphi(x)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x))$ è l'isomorfismo associato all'arco $f : I \rightarrow Y$ di estremi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ (cfr. (2.8)) definito da $f(t) := F(x, t)$.

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che per ogni laccio g in X di base x

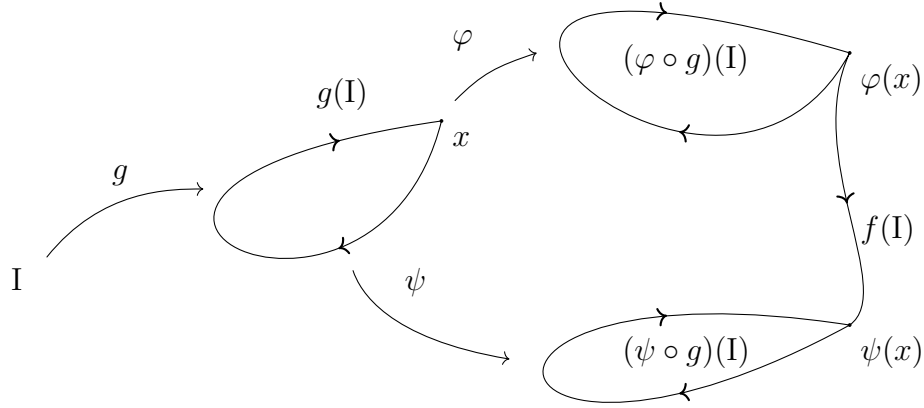
$$[\psi \circ g] = \psi_*([g]) = u_f(\varphi_*([g])) = [i(f) \cdot (\varphi \circ g) \cdot f]$$

o, equivalentemente,

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\psi \circ g).$$

Osserviamo che $\psi \circ g : I \rightarrow Y$ è un arco chiuso di base $\psi(x)$. Per il Teorema 2.1.2 sarà quindi sufficiente mostrare che

$$(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f \sim_{\{0,1\}} (\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}.$$



Osserviamo che

$$((i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f)(t) = \begin{cases} f(1 - 4t) = F(x, 1 - 4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\varphi \circ g)(4t - 1) = F(g(4t - 1), 0) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t - 1) = F(x, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$((\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)})(t) = \begin{cases} \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\psi \circ g)(4t - 1) = F(g(4t - 1), 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(x) = F(x, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica allora facilmente che l'applicazione

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x, (1 - 4t)(1 - s) + s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t - 1), s) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, (2t - 1)(1 - s) + s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definisce un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $(i(f) \cdot (\varphi \circ g)) \cdot f$ e $(\epsilon_{\psi(x)} \cdot (\psi \circ g)) \cdot \epsilon_{\psi(x)}$. □

Possiamo quindi dimostrare una conseguenza notevole del Lemma 2.4.1.

Teorema 2.4.2 (Invarianza omotopica del gruppo fondamentale). *Siano X e Y due spazi topologici e $\varphi : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo, per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Sia $\psi : Y \rightarrow X$ un'inversa omotopica di φ , cioè tale che $\varphi \circ \psi \sim \text{Id}_Y$ e $\psi \circ \varphi \sim \text{Id}_X$. Sia $y \in Y$, allora per il Lemma 2.4.1 esiste un arco $f : I \rightarrow Y$ di estremi $\varphi(\psi(y))$ e y tale che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{(\varphi \circ \psi)_*} & \pi_1(Y, \varphi(\psi(y))) \\ & \searrow & \downarrow u_f \\ & (\text{Id}_Y)_* & \pi_1(Y, y) \end{array}$$

cioè $u_f \circ (\varphi \circ \psi)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\pi_1(Y, y)}$. Siccome u_f è un isomorfismo segue che $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è iniettiva e φ_* è suriettiva. In modo analogo si dimostra che $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo e che quindi ψ_* è suriettiva e φ_* è iniettiva. \square

Combinando il Teorema 2.4.2 con il Corollario 2.2.3 e l'Esercizio 1.5 si ottengono i due corollari seguenti.

Corollario 2.4.3. *Siano X e Y due spazi topologici con X connesso per archi. Supponiamo che X e Y siano omotopicamente equivalenti. Allora Y è connesso per archi e $\pi_1(X)$ è isomorfo a $\pi_1(Y)$.*

Corollario 2.4.4. *Sia X uno spazio topologico contraibile allora $\pi_1(X)$ è il gruppo banale.*

Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se X è connesso per archi e se $\pi_1(X)$ è il gruppo banale. Quindi uno spazio contraibile è semplicemente connesso per il Corollario 2.4.3. Possiamo esprimere la semplice connessione di uno spazio X in quattro modi equivalenti. Questo è il contenuto del risultato seguente la cui dimostrazione è lasciata come esercizio al lettore (cfr. Esercizio 2.3).

Lemma 2.4.5. *Sia X uno spazio topologico. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.*

- (a) X è semplicemente connesso;
- (b) X è connesso per archi e per ogni coppia di archi $f, g : I \rightarrow X$ tali che $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ si ha che $f \sim_{\{0,1\}} g$;
- (c) X è connesso per archi e ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ è omotopa ad un'applicazione costante³;

³Intuitivamente quest'affermazione può esprimersi dicendo che ogni laccio in X può essere deformato con continuità al suo punto base.

(d) X è connesso per archi e ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ ammette un'estensione continua $g : D^2 \rightarrow X$.

2.5 Il gruppo fondamentale della sfera

L'obiettivo di questa sezione è dimostrare il seguente:

Teorema 2.5.1. *La sfera n -dimensionale S^n è semplicemente connessa per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Da risultati classici di topologia generale sappiamo che S^n è connessa per archi (si veda per esempio [Loi13]) quindi ci rimane da dimostrare che il suo gruppo fondamentale $\pi_1(S^n, x)$ è il gruppo banale per $x \in S^n$. Per il Corollario 2.2.3 possiamo assumere che x sia diverso dal polo nord $N = (0, 0, \dots, 1)$ e dal polo sud $S = (0, 0, \dots, -1)$. Sia $f : I \rightarrow S^n$ un laccio di base x . Mostriamo che esiste un laccio $g : I \rightarrow S^n$ di base x tale che $N \notin g(I)$ e $g \sim_{\{0,1\}} f$. L'esistenza di un tale laccio e il fatto che $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso implicherà allora che $f \sim_{\{0,1\}} g \sim_{\{0,1\}} \epsilon_x$ e quindi $\pi_1(S^n, x)$ è banale.

L'arco g si ottiene a partire da f come segue. Sia $\{U, V\}$ il ricoprimento aperto di S^n dato da $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V = S^n \setminus \{S\}$. Esiste una suddivisione $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_q = 1$ dell'intervallo I con la seguente proprietà: dato $\alpha = 1, 2, \dots, q$, $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ è contenuto in U o in V . Infatti, se $\delta > 0$ è il numero di Lebesgue (vedi Appendice C) associato al ricoprimento aperto di I dato da $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$, è sufficiente prendere gli a_α tali che $a_\alpha - a_{\alpha-1} < \delta$, $\alpha = 1, 2, \dots, q$.

Possiamo anche assumere, eliminando eventualmente qualche a_α dalla suddivisione di I , che $f(a_\alpha) \in U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$, per ogni $\alpha = 1, \dots, q-1$ (per a_q questo è automatico in quanto $f(a_q) = x \in U \cap V$). Sia infatti $\alpha = 1, \dots, q-1$ tale che $f(a_\alpha)$ appartiene a U ma non a V (lo stesso ragionamento si applica se $f(a_\alpha) \in V$ e $f(a_\alpha) \notin U$). Allora $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subseteq U$ e $f([a_\alpha, a_{\alpha+1}]) \subseteq U$. Quindi $f([a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}]) \subseteq U$ e possiamo eliminare il punto a_α dalla suddivisione di I .

Per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ denotiamo con $f_\alpha : I \rightarrow S^n$ l'arco definito da

$$f_\alpha(t) = f((1-t)a_{\alpha-1} + ta_\alpha).$$

Se per ogni α , $f_\alpha(I) = f([a_{\alpha-1}, a_\alpha]) \subseteq U$ allora $f(I) \subseteq U$ e quindi è sufficiente definire $g = f$. Supponiamo invece che esista $\alpha \in \{1, \dots, q\}$ tale che $N \in f_\alpha(I)$. Segue che $f_\alpha(I) \subseteq V$. Sia $g_\alpha : I \rightarrow V$ un arco tale che $g_\alpha(0) = f_\alpha(0)$, $g_\alpha(1) = f_\alpha(1)$ e $N \notin g_\alpha(I)$. Un tale arco esiste in quanto $f_\alpha(0) = f(a_{\alpha-1})$ e $f_\alpha(1) = f(a_\alpha)$

appartengono a $U \cap V = V \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ che è connesso per archi per $n \geq 2$. Allora $g_\alpha \sim_{\{0,1\}} f_\alpha$ per il Lemma 2.4.5 in quanto $V \cong \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. Segue allora dal Lemma 2.1.1 e dal Teorema 2.1.5 che

$$f \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots f_\alpha \cdots f_q \sim_{\{0,1\}} f_1 \cdots g_\alpha \cdots f_q.$$

Applicando lo stesso ragionamento a tutti gli f_α , $\alpha = 1, \dots, q$, per cui $N \in f_\alpha(I)$ si ottiene il laccio g desiderato. \square

Osservazione 2.5.2. La costruzione del laccio g tale che $N \notin g(I)$ nella dimostrazione del teorema è inevitabile. Infatti esistono lacci $f : I \rightarrow S^n$ tali che $f(0) = f(1) = x$ e $f(I) = S^n$. Un tale laccio può essere costruito come segue. Sia $p : I \rightarrow I^2$ la curva di Peano descritta in Appendice D, cioè $p : I \rightarrow I^2$ è un arco in I^2 tale che $p(I) = I^2$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} p \times p : I^2 &\longrightarrow I^4 \\ (t, s) &\longmapsto (p(t), p(s)). \end{aligned}$$

Segue che

$$p_2 = (p \times p) \circ p : I \rightarrow I^2 \times I^2 = I^4,$$

soddisfa $p_2(I) = I^4$. Iterando questo procedimento possiamo trovare s naturale tale che $2^s \geq n$ e un arco suriettivo $p_s : I \rightarrow I^{2^s}$. Sia $q : I^{2^s} \rightarrow I^n$ la proiezione naturale e $\pi : I^n \cong D^n \rightarrow S^n = D^n/S^{n-1}$ l'identificazione (suriettiva) data dal Corollario B.3.3. Allora $k := \pi \circ q \circ p_s : I \rightarrow S^n$ è un'applicazione continua e suriettiva. Se $k(0) = k(1)$ abbiamo finito ponendo $f = k$. Altrimenti consideriamo $h : I \rightarrow S^n$ un arco tale che $h(0) = k(1)$ e $h(1) = k(0)$ (h esiste perché S^n è connessa per archi) e la concatenazione $f = h \cdot k : I \rightarrow S^n$ è un arco chiuso di base $x = h(0)$ tale che $f(I) = S^n$.

Corollario 2.5.3. *Sia $n \geq 3$ allora $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. La sfera S^{n-1} è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per ogni $n \geq 1$ (cfr. Esempio 1.4.8). Il risultato segue allora dal Teorema 2.5.1 e dal Corollario 2.4.3. \square

2.6 Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi

Teorema 2.6.1 (Il gruppo fondamentale di un prodotto cartesiano). *Siano X e Y due spazi topologici connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale del prodotto $X \times Y$ è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali di X e Y .*

Osservazione 2.6.2. Nell'enunciato del Teorema 2.6.1 non stiamo specificando nessun punto base in quanto gli spazi X e Y (e quindi $X \times Y$) sono connessi per archi.

Dimostrazione. Siano $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ le proiezioni canoniche, $x \in X$ e $y \in Y$. Definiamo

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \\ [f] &\longmapsto (p_*([f]), q_*([f])). \end{aligned}$$

Mostriamo che Φ è suriettiva. Sia $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ e sia $f : I \rightarrow X \times Y$ definita come $f(t) := (f_1(t), f_2(t))$, dove f_1 e f_2 sono due rappresentanti delle classi $[f_1]$ e $[f_2]$ rispettivamente. Segue che:

$$\Phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([f_1], [f_2]).$$

Per dimostrare che Φ è iniettiva supponiamo che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Allora $[p \circ f] = [p \circ g]$ e $[q \circ f] = [q \circ g]$. Equivalentemente $(p \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_1} (p \circ g)$ e $(q \circ f) \sim_{\{0,1\}, F_2} (q \circ g)$, dove $F_1 : I \times I \rightarrow X$ (risp. $F_2 : I \times I \rightarrow Y$) è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra $p \circ f$ e $p \circ g$ (risp. $q \circ f$ e $q \circ g$). Segue allora che $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ dove $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ è definita da $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$.

Infine dimostriamo che Φ è un omomorfismo di gruppi. Infatti, per $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, x \times y)$ si ha:

$$\begin{aligned} \Phi([f] \cdot [g]) &= \Phi([f \cdot g]) = (p_*([f \cdot g]), q_*([f \cdot g])) = (p_*([f]) \cdot p_*([g]), q_*([f]) \cdot q_*([g])) \\ &= (p_*([f]), q_*([f])) \cdot (p_*([g]), q_*([g])) \end{aligned}$$

dove “ \cdot ” nell'ultima riga rappresenta il prodotto del prodotto diretto in $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. \square

2.7 Un cenno sui gruppi di omotopia

Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Come suggerito dalla notazione $\pi_1(X, x)$, il gruppo fondamentale appartiene ad una successione di gruppi $\pi_n(X, x)$ associati ad uno spazio topologico X , che misurano in un certo senso i “buchi n -dimensionali” dello spazio X .

Dato un numero naturale (possibilmente nullo) n , sia $I^n = I \times \cdots \times I$ il prodotto dell'intervallo I con se stesso n volte e ∂I^n la sua frontiera, cioè:

$$\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid t_j \in \{0, 1\}, \text{ per qualche } j\}.$$

Per $x \in X$, denotiamo con $\pi_n(X, x)$ l'insieme delle classi di omotopia relativa a ∂I^n delle funzioni continue $f : I^n \rightarrow X$ tali che $f(\partial I^n) = x$.

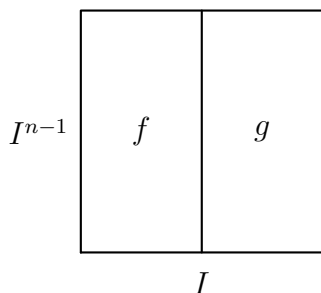
Siccome I^n è omeomorfo a D^n e $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (si veda il Corollario B.3.3), possiamo equivalentemente pensare a $\pi_n(X, x)$ come l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni da S^n in X che portano $(1, 0, \dots, 0)$ in x , modulo l'omotopia relativa al punto $(1, 0, \dots, 0)$ (cfr. l'Osservazione 2.2.1).

Il caso più semplice si ha quando $n = 0$. Dal momento che $S^0 = \{\pm 1\}$, un'applicazione da S^0 a X che manda il punto 1 nel punto base x è univocamente determinata dall'immagine del punto -1 . Due applicazioni $f, g : S^0 \rightarrow X$, tali che $f(1) = g(1) = x$, sono omotope relativamente a 1 se e solo se esiste un arco in X che congiunge $f(-1)$ con $g(-1)$ cioè se e solo se $f(-1)$ e $g(-1)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di X . Per cui $\pi_0(X, x)$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X (cfr. Appendice A per maggiori dettagli sulle componenti connesse per archi). Dato che x non gioca un ruolo particolare di solito il punto x viene omissso dalla notazione e si scrive $\pi_0(X)$. Non esiste una struttura di gruppo su $\pi_0(X, x)$: è solo un insieme con un elemento ben distinto e cioè la componente connessa che contiene x .

Per $n \geq 1$ possiamo definire un prodotto su $\pi_n(X, x)$ (che coincide con quello già definito per $n = 1$) che lo doti della struttura di gruppo. Se $f, g : I^n \rightarrow X$ sono applicazioni continue tali che $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$ possiamo definire la loro **concatenazione** come quell'applicazione continua $f \cdot g : I^n \rightarrow X$ definita da:

$$(f \cdot g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

graficamente, scrivendo $I^n = I \times I^{n-1}$:



Inoltre, all'applicazione $f : I^n \rightarrow X$ possiamo associare $i(f) : I^n \rightarrow X$ data da

$$i(f)(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Si noti che ancora una volta, per $n = 1$, questa coincide con quanto definito nel Teorema 2.1.2. Si dimostra (analogamente a quanto fatto nel Lemma 2.1.1

e nell'Osservazione 2.1.3) che se f_0 è omotopa a f_1 relativamente a ∂I^n e g_0 è omotopa a g_1 relativamente a ∂I^n allora $f_0 \cdot f_1$ è omotopa a $g_0 \cdot g_1$ relativamente a ∂I^n e $i(f_0)$ è omotopa a $i(f_1)$ relativamente a ∂I^n . Resta così definito un prodotto \cdot sulle classi $[f]$ e $[g]$ in $\pi_n(X, x)$ come:

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g] \quad (2.9)$$

Il seguente teorema mostra che $\pi_n(X, x)$ è un gruppo che viene chiamato **n -esimo gruppo di omotopia** dello spazio topologico X basato nel punto $x \in X$.

Teorema 2.7.1. *Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Allora per ogni $n \geq 1$ valgono i seguenti fatti:*

- (1) $\pi_n(X, x)$ è un gruppo rispetto al prodotto (2.9) con elemento neutro $[\epsilon_x]$;
- (2) $\pi_n(X, x)$ è un gruppo abeliano per $n > 1$ ⁴;
- (3) se f è un arco in X che unisce x a y allora $\pi_n(X, x)$ è isomorfo a $\pi_n(X, y)$ tramite l'isomorfismo

$$u_f : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$$

definito da:

$$u_f([g]) = [i(f_1) \cdot g \cdot f_1],$$

dove

$$f_1 : I^n \rightarrow X, f_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1);$$

- (4) per ogni $\varphi \in C(X, Y)$ resta definito un omomorfismo di gruppi (chiamato **omomorfismo indotto sull' n -esimo gruppo di omotopia**)

$$\varphi_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x)), [g] \mapsto [\varphi \circ g];$$

- (5) $\pi_n(X, x)$ è un invariante omotopico (e quindi topologico).

Dimostrazione. Le dimostrazioni di (1), (3), (4) e (5) sono analoghe a quella per il gruppo fondamentale e sono lasciate per esercizio (cfr. l'Esercizio 2.9).

⁴Vedremo esempi di spazi X con gruppo fondamentale non abeliano nei capitoli successivi.

La (2), ossia l'abelianità di $\pi_n(X, x)$ per $n > 1$, si dimostra come segue. Siano $[f], [g] \in \pi_n(X, x)$, allora un'omotopia F tra $f \cdot g$ e $g \cdot f$ è data graficamente da

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{f} & \boxed{g} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|} \hline \boxed{f} \\ \hline \boxed{g} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{g} & \boxed{f} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

L'omotopia F inizialmente riduce il dominio di f e g ed estende il dominio della funzione costante ϵ_x al complementare del dominio di f e g . Successivamente utilizza le altre coordinate (in effetti si può dimostrare che la seconda coordinata è sufficiente) per scambiare tra loro i domini di f e g . Infine l'omotopia riposta i domini di f e g alla dimensione della definizione di $g \cdot f$. \square

Osservazione 2.7.2. Si può dimostrare che $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, per ogni $n \geq 1$, e quindi S^n non è contraibile (il caso $n = 1$ verrà trattato nel Capitolo 4). Calcolare $\pi_n(S^k)$ è molto complicato ed esistono valori di k e n per i quali non si è ancora riusciti a farlo. Stranamente, esistono $n > k$ tali che il gruppo di omotopia $\pi_n(S^k)$ è diverso da zero. Per esempio si può dimostrare che $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ e quindi esistono in S^2 dei “buchi” 3-dimensionali.

2.8 Esercizi

Esercizio 2.1. Dimostrare le (2.3), (2.4) e (2.5).

Esercizio 2.2. Giustificare in dettaglio le affermazioni fatte nell'Osservazione 2.2.1.

Esercizio 2.3. Dimostrare il Lemma 2.4.5.

Esercizio 2.4. Dare un esempio di uno spazio topologico connesso X dove $\pi_1(X, x)$ dipende dal punto base $x \in X$.

[Suggerimento: usare lo spazio descritto nell'Appendice A con l'aggiunta di un cerchio che passa per il punto $(0, 1)$.]

Esercizio 2.5. Dimostrare che se uno spazio ha la topologia discreta allora $\pi_1(X, x) = \{1\}$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 2.6. Dimostrare che due archi $f, g : I \rightarrow X$ da x a y danno luogo allo stesso isomorfismo da $\pi_1(X, x)$ a $\pi_1(X, y)$ (cioè $u_f = u_g$) se e solo se $[g \cdot i(f)]$ appartiene al centro di $\pi_1(X, x)$. Dedurre che l'isomorfismo $u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ (associato ad un arco f da x a y) è indipendente da f se e solo se $\pi_1(X, x)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 2.7. Dimostrare che se A è un retratto forte di deformazione di uno spazio X , allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$, per ogni $a \in A$.

Esercizio 2.8. Si dimostri che un retratto di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso.

Esercizio 2.9. Dimostrare il Teorema 2.7.1.

Esercizio 2.10. Sia G un insieme dotato di due operazioni binarie \cdot_1 e \cdot_2 con lo stesso elemento unità ϵ (cioè $a \cdot_1 \epsilon = \epsilon \cdot_1 a = a \cdot_2 \epsilon = \epsilon \cdot_2 a = a$, per ogni $a \in G$). Supponiamo che:

$$(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 c) \cdot_1 (b \cdot_2 d), \quad \forall a, b, c, d \in G.$$

Allora le due operazioni coincidono e sono commutative, cioè $a \cdot_1 b = a \cdot_2 b$ e $a \cdot_1 b = b \cdot_1 a$, per ogni $a, b \in G$.

Esercizio 2.11. Siano $f, g : I^n \rightarrow X$ applicazioni continue tali che $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x$. Si consideri il prodotto $f \cdot_2 g : I^n \rightarrow X$ (analogo a \cdot) che, come suggerito dalla notazione, agisce sulla seconda coordinata:

$$(f \cdot_2 g)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

Si dimostri che questo prodotto (esattamente come \cdot) rende $\pi_n(X, x)$ un gruppo col prodotto

$$[f] \cdot_2 [g] = [f \cdot_2 g],$$

e che $[\epsilon_x]$ è l'elemento neutro per entrambe le operazioni binarie \cdot e \cdot_2 su $\pi_n(X, x)$.

Esercizio 2.12. Si dimostri che vale

$$([f] \cdot [g]) \cdot_2 ([h] \cdot [k]) = ([f] \cdot_2 [h]) \cdot ([g] \cdot_2 [k]), \quad \forall [f], [g], [h], [k] \in \pi_n(X, x)$$

dove \cdot e \cdot_2 sono le operazioni binarie su $\pi_n(X, x)$ definite rispettivamente in (2.9) e nell'Esercizio 2.11.

Si usi l'Esercizio 2.10 per fornire una dimostrazione alternativa del punto (2) del Teorema 2.7.1.

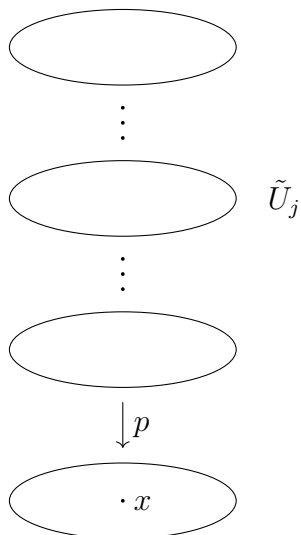
Capitolo 3

Rivestimenti

3.1 Rivestimenti

Siano \tilde{X} e X due spazi topologici. Diremo che un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un **rivestimento** se valgono i seguenti fatti:

1. p è suriettiva;
2. per ogni $x \in X$ esiste un aperto U di X contenente x e una famiglia $\{\tilde{U}_j\}_{j \in J}$ di aperti di \tilde{X} tali che:
 - (a) $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$;
 - (b) $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k = \emptyset$ per ogni $j, k \in J$ con $j \neq k$.
 - (c) $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.



L' applicazione $p : \tilde{X} \rightarrow X$ si chiama anche **proiezione**, X **spazio base** e \tilde{X} **spazio totale** del rivestimento. Dato $x \in X$ la sua controimmagine $p^{-1}(x)$ tramite p si chiama la **fibra** del punto x . Se le fibre $p^{-1}(x)$ hanno tutte la stessa cardinalità al variare di $x \in X$ la cardinalità della fibra viene detta **grado** del rivestimento p .

Data un'applicazione continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ diremo che un aperto $U \subseteq \tilde{X}$ è **ben ricoperto** da p ovvero che U è un **aperto banalizzante** per p se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di \tilde{X} , ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p . Quindi un'applicazione continua e suriettiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento se e solo se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di x che sia ben ricoperto da p .

La definizione di rivestimento ha svariate applicazioni. In queste note ne vedremo alcune legate alla topologia ma il concetto di rivestimento e le sue generalizzazioni di **rivestimento ramificato** e di **fibrato**, giocano un ruolo importante sia in geometria che in topologia.

Osservazione 3.1.1. Se un aperto U è ben ricoperto da un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ allora anche un aperto V contenuto in U è ben ricoperto da p .

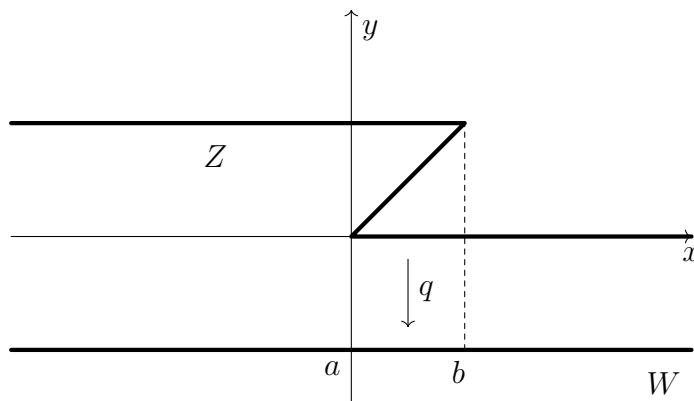
Esempio 3.1.2. Ogni omeomorfismo tra due spazi topologici è un rivestimento di grado 1.

Esempio 3.1.3. Sia Y uno spazio topologico discreto (la topologia su Y è quella discreta). Allora per ogni spazio topologico X la proiezione sul primo fattore $p : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$ è un rivestimento. In questo caso il grado di p è uguale alla cardinalità di Y .

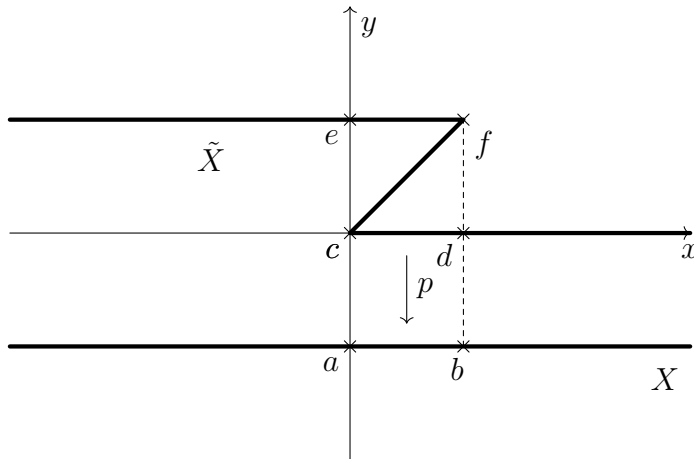
Esempio 3.1.4. Siano Z e W i sottoinsiemi dei punti (x, y) di \mathbb{R}^2 definiti da:

$$Z = \{(x, 1), x \leq 1\} \cup \{x = y | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 0) | x \geq 0\}, \quad W = \{(x, -1) | x \in \mathbb{R}\}$$

e sia $q : Z \rightarrow W$ definita $q(x, y) = (x, -1)$.



Allora q non è un rivestimento. Infatti si verifica facilmente che non esiste un intorno aperto ben ricoperto dei punti $a = (0, -1)$ e $b = (1, -1)$. Consideriamo la restrizione $p : \tilde{X} = Z \setminus \{c, d, e, f\} \rightarrow X = W \setminus \{a, b\}$ di q a $Z \setminus \{c, d, e, f\}$, dove $c = (0, 0), d = (1, 0), e = (0, 1), f = (1, 1)$.



Allora p è un rivestimento con spazio totale \tilde{X} e base X non connessi (\tilde{X} è costituito da 5 componenti connesse mentre X da 3). Osserviamo che in questo caso non si può parlare di grado del rivestimento p infatti la cardinalità della fibra di un punto $q = (x, -1)$ dipende dalla componente connessa alla quale appartiene q (è uguale a 1 per $x < a$ e $x > b$ ed è uguale a 3 per $a < x < b$).

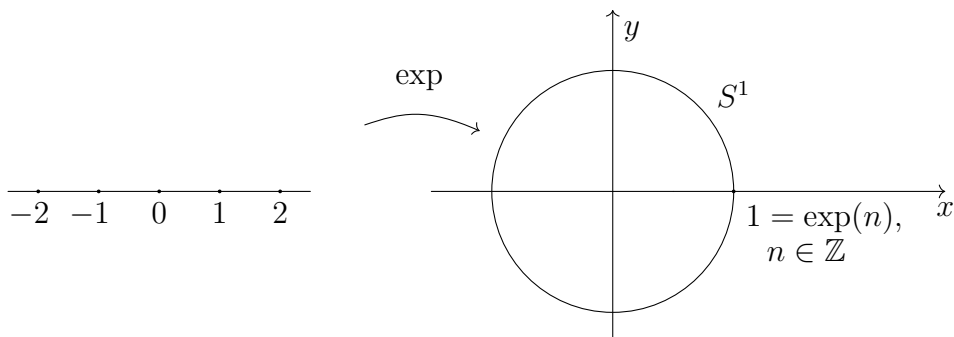
Esempio 3.1.5. Consideriamo l'applicazione continua

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

dove i denota l'unità immaginaria e stiamo pensando al cerchio unitario come

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}.$$

Intuitivamente, l'applicazione \exp "avvolge" la retta reale \mathbb{R} sul cerchio S^1 e durante questo processo porta l'intervallo $[n, n + 1]$ su S^1 .



Vogliamo mostrare che \exp è un rivestimento. Ovviamente \exp è suriettiva. Sia $x \in S^1$ e supponiamo che $x \neq 1$. Prendiamo l'aperto $U = S^1 \setminus \{1\}$ di S^1 che contiene il punto x (nel caso $x = 1$ si prenderà, per esempio, l'aperto $V = S^1 \setminus \{-1\}$ e si procederà in modo analogo). La fibra del punto 1 è costituita da tutti gli interi, $\exp^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, inoltre

$$\exp^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

Quindi $\exp^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta degli aperti $(n, n+1)$ di \mathbb{R} al variare di $n \in \mathbb{Z}$. L'applicazione

$$\exp_n := \exp|_{(n, n+1)} : (n, n+1) \rightarrow S^1 \setminus \{1\} = U$$

è continua e bigettiva. Inoltre \exp_n è un'applicazione chiusa. Infatti dato $C \subseteq (n, n+1)$ chiuso in $(n, n+1)$ allora la sua chiusura \overline{C} è un chiuso in $[n, n+1]$ e quindi compatto. Quindi la sua immagine $\exp(\overline{C})$ è un compatto e quindi chiuso in S^1 . Dal momento che $\exp_n(C) = \exp(\overline{C}) \cap U$ segue che $\exp_n(C)$ è chiuso in U . Quindi \exp_n è un omeomorfismo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi \exp è un rivestimento. Il rivestimento \exp ha grado infinito numerabile.

3.2 Rivestimenti e omeomorfismi locali

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y . Diremo che f è un **omeomorfismo locale** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto $A \subseteq X$ di x tale che $f(A)$ è aperto in Y e $f|_A : A \rightarrow f(A)$ è un omeomorfismo.

Le principali proprietà degli omeomorfismi locali sono riassunte nella seguente:

Proposizione 3.2.1. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo locale. Allora valgono i seguenti fatti:*

- (1) *Sia $U \subseteq X$ un aperto. Allora la restrizione $f|_U : U \rightarrow Y$ è un omeomorfismo locale;*
- (2) *f è un'applicazione aperta;*
- (3) *sia $y \in Y$ tale che $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora la topologia indotta da X su $f^{-1}(y)$ è quella discreta.*

Dimostrazione. Sia $x \in U$ e A un aperto di X tale che $x \in A$, $f(A)$ sia aperto in Y e $f|_A : A \rightarrow f(A)$ sia un omeomorfismo. Allora $f|_{U \cap A} : U \cap A \rightarrow f(U \cap A)$ è un omeomorfismo dall'aperto $U \cap A$ di U all'aperto $f(U \cap A)$ di $f(A)$ e quindi

di Y . Questo mostra il punto (1). Per dimostrare la (2) ossia che f è aperta sia U un aperto non vuoto e $x \in U$. Essendo f un omeomorfismo locale esiste un intorno aperto A_x di X tale che $f(A_x)$ è aperto in Y e $f|_{A_x} : A_x \rightarrow f(A_x)$ è un omeomorfismo. Segue che $f|_{A_x \cap U}$ porta l'aperto $A_x \cap U$ di A_x nell'aperto $f(A_x \cap U)$ di $f(A_x)$. Siccome $f(A_x)$ è aperto in Y anche $f(A_x \cap U)$ è aperto in Y . Quindi

$$f(U) = f(\cup_{x \in U}(A_x \cap U)) = \cup_{x \in U} f(A_x \cap U)$$

è un aperto di Y e quindi f è aperta. Infine dimostriamo il punto (3). Sia $x \in f^{-1}(y)$. Essendo f un omeomorfismo locale esiste A un intorno aperto di x tale che $f|_A : A \rightarrow f(A)$ sia un omeomorfismo. In particolare, $f|_A$ è iniettiva e quindi $A \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Questo mostra che x è aperto in $f^{-1}(y)$ (nella topologia indotta da X) e che quindi la topologia di $f^{-1}(y)$ è quella discreta. \square

Il legame tra i rivestimenti e gli omeomorfismi locali è espresso dalla seguente:

Proposizione 3.2.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Allora p è un omeomorfismo locale e un'identificazione aperta. In particolare la fibra $p^{-1}(x)$ è discreta per ogni $x \in X$.*

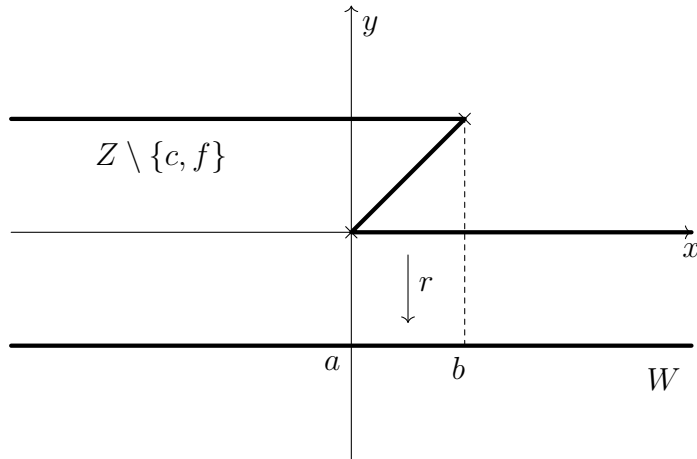
Dimostrazione. Sia \tilde{x} un punto di \tilde{X} . Allora esiste un intorno aperto U di $x = p(\tilde{x})$ in X banalizzante per p . Segue dalla definizione di rivestimento che esiste un aperto \tilde{U} di \tilde{X} che contiene \tilde{x} tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Essendo \tilde{x} arbitrario otteniamo che p è un omeomorfismo locale. D'altra parte per il punto (2) della Proposizione 3.2.1, p è un'applicazione aperta, e quindi, essendo continua e suriettiva, è un'identificazione. L'ultima parte segue dal punto (3) della Proposizione 3.2.1. \square

Corollario 3.2.3. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Allora p è iniettiva se e solo se p ha grado 1 se e solo se p è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Il rivestimento p è iniettivo se e solo se la fibra di ogni suo punto ha cardinalità 1 ossia se e solo se p ha grado 1. Per la Proposizione 3.2.2 i rivestimenti sono applicazioni continue, aperte e suriettive quindi sono omeomorfismi se e solo se sono applicazioni iniettive. \square

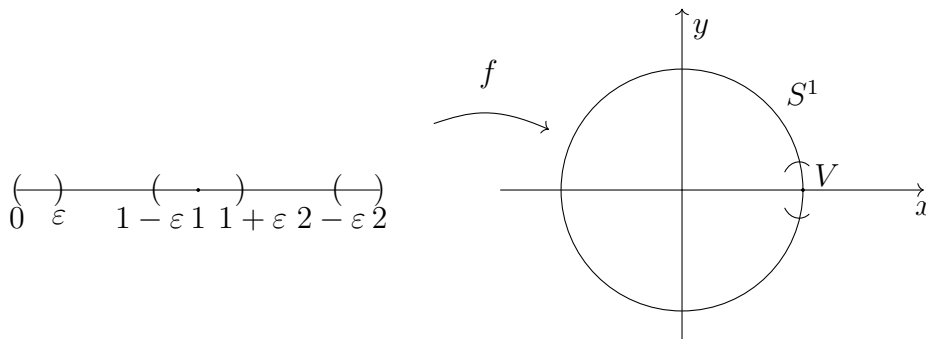
Esistono omeomorfismi locali suriettivi che non sono rivestimenti. Per esempio, consideriamo la restrizione $r = q|_{Z \setminus \{c, f\}} : Z \setminus \{c, f\} \rightarrow W$ dell'applicazione q

dell'Esempio 3.1.4.



è un omeomorfismo locale suriettivo ma non è un rivestimento. In quest'esempio il dominio non è connesso (consiste di tre componenti connesse).

Per ottenere un esempio con dominio connesso si consideri, l'applicazione continua e suriettiva $f : (0, 2) \rightarrow S^1, t \rightarrow e^{2\pi it}$ (cioè la restrizione del rivestimento $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 all'intervallo aperto $(0, 2) \subset \mathbb{R}$). Si noti che f è un omeomorfismo locale in quanto restrizione dell'omeomorfismo locale \exp (rivestimento e quindi omeomorfismo locale per la Proposizione 3.2.2) all'aperto $(0, 2)$ (per il punto (1) della Proposizione 3.2.1). D'altra parte f non è un rivestimento in quanto il punto $1 \in S^1$ non ammette un intorno aperto ben ricoperto. Infatti se U fosse un tale intorno, allora per l'Osservazione 3.1.1 esisterebbe $V \subseteq U$ aperto di S^1 che contiene 1 e ben ricoperto da f e $\epsilon > 0$ tali che $f^{-1}(V) = (0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cup (2 - \epsilon, 2)$. Ma l'aperto $(0, \epsilon)$ (così come $(2 - \epsilon, 2)$) non può essere omeomorfo a V tramite f in quanto non contiene nessun punto la cui immagine sia 1.



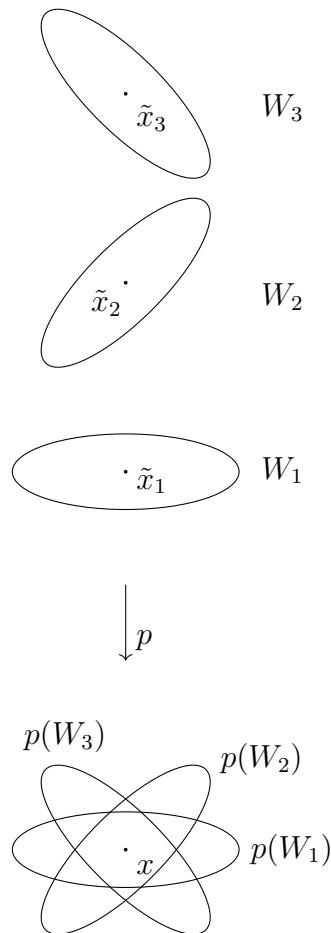
Viene allora naturale chiedersi sotto quali condizioni un omeomorfismo locale sia un rivestimento. Una possibile risposta a tale domanda è contenuta nel seguente risultato (cfr. anche l'Esercizio 3.6).

Teorema 3.2.4. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale tra due spazi topologici di Hausdorff \tilde{X} e X . Se \tilde{X} è compatto e X è connesso, allora p è un rivestimento di grado finito.*

Dimostrazione. La mappa p è suriettiva: Osserviamo che $p(\tilde{X})$ è immagine di un compatto in uno spazio di Hausdorff e quindi chiuso. D'altra parte, per la (2) della Proposizione 3.2.1, $p(\tilde{X})$ è anche aperto. Segue che $p(\tilde{X})$ è sia aperto che chiuso in X . Essendo X connesso segue che $p(\tilde{X}) = X$ e quindi p è suriettiva.

L'insieme $p^{-1}(x)$ è finito: Sia $x \in X$ allora la fibra $p^{-1}(x)$ è uno spazio topologico discreto per il punto (3) della Proposizione 3.2.1. Allora la cardinalità di $p^{-1}(x)$ è finita perché un sottoinsieme discreto di un compatto è finito.

Costruzione di un intorno aperto di $x \in X$: Sia $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$. Dal momento che \tilde{X} è di Hausdorff e p è un omeomorfismo locale è possibile trovare W_1, \dots, W_k aperti disgiunti tali che $\tilde{x}_j \in W_j$, $j = 1, \dots, k$, e $p|_{W_j} : W_j \rightarrow p(W_j)$ sia un omeomorfismo.



Poniamo $V := \bigcap_{j=1}^k p(W_j)$, $W := \bigcup_{j=1}^k W_j$ e $U := V \setminus p(\tilde{X} \setminus W)$. Allora U è un sottoinsieme aperto di X . Infatti V è un aperto di X e $p(\tilde{X} \setminus W)$ è un chiuso di X in quanto immagine tramite l'applicazione chiusa p del chiuso $\tilde{X} \setminus W$. Inoltre x appartiene a U , o equivalentemente, $x \notin p(\tilde{X} \setminus W)$ perché $p^{-1}(x) \subseteq W$.

L'aperto U è banalizzante per p : Prendendo la controimmagine di U tramite p si ottiene:

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(V) \setminus p^{-1}(p(\tilde{X} \setminus W)) \subseteq p^{-1}(V) \setminus (\tilde{X} \setminus W) = p^{-1}(V) \cap W$$

e quindi

$$p^{-1}(U) \subseteq W = \bigcup_{j=1}^k W_j. \quad (3.1)$$

Poniamo allora

$$\tilde{U}_j := p^{-1}(U) \cap W_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Segue dalla (3.1) e dal fatto che i W_j sono disgiunti che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta degli aperti \tilde{U}_j . Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, k$,

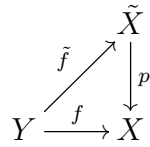
$$p(\tilde{U}_j) = p(p^{-1}(U) \cap W_j) = p(p^{-1}(U)) \cap p(W_j) = U \cap p(W_j) = U$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla bigettività di p ristretta a W_j , la terza uguaglianza segue dalla suriettività di p mentre l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che, per definizione, $U \subseteq V = \bigcap_{j=1}^k p(W_j)$ e quindi $U \subseteq p(W_j)$, per ogni $j = 1, \dots, k$. Questo mostra che U è un aperto ben ricoperto da p e che p è un rivestimento.

Il rivestimento p ha grado finito: Dimostriamo prima che la cardinalità (finita) della fibra di un punto x non dipende dal punto x scelto. Consideriamo la funzione $c : X \rightarrow \mathbb{N}$ che ad un punto $x \in X$ associa la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$. Questa funzione è localmente costante infatti per ogni punto $x \in X$ i punti di un aperto banalizzante U che contiene x hanno tutti fibre della stessa cardinalità. Quindi c è un'applicazione continua tra X e \mathbb{N} con la topologia discreta. Essendo X connesso, $c(X)$ è connesso e quindi c deve essere costante. Dunque la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$ non dipende dal punto x scelto. \square

3.3 Sollevamenti di archi e omotopie

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Diremo che un'applicazione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ è un **sollevamento** di f se $f = p \circ \tilde{f}$, ossia se rende commutativo il seguente diagramma:



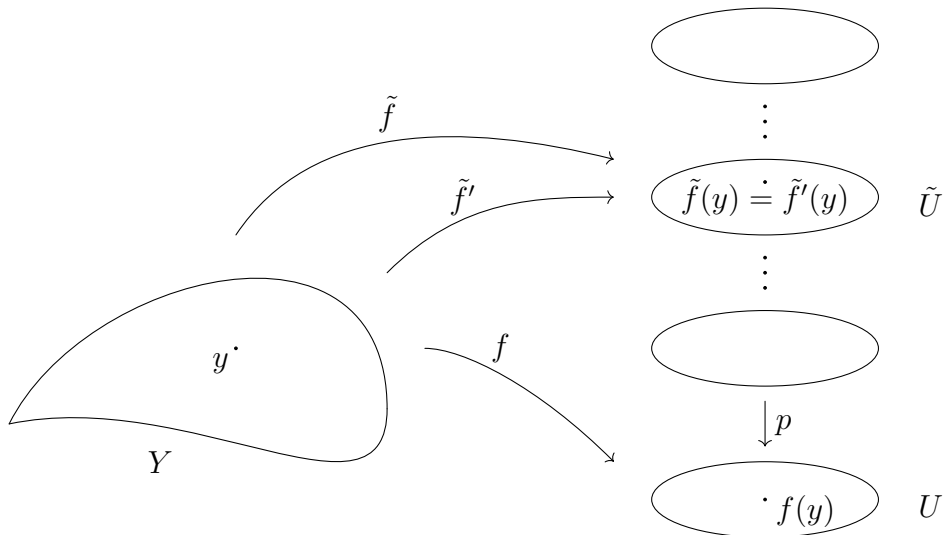
In questo paragrafo dimostreremo tre risultati fondamentali sui sollevamenti: l'unicità del sollevamento (Proposizione 3.3.1), il sollevamento degli archi (Proposizione 3.3.2) e il sollevamento delle omotopie (Proposizione 3.3.4) e alcune delle loro conseguenze.

Proposizione 3.3.1. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua da uno spazio topologico connesso Y in X . Siano $\tilde{f}, \tilde{f}' : Y \rightarrow \tilde{X}$ due sollevamenti di f . Se esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$. Allora $\tilde{f} = \tilde{f}'$.*

Dimostrazione. Consideriamo il sottoinsieme di $Y' \subseteq Y$ definito come segue:

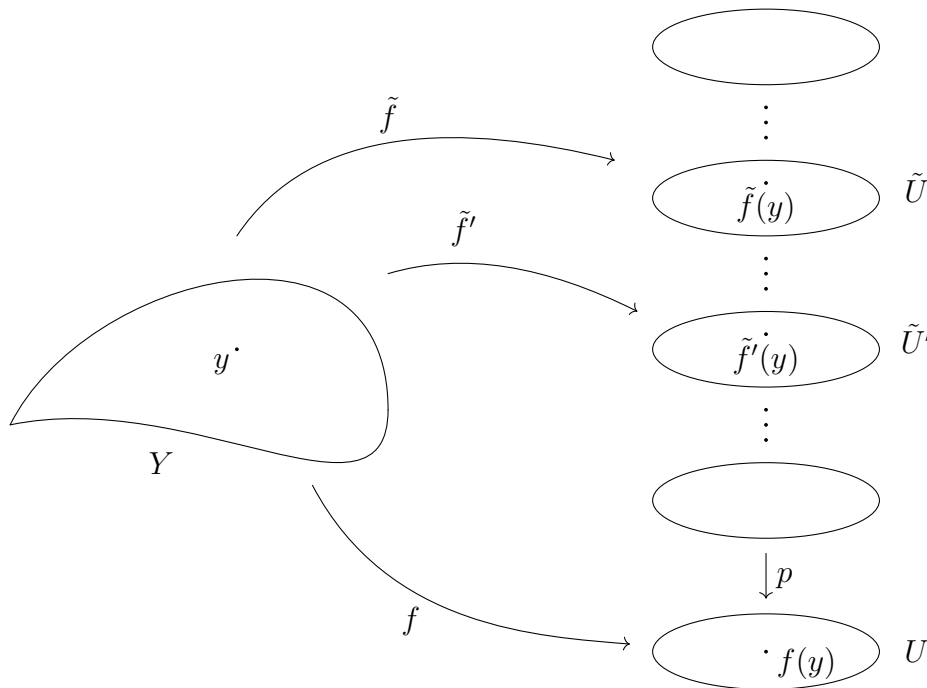
$$Y' = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $Y' = Y$. Osserviamo che $Y' \neq \emptyset$ in quanto $y_0 \in Y'$. Essendo Y connesso basterà allora dimostrare che Y' è sia aperto che chiuso. Sia dunque $y \in Y'$, U un intorno aperto di $f(y)$ ben ricoperto da p e $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ un intorno aperto di $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$ tale che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ sia un omeomorfismo.



Consideriamo l'intorno aperto (perché intersezione di due aperti) di y dato da $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}) \subseteq Y$. Vogliamo mostrare che quest'intorno è contenuto in Y' (e questo mostrerà che Y' è aperto). Sia $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U})$ allora $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}$ e $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}$ e $p(\tilde{f}(z)) = p(\tilde{f}'(z)) = f(z)$. Dal momento che p ristretta a \tilde{U} è iniettiva segue che $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z)$ e quindi $z \in Y'$. Per mostrare che Y' è chiuso

sia $y \in Y \setminus Y'$ e quindi $\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)$. Sia inoltre U un intorno aperto di $f(y)$ ben ricoperto da p . Poiché $p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{f}'(y)) = f(y)$ esistono due intorni aperti e disgiunti $\tilde{U}, \tilde{U}' \subseteq \tilde{X}$ di $\tilde{f}(y)$ e di $\tilde{f}'(y)$ tali che $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ e $p|_{\tilde{U}'} : \tilde{U}' \rightarrow U$ siano omeomorfismi.



Allora $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}')$ è un intorno aperto di y contenuto in $Y \setminus Y'$. Infatti se $z \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}'^{-1}(\tilde{U}')$ si ha $\tilde{f}(z) \in \tilde{U}$ e $\tilde{f}'(z) \in \tilde{U}'$ e quindi $\tilde{f}(z) \neq \tilde{f}'(z)$ essendo \tilde{U} e \tilde{U}' disgiunti. \square

Proposizione 3.3.2. (sollevamento degli archi) Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora ogni arco $f : I \rightarrow X$ tale che $f(0) = x_0$ ammette un unico sollevamento $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.

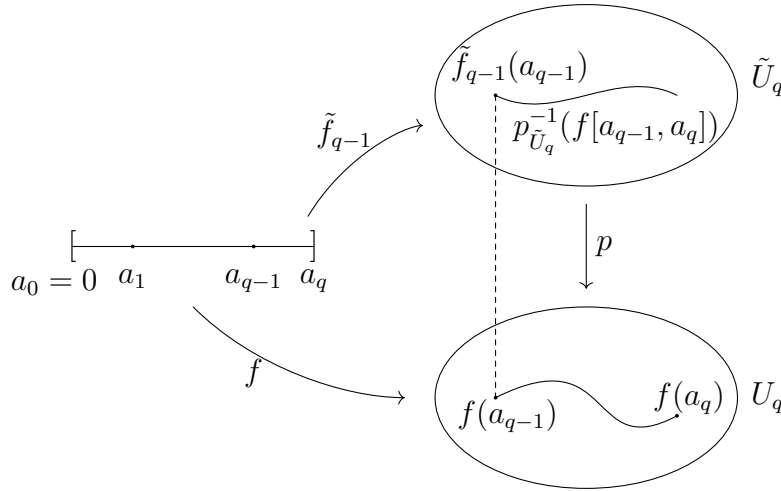
Dimostrazione. L'unicità di un sollevamento \tilde{f} di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ segue dalla Proposizione 3.3.1 e dalla connessione di I . Dimostriamo dunque l'esistenza di \tilde{f} . Consideriamo un ricoprimento di X fatto da aperti banalizzanti. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.5.1 e usando l'esistenza del numero di Lebesgue (vedi l'Appendice C) possiamo trovare una suddivisione $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$ dell'intervallo I tale che $f([a_{\alpha-1}, a_\alpha])$ sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti per ogni $\alpha = 1, \dots, q$. Vogliamo dimostrare per induzione che: per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ esiste un sollevamento $\tilde{f}_\alpha : [0, a_\alpha] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_\alpha]}$ (cioè $p \circ \tilde{f}_\alpha = f|_{[0, a_\alpha]}$) tale che $\tilde{f}_\alpha(0) = \tilde{x}_0$. Il sollevamento desiderato si otterrà allora per $\alpha = q$ cioè $\tilde{f} = \tilde{f}_q$. La base dell'induzione, $\alpha = 1$, si ottiene come segue. Sia U_1 un aperto banalizzante che contiene $f(0)$ e sia \tilde{U}_1 un intorno aperto

di \tilde{x}_0 tale che $p|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ sia un omeomorfismo. Definiamo $\tilde{f}_1 : [0, a_1] \rightarrow \tilde{X}$, come $\tilde{f}_1 = p|_{\tilde{U}_1}^{-1} \circ f$ per cui chiaramente $\tilde{f}_1(0) = (p|_{\tilde{U}_1}^{-1} \circ f(0)) = \tilde{x}_0$.

Supponiamo ora di aver definito un sollevamento $\tilde{f}_{q-1} : [0, a_{q-1}] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_{q-1}]}$ tale che $\tilde{f}_{q-1}(0) = \tilde{x}_0$ e sia U_q un aperto banalizzante per p tale che $f([a_{q-1}, a_q]) \subseteq U_q$. Esisterà allora un intorno aperto \tilde{U}_q di $\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})$ tale che $p|_{\tilde{U}_q} : \tilde{U}_q \rightarrow U_q$ sia un omeomorfismo. Estendiamo allora \tilde{f}_{q-1} ad un sollevamento $\tilde{f}_q : [0, a_q] \rightarrow \tilde{X}$ di $f|_{[0, a_q]} : [0, a_q] \rightarrow X$ tale che $\tilde{f}_q(0) = \tilde{x}_0$ ponendo:

$$\tilde{f}_q(t) = \begin{cases} \tilde{f}_{q-1}(t) & \text{se } t \in [0, a_{q-1}] \\ p|_{\tilde{U}_q}^{-1}(f(t)) & \text{se } t \in [a_{q-1}, a_q], \end{cases}$$

il quale è continuo per il lemma di incollamento dato che $p(\tilde{f}_{q-1}(a_{q-1})) = f(a_{q-1})$.



□

Corollario 3.3.3. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se X è connesso per archi allora la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$ non dipende dal punto $x \in X$.*

Dimostrazione. Siano x_0 e x_1 due punti di X . Sia \tilde{x}_0 un punto di $p^{-1}(x_0)$ e sia $f : I \rightarrow X$ un arco tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Sia $\tilde{f}_{\tilde{x}_0} : I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0$. Allora $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1)$ appartiene a $p^{-1}(x_1)$. Quindi resta definita un'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_1) \\ \tilde{x}_0 &\longmapsto \tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1) \end{aligned}$$

Analogamente definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : p^{-1}(x_1) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ \tilde{x}_1 &\longmapsto \tilde{g}_{\tilde{x}_1}(1) \end{aligned}$$

dove $\tilde{g}_{\tilde{x}_1} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di $i(f) : I \rightarrow X$ ($i(f)(t) = f(1-t)$) tale che $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_1$. Non è difficile mostrare che Ψ è l'inversa di Φ (cfr. l'Esercizio 3.7 e l'Esercizio 3.8). \square

Proposizione 3.3.4. (*sollevamento delle omotopie*) Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ un'applicazione continua tale che $F(0,0) = x_0$. Allora F ammette un unico sollevamento $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. Se inoltre F è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $t \rightarrow F(t,0)$ e $t \rightarrow F(t,1)$ allora \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra i due archi $t \rightarrow \tilde{F}(t,0)$ e $t \rightarrow \tilde{F}(t,1)$.

Dimostrazione. L'unicità di \tilde{F} segue dalla Proposizione 3.3.1. Prima di tutto osserviamo che esiste un sollevamento $\tilde{F}_L : L \rightarrow \tilde{X}$ di $F|_L$ dove $L := (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$. Infatti \tilde{F}_L si può ottenere dalla Proposizione 3.3.2 come $\tilde{F}_L(t,0) = \tilde{f}(t)$, $t \in I$ e $\tilde{F}_L(0,s) = \tilde{g}(s)$, $s \in I$, dove \tilde{f} e \tilde{g} sono i sollevamenti rispettivamente degli archi $f(t) = F(t,0)$ e $g(s) = F(0,s)$ tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Estendiamo ora \tilde{F}_L a tutto $I \times I$ come segue. Consideriamo un ricoprimento di X costituito da aperti banalizzanti. Usando l'esistenza del numero di Lebesgue possiamo trovare due suddivisioni $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{q-1} < a_q = 1$ e $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{r-1} < b_r = 1$ dei fattori di $I \times I$ in intervalli del tipo $I_\alpha = [a_{\alpha-1}, a_\alpha]$ e $J_\beta = [b_{\beta-1}, b_\beta]$ tali che per ogni $\alpha = 1, \dots, q$ e per ogni $\beta = 1, \dots, r$, $F(I_\alpha \times J_\beta)$ sia contenuto in uno degli aperti banalizzanti scelti $U_{\alpha\beta}$. Nella figura seguente è illustrato il caso $q = 3$ e $r = 2$.

$I_1 \times J_2$	$I_2 \times J_2$	$I_3 \times J_2$
$I_1 \times J_1$	$I_2 \times J_1$	$I_3 \times J_1$

L

Ordiniamo ora le coppie (α, β) secondo l'ordine lessicografico come segue:

$$(1,1) < (1,2) < \dots < (1,r) < (2,1) < (2,2) < \dots < (2,r) < \dots < (q,1) < (q,2) < \dots < (q,r).$$

Vogliamo dimostrare per induzione che: *per ogni* $(\alpha, \beta) = (1, 1), (1, 2) \dots, (q, r)$ *esiste un sollevamento*

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} : L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di F ristretta all'insieme $L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta)$ tale che $\tilde{F}_{\alpha\beta}(0, 0) = \tilde{x}_0$. Il sollevamento desiderato si otterrà allora per $(\alpha, \beta) = (q, r)$ cioè $\tilde{F} = \tilde{F}_{qr}$. Sia U_{11} un aperto banalizzante per p tale che $F(I_1 \times J_1) \subseteq U_{11}$ e sia $L_{11} = L \cap (I_1 \times J_1)$. Dato che L_{11} è connesso esisterà un aperto \tilde{U}_{11} di \tilde{X} tale che $\tilde{F}_L(L_{11}) \subseteq \tilde{U}_{11}$, e che $p|_{\tilde{U}_{11}} : \tilde{U}_{11} \rightarrow U_{11}$ sia un omeomorfismo. La base dell'induzione si ottiene allora definendo $\tilde{F}_{11} : L \cup (I_1 \times J_1) \rightarrow \tilde{X}$ come:

$$\tilde{F}_{11}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_L(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \\ p|_{\tilde{U}_{11}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_1 \times J_1 \end{cases}$$

che è continua per il lemma di incollamento perché $p(\tilde{F}_L(t, s)) = F(t, s)$ per ogni $(t, s) \in L_{11} = L \cap (I_1 \times J_1)$.

Per il passo induttivo, una volta definito il sollevamento $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ si dovrà definire il sollevamento $\tilde{F}_{\alpha+1,1}$ (se $\beta = r$) o quello $\tilde{F}_{\alpha, \beta+1}$ (se $\beta < r$). Mostriamo solo il caso in cui $\beta < r$ perché quello con $\beta = r$ è analogo. Supponiamo di aver definito il sollevamento

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} : L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \rightarrow \tilde{X}$$

di F ristretta all'insieme $L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta)$ tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$. Sia $U_{\alpha, \beta+1}$ un aperto banalizzante per p tale che $F(I_\alpha \times J_{\beta+1}) \subseteq U_{\alpha, \beta+1}$ e sia

$$L_{\alpha, \beta+1} = \left(L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cap (I_\alpha \times J_{\beta+1}).$$

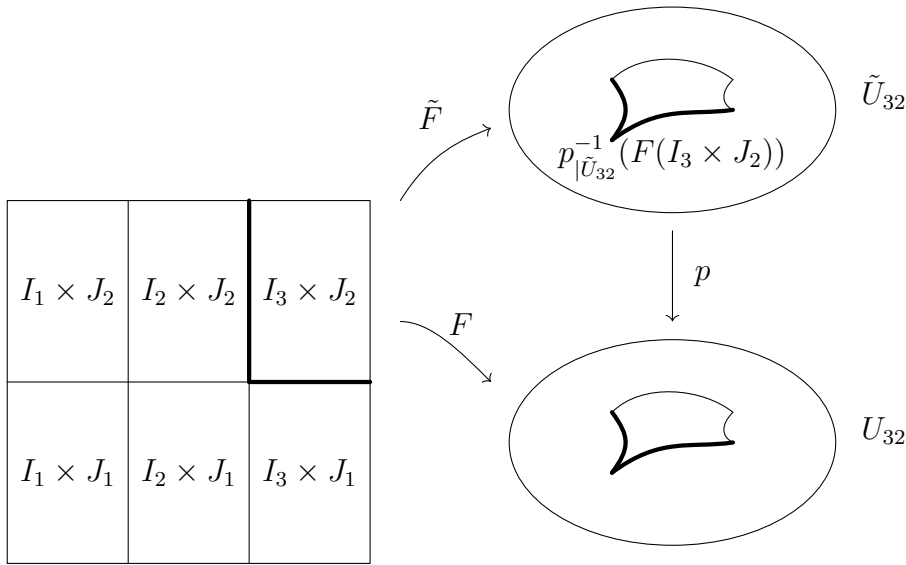
Per la connessione di $L_{\alpha, \beta+1}$ esisterà allora un aperto $\tilde{U}_{\alpha, \beta+1} \subseteq \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}_{\alpha, \beta}(L_{\alpha, \beta+1}) \subseteq \tilde{U}_{\alpha, \beta+1}$ e che $p|_{\tilde{U}_{\alpha, \beta+1}} : \tilde{U}_{\alpha, \beta+1} \rightarrow U_{\alpha, \beta+1}$ sia un omeomorfismo. Definiamo allora il sollevamento

$$\tilde{F}_{\alpha, \beta+1} : \left(L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta) \right) \cup (I_\alpha \times J_{\beta+1}) \rightarrow \tilde{X}$$

come:

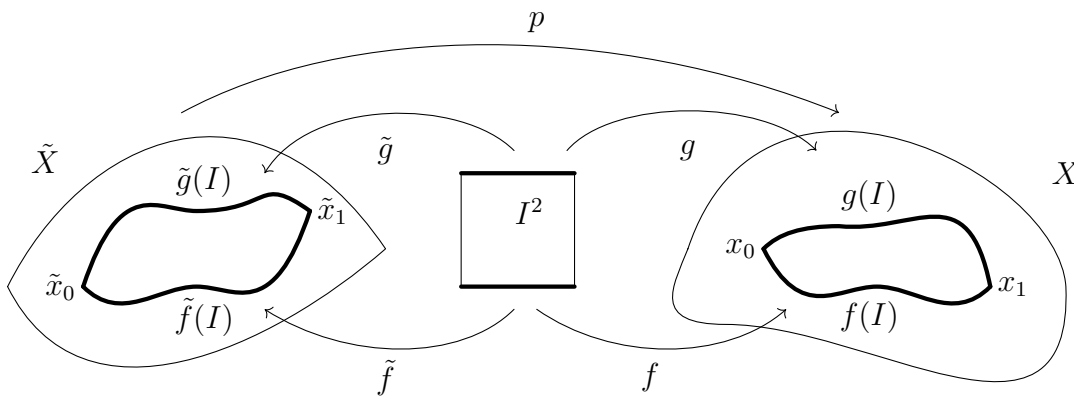
$$\tilde{F}_{\alpha, \beta+1}(t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_{\alpha, \beta}(t, s) & \text{se } (t, s) \in L \cup \bigcup_{(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)} (I_\gamma \times J_\delta), \\ p|_{\tilde{U}_{\alpha, \beta+1}}^{-1}(F(t, s)) & \text{se } (t, s) \in I_\alpha \times J_{\beta+1} \end{cases}$$

che è continuo per il lemma di incollamento perché $p(\tilde{F}_{\alpha, \beta}(t, s)) = F(t, s)$ per ogni $(t, s) \in L_{\alpha, \beta+1}$. Nella figura seguente è illustrato il caso $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.



Supponiamo infine che F sia un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra gli archi $t \rightarrow F(t, 0)$ e $t \rightarrow F(t, 1)$ tale che $F(0, s) = x_0$ e $F(1, s) = x_1$ per ogni $s \in I$. Segue che $F(\{0\} \times I) = p(\tilde{F}(\{0\} \times I)) = x_0$ (risp. $F(\{1\} \times I) = p(\tilde{F}(\{1\} \times I)) = x_1$). Quindi $\tilde{F}(\{0\} \times I) \in p^{-1}(x_0)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I) \in p^{-1}(x_1)$). Essendo la fibra $p^{-1}(x_0)$ (risp. $p^{-1}(x_1)$) discreta e $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I)$) connesso segue che $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ (risp. $\tilde{F}(\{1\} \times I)$) è costituito da un solo punto \tilde{x}_0 tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$ (risp. \tilde{x}_1 tale che $p(\tilde{x}_1) = x_1$). Quindi \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra gli archi $t \rightarrow \tilde{F}(t, 0)$ e $t \rightarrow \tilde{F}(t, 1)$ (cioè $\tilde{F}(0, s) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{F}(1, s) = \tilde{x}_1$ per ogni $s \in I$). \square

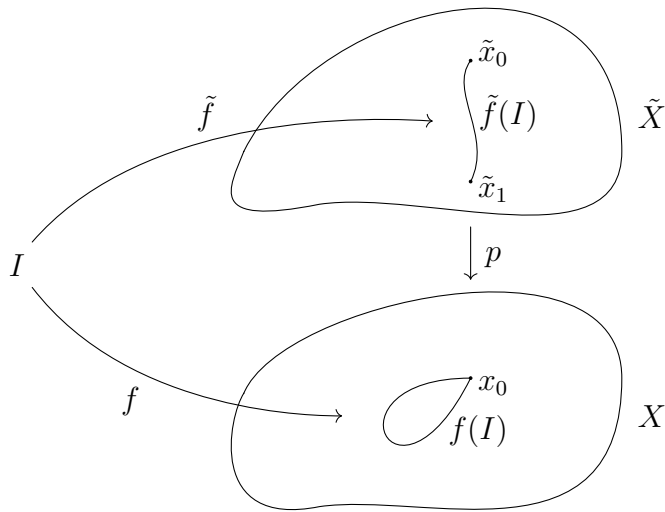
Corollario 3.3.5. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Siano $f : I \rightarrow X$ e $g : I \rightarrow X$ due archi tali che $f(0) = g(0) = x_0$ e siano $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ e $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ i due (unici) sollevamenti di f e g tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Se $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$. In particolare $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*



Dimostrazione. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra f e g e sia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di F tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ la cui esistenza segue dalla Proposizione 3.3.4. Allora per il Corollario 3.3.5 \tilde{F} è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra gli archi $t \rightarrow \tilde{F}(t, 0)$ e $t \rightarrow \tilde{F}(t, 1)$. Quindi $\tilde{F}(0, s) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{F}(1, s) = \tilde{x}_1$, per ogni $s \in I$, dove \tilde{x}_1 è un punto sulla fibra di $x_1 = f(1) = g(1)$. Osserviamo che $t \rightarrow \tilde{F}(t, 0)$ (risp. $t \rightarrow \tilde{F}(t, 1)$) è un arco in \tilde{X} tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ (risp. $\tilde{F}(0, 1) = \tilde{x}_0$) e $p(\tilde{F}(t, 0)) = F(t, 0) = f(t)$ (risp. $p(\tilde{F}(t, 1)) = F(t, 1) = g(t)$). Segue allora dalla Proposizione 3.3.2 che $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}(t)$ e $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{g}(t)$ e quindi $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{g}(1)$. \square

Teorema 3.3.6. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Se \tilde{X} è connesso per archi e X è semplicemente connesso allora p è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Per il Corollario 3.2.3 possiamo limitarci a dimostrare che p è iniettiva. Siano dunque \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1 due punti di \tilde{X} tali che $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0 \in X$. Sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ un arco tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Allora $f = p \circ \tilde{f}$ è un laccio in X di base x_0 .



Essendo X semplicemente connesso $f \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$. Ma i sollevamenti di f e ϵ_{x_0} che iniziano in \tilde{x}_0 sono rispettivamente \tilde{f} e $\epsilon_{\tilde{x}_0}$ e per il corollario precedente

$$\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1) = \epsilon_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0,$$

e quindi p è iniettiva. \square

3.4 Esercizi

Esercizio 3.1. Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ due rivestimenti. Si dimostri che

$$p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y, (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (p(\tilde{x}), q(\tilde{y}))$$

è un rivestimento.

Esercizio 3.2. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento tra due spazi topologici \tilde{X} e X e sia $X_0 \subseteq X$ un sottoinsieme di X . Sia $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. Si dimostri che la restrizione di p a \tilde{X}_0 , $p|_{\tilde{X}_0} : \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, è ancora un rivestimento.

Esercizio 3.3. Usare l'Esercizio 3.1 per costruire un rivestimento $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e dedurre dall'Esercizio 3.2 l'esistenza di un rivestimento tra il reticolo unitario standard di \mathbb{R}^2 e la figura ∞ (individuare la figura ∞ dell'Esempio 1.4.10 nel toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$).

Esercizio 3.4. Sia n un intero non nullo. Dimostrare che l'applicazione $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ è un rivestimento (qui stiamo pensando a $S^1 \subset \mathbb{C}$).

Esercizio 3.5. Dimostrare che il gruppo fondamentale di S^1 non è banale.

[Suggerimento: usare il Teorema 3.3.6.]

Esercizio 3.6. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un omeomorfismo locale tra due varietà topologiche \tilde{X} e X connesse. Assumiamo che p sia propria (cioè $p^{-1}(K)$ è compatto per ogni sottoinsieme K compatto di X). Dimostrare che p è un rivestimento di grado finito.

Esercizio 3.7. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e sia $f : I \rightarrow X$ un arco tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Sia \tilde{x}_0 un punto di $p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{f}_{\tilde{x}_0} : I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0$. Si dimostri che l'unico sollevamento $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ di $i(f) : I \rightarrow X$ ($i(f)(t) = f(1-t)$) tale che $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_1$ è $i(\tilde{f}_{\tilde{x}_0}) : I \rightarrow \tilde{X}$.

Esercizio 3.8. Dimostrare che le applicazioni Ψ e Φ definite nella dimostrazione del Corollario 3.3.3 sono una l'inversa dell'altra.

Esercizio 3.9. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento tra due spazi topologici \tilde{X} e X e sia $Y \subseteq \tilde{X}$ una componente connessa di \tilde{X} . Se X è connesso e localmente connesso¹ allora la restrizione $p|_Y : Y \rightarrow X$ è un rivestimento.

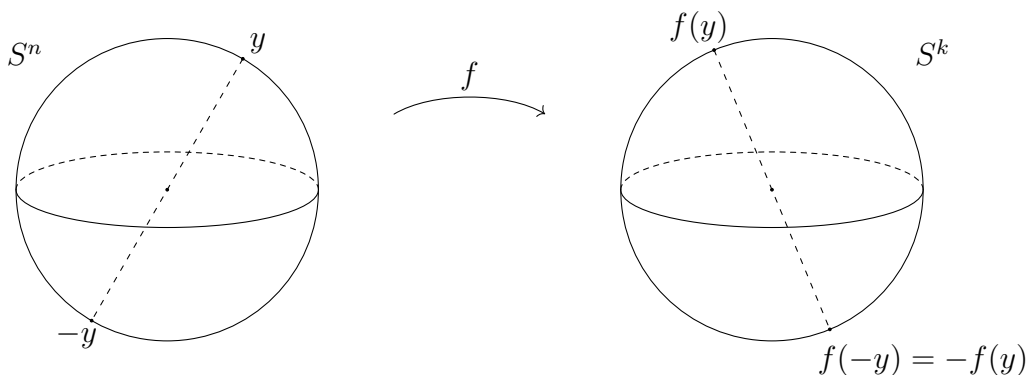
¹Uno spazio topologico X è **localmente connesso** se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno aperto U di x esiste un intorno connesso di x contenuto in U (cfr. l'Appendice A per maggiori dettagli).

Capitolo 4

Applicazioni della teoria dei rivestimenti

4.1 Il teorema di Borsuk–Ulam

Siano n e k due numeri naturali. Diremo che un'applicazione $f : S^n \rightarrow S^k$ preserva i punti antipodali se $f(-y) = -f(y)$, per ogni $y \in S^n$.



Teorema 4.1.1 (Borsuk–Ulam). *Per ogni applicazione continua $f : S^2 \rightarrow S^1$ esiste un punto $y \in S^2$ tale che $f(y) = f(-y)$.*

Corollario 4.1.2. *Non esistono applicazioni continue $f : S^2 \rightarrow S^1$ che preservano i punti antipodali.*

Osservazione 4.1.3. Il teorema si generalizza a sfere di dimensione arbitraria. Si può infatti dimostrare che non esistono applicazioni continue $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ che conservano i punti antipodali per ogni $n \geq 1$. Per $n = 1$ la dimostrazione segue dal fatto che S^1 è connesso mentre $S^0 = \{\pm 1\}$ non lo è. Per $n \geq 3$ si utilizza la teoria dell'omologia (cfr. [Kos88] in bibliografia).

Per dimostrare il Teorema di Borsuk–Ulam abbiamo bisogno dei due lemmi seguenti.

Lemma 4.1.4. *Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : S^2 \rightarrow X$ un'applicazione continua. Sia inoltre $y_0 \in S^2$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(y_0))$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$ di f tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

Dimostrazione. L'unicità del sollevamento \tilde{f} segue dalla connessione della sfera S^2 e dalla Proposizione 3.3.1. Ora costruiamo il sollevamento di f . Dal momento che $I^2 \cong D^2$ allora, per il Corollario B.3.3 dell'Appendice B, esiste un'identificazione $q : I^2 \rightarrow S^2$ tale che $q(\partial I^2) = y_0$ e $q|_{\text{Int } I^2} : \text{Int } I^2 \rightarrow S^2 \setminus \{y_0\}$ sia un omeomorfismo. Per la Proposizione 3.3.4 esiste un unico sollevamento $h : I^2 \rightarrow \tilde{X}$ di $f \circ q : I^2 \rightarrow X$ tale che $h(0, 0) = \tilde{x}_0$. Quindi $p \circ h = f \circ q$ e il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \searrow f \circ q & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Segue che

$$p(h(\partial I^2)) = f(q(\partial I^2)) = f(y_0)$$

e quindi $h(\partial I^2) \subset p^{-1}(f(y_0))$. Ma la fibra di $f(y_0)$ è discreta e quindi, essendo ∂I^2 connesso e h continua, segue che $h(\partial I^2) = \tilde{x}_0$. Segue allora che h scende al quoziente rispetto all'identificazione q . Esiste quindi un'unica applicazione $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{X}$ continua tale che $\tilde{f} \circ q = h$:

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{X} \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

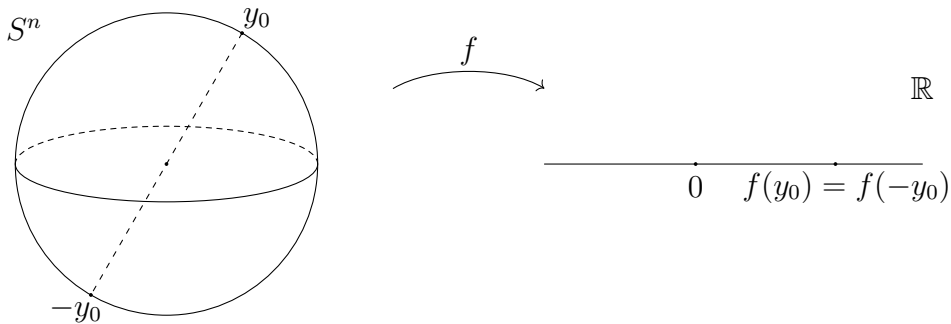
Si ha quindi

$$\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(q(0, 0)) = h(0, 0) = \tilde{x}_0.$$

Inoltre $p \circ \tilde{f} \circ q = p \circ h = f \circ q$ e siccome q è suriettiva, allora $p \circ \tilde{f} = f$. Questo conclude la dimostrazione del lemma. \square

Osservazione 4.1.5. Si può dimostrare che il lemma precedente vale anche per S^n con $n \geq 2$ e, più in generale, per ogni varietà topologica semplicemente connessa (cfr. Teorema 5.3.2).

Lemma 4.1.6. *Sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora esiste un punto $y_0 \in S^2$ tale che $f(y_0) = f(-y_0)$.*



Dimostrazione. Sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione continua definita da

$$g(y) := f(y) - f(-y).$$

Osserviamo che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Dal momento che S^2 è connesso, $g(S^2)$ è un sottoinsieme connesso di \mathbb{R} e quindi $g(S^2)$ è un punto oppure un intervallo di \mathbb{R} . Se $g(S^2)$ è un punto allora g è l'applicazione nulla. Infatti $g(y) = g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$ implica che $g(y) = 0$ per ogni $y \in S^2$. Quindi, in questo caso, $f(y) = f(-y)$ per ogni $y \in S^2$. Se invece $g(S^2)$ è un intervallo (diverso da un punto) possiamo trovare $y_1 \in S^2$ tale che $g(y_1) \neq g(-y_1)$. Ma essendo $g(S^2)$ convesso il punto

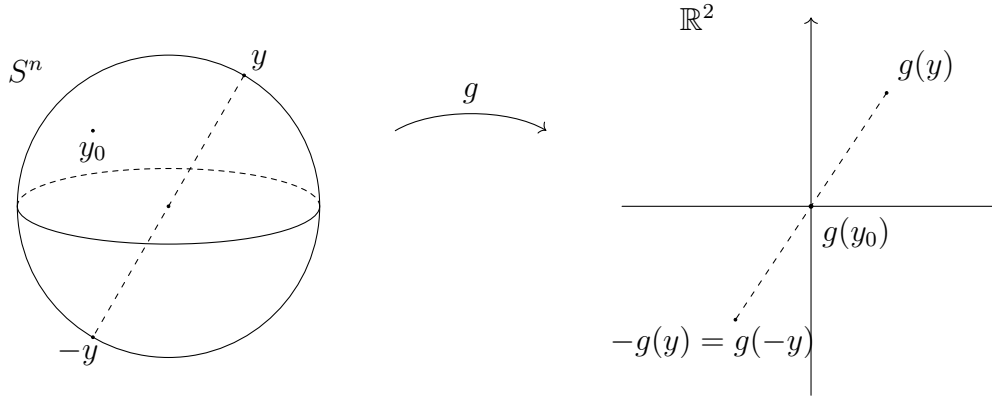
$$\frac{1}{2}(g(y_1) + g(-y_1)) = \frac{1}{2}(g(y_1) - g(y_1)) = 0$$

appartiene ancora a $g(S^2)$. Quindi esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$, ossia tale che $f(y_0) = f(-y_0)$. \square

Osservazione 4.1.7. Il Lemma 4.1.6 si estende (con una dimostrazione analoga) a tutte le applicazioni continue da S^n a \mathbb{R} , $n \geq 1$.

Dimostrazione del Teorema 4.1.1. Sia $f : S^2 \rightarrow S^1$ un'applicazione continua. Consideriamo il rivestimento $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ descritto nell'Esempio 3.1.5. Per il Lemma 4.1.4 esiste un'applicazione continua $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exp \circ \tilde{f} = f$. Per il Lemma 4.1.6 esiste $y_0 \in S^2$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}(-y_0)$. Segue che $f(y_0) = \exp(\tilde{f}(y_0)) = \exp(\tilde{f}(-y_0)) = f(-y_0)$. \square

Corollario 4.1.8. Sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua tale che $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Allora esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$.



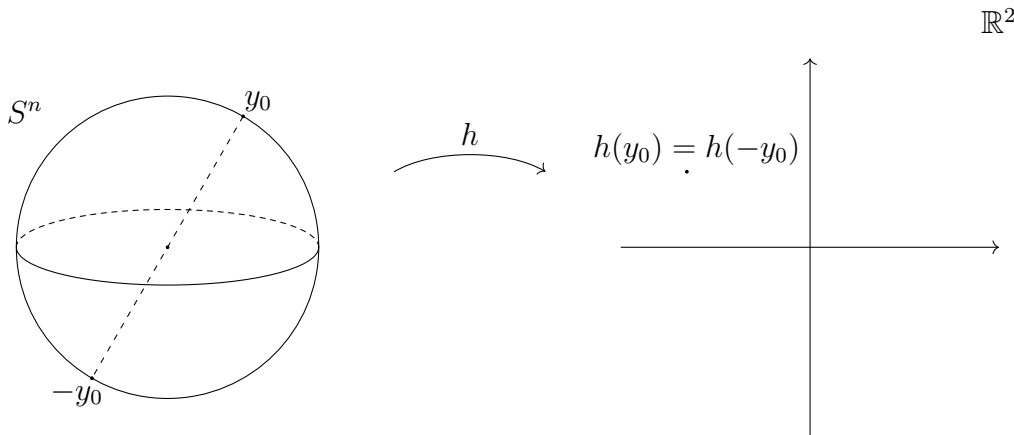
Dimostrazione. Se per assurdo $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in S^2$, allora l'applicazione continua

$$f : S^2 \longrightarrow S^1$$

$$y \longmapsto \frac{g(y)}{\|g(y)\|}$$

è tale che $f(-y) = -f(y)$ per ogni $y \in S^2$, in contrasto con il Teorema 4.1.1. \square

Corollario 4.1.9. Sia $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua. Allora esiste $y_0 \in S^2$ tale che $h(y_0) = h(-y_0)$. In particolare h non è iniettiva.



Dimostrazione. Sia per assurdo $h(y) \neq h(-y)$ per ogni $y \in S^2$. Allora l'applicazione continua

$$g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \longmapsto h(y) - h(-y)$$

soddisfa $g(-y) = -g(y)$. Segue quindi dal Corollario 4.1.8 che esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$ e quindi $h(y_0) = h(-y_0)$. \square

Osservazione 4.1.10. Il Corollario 4.1.9 ha la seguente interpretazione meteorologica: in ogni istante, esistono sulla superficie terrestre due punti antipodali con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica.

Corollario 4.1.11. *La sfera S^2 non è omeomorfa a nessun sottospazio di \mathbb{R}^2 .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un S sottospazio di \mathbb{R}^2 e un omeomorfismo $g : S^2 \rightarrow S$. Se $i : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota l'inclusione di S in \mathbb{R}^2 allora $h = i \circ g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva, in contrasto con il Corollario 4.1.9. \square

Corollario 4.1.12. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua da A in \mathbb{R}^2 non è iniettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia un'applicazione continua e iniettiva. Siccome A è aperto in \mathbb{R}^3 contiene un sottospazio S omeomorfo a S^2 . Allora l'applicazione $g|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva in contrasto con il Corollario 4.1.9. \square

Corollario 4.1.13 (Teorema del panino). *Dati tre sottoinsiemi limitati e misurabili di \mathbb{R}^3 esiste un piano di \mathbb{R}^3 che divide ognuno dei tre insiemi in due insiemi dello stesso volume.*

Dimostrazione. Siano A , B e C i tre insiemi. Per ogni $y \in S^2$ consideriamo il piano P_y perpendicolare al vettore $0y$ e che divide A in due insiemi dello stesso volume (questo piano esiste per il teorema del valor medio, per la limitatezza di A e perché il volume è una funzione continua). Indichiamo inoltre, con P_y^+ e P_y^- i due semispazi nei quali il piano P_y divide lo spazio.

Dato $y \in S^2$ siano $B^+(y) \subset P_y^+$ e $B^-(y) \subset P_y^-$ (risp. $C^+(y) \subset P_y^+$ e $C^-(y) \subset P_y^-$) i sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 nei quali risulta suddiviso B (risp. C) dal piano P_y . Siano inoltre $\text{vol}(B^+(y))$ e $\text{vol}(B^-(y))$ (risp. $\text{vol}(C^+(y))$ e $\text{vol}(C^-(y))$) i loro volumi. Consideriamo l'applicazione continua

$$g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \longmapsto (\text{vol}(B^+(y)) - \text{vol}(B^-(y)), \text{vol}(C^+(y)) - \text{vol}(C^-(y)))$$

Per costruzione $g(-y) = -g(y)$ per ogni $y \in S^2$. Segue dal Corollario 4.1.8 che esiste $y_0 \in S^2$ tale che $g(y_0) = 0$ ossia $\text{vol}(B^+(y_0)) = \text{vol}(B^-(y_0))$ e $\text{vol}(C^+(y_0)) = \text{vol}(C^-(y_0))$. Quindi P_{y_0} è il piano che divide ognuno dei tre insiemi A , B e C in due insiemi dello stesso volume. \square

Osservazione 4.1.14. Il Corollario 4.1.13 prende il nome dal *problema della divisione di un panino al prosciutto*, dove per panino al prosciutto si intende l'insieme costituito da due fette di pane e da una fetta di prosciutto. Il corollario mostra che è possibile dividere un panino al prosciutto con un solo taglio netto in modo che la fetta di pane inferiore, la fetta di prosciutto e la fetta di pane superiore siano simultaneamente tagliate esattamente a metà. Osserviamo, inoltre, che gli insiemi A , B e C non devono essere necessariamente connessi.

4.2 Il gruppo fondamentale del cerchio

In questo paragrafo calcoleremo il gruppo fondamentale del cerchio S^1 . Fissiamo il punto base $(1, 0)$ che in notazione complessa è il punto 1 .

Teorema 4.2.1. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. L'idea che sta alla base di questo isomorfismo di gruppi è che ogni arco chiuso $f : I \rightarrow S^1$ di base 1 “gira” in senso antiorario un certo numero di volte su S^1 . Questo numero intero si può pensare ottenuto euristicamente come segue: ogni volta che abbiamo compiuto un giro completo in senso antiorario registriamo un valore 1 ; se invece si è compiuto un giro completo ma in senso orario registriamo un valore -1 . La somma di questi valori è l'intero cercato. Per dimostrare che effettivamente $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ bisogna dimostrare che se f e g sono due archi chiusi di base 1 tali che $f \sim_{\{0,1\}} g$ allora l'intero associato a f è lo stesso dell'intero associato a g e che questo avviene tramite un isomorfismo di gruppi.

Per ottenere un'applicazione che a $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ associa il numero intero che tiene conto di quante volte $[f]$ gira intorno a 1 , usiamo il rivestimento $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 e i risultati sui sollevamenti degli archi. Dato $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ e sia $f \in [f]$ un suo rappresentante. Consideriamo $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = 0$. Possiamo definire allora

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(S^1, 1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f] &\longmapsto \tilde{f}(1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Segue dal Corollario 3.3.5 che Φ è ben definita.

Per dimostrare il Teorema 4.2.1 faremo vedere che Φ è un isomorfismo di gruppi. Introduciamo qualche notazione. Dato un laccio f in S^1 di base 1 e $a \in \mathbb{Z} = \exp^{-1}(1)$, denotiamo con $\ell_a(f)$ l'unico sollevamento di f che inizia in a , cioè che soddisfa $\exp \circ \ell_a(f) = f$ e $\ell_a(f)(0) = a$. Ovviamente se \tilde{f} è il sollevamento

di f che inizia in 0 allora $\ell_0(f) = \tilde{f}$ e quindi $\Phi([f]) = \ell_0(f)(1)$. Inoltre

$$\ell_a(f) = \ell_0(f) + \epsilon_a, \quad (4.2)$$

dove $\epsilon_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ è l'arco costante $\epsilon_a(t) = a$. Infatti

$$\ell_a(f)(0) = a = \ell_0(f)(0) + \epsilon_a(0)$$

e

$$\exp \circ \ell_a(f) = f = f \epsilon_1 = \exp(\ell_0(f)) \exp(\epsilon_a) = \exp \circ (\ell_0(f) + \epsilon_a)$$

e la (4.2) segue dall'unicità del sollevamento di archi con lo stesso punto iniziale (Proposizione 3.3.2). Inoltre, se f e g sono due lacci in S^1 di base 1 e $a \in \mathbb{Z} = \exp^{-1}(1)$ vale la seguente formula che lega il sollevamento di due lacci con la loro concatenazione $f \cdot g$:

$$\ell_a(f \cdot g) = \ell_a(f) \cdot \ell_b(g), \quad (4.3)$$

dove $b = \ell_a(f)(1)$. Infatti

$$(\ell_a(f) \cdot \ell_b(g))(0) = \ell_a(f)(0) = a$$

e

$$\exp \circ (\ell_a(f) \cdot \ell_b(g)) = (\exp \circ \ell_a(f)) \cdot (\exp \circ \ell_b(g)) = f \cdot g,$$

e la (4.3) segue ancora una volta dall'unicità del sollevamento degli archi. Possiamo ora dimostrare che Φ è un omomorfismo. Dati $[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$ allora, per la (4.3),

$$\Phi([f] \cdot [g]) = \Phi([f \cdot g]) = \ell_0(f \cdot g)(1) = (\ell_0(f) \cdot \ell_b(g))(1) = \ell_b(g)(1),$$

dove $b = \ell_0(f)(1)$. D'altra parte, per la (4.2),

$$\ell_b(g)(1) = \ell_0(g)(1) + b = \ell_0(g)(1) + \ell_0(f)(1) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \Phi([f]) + \Phi([g]).$$

Mostriamo ora che l'omomorfismo Φ è suriettivo. Sia k intero e $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'arco in \mathbb{R} definito da $\tilde{f}(t) = kt$. Allora $f = \exp \circ \tilde{f}$ è un laccio di base 1 e il suo (unico) sollevamento che inizia in 0 è esattamente \tilde{f} . Segue che $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = k$.

Infine dimostriamo l'iniettività di Φ . Sia $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ tale che $\Phi([f]) = 0$. Allora, per definizione di Φ , $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Essendo \mathbb{R} semplicemente connesso esiste un'omotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a $\{0, 1\}$ tale che $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \epsilon_0$. Allora $f = (\exp \circ \tilde{f}) \sim_{\{0,1\}} (\exp \circ \epsilon_0) = \epsilon_1$, cioè $[f] = [\epsilon_1]$, quindi Φ è iniettiva. \square

Corollario 4.2.2. *Non esiste una retrazione da D^2 a S^1 .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una retrazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ cioè un'applicazione continua tale che $r \circ i = \text{Id}_{S^1}$ dove $i : S^1 \rightarrow D^2$ denota l'inclusione. Segue dal Teorema 2.3.1) che

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{Id}_{\pi_1(S^1,1)}$$

In particolare $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D^2, 1)$ dev'essere iniettiva. Ma questo è assurdo in quanto non può esistere un'applicazione iniettiva da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ a $\pi_1(D^2, 1) = \{1\}$. \square

Corollario 4.2.3. *Il toro n -dimensionale \mathbb{T}^n ha gruppo fondamentale dato dal prodotto diretto di n copie di \mathbb{Z} . Conseguentemente \mathbb{T}^n e la sfera S^n non sono omotopicamente equivalenti per $n \geq 2$.*

Dimostrazione. La tesi segue dal Teorema 2.5.1., dal Teorema 2.6.1 e dal Teorema 4.2.1. \square

Corollario 4.2.4 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio di grado $k \geq 1$ a coefficienti in \mathbb{C} ha una radice in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità della dimostrazione possiamo assumere che il coefficiente che moltiplica z^n sia uguale a 1 cioè che il polinomio sia delle forma

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Supponiamo che p non abbia radici, cioè $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, e mostriamo che necessariamente $n = 0$. Allora l'applicazione

$$G : I \times [0, +\infty) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$$

definita da

$$G(t, r) = \frac{p(re^{2\pi it})}{|p(re^{2\pi it})|} \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

è continua. Consideriamo l'applicazione $F : I \times I \rightarrow S^1$ definita da:

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, \frac{s}{1-s}) & \text{se } t \in I, 0 \leq s < 1 \\ e^{2\pi int} & \text{se } t \in I, s = 1. \end{cases}$$

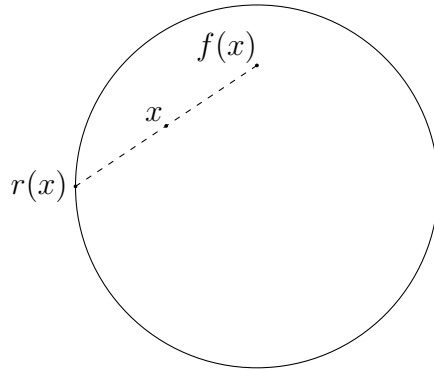
Non è difficile vedere che F è continua. Infatti, un calcolo diretto mostra che

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} F(t, s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} G(t, \frac{s}{1-s}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} G(t, r) = e^{2\pi int}.$$

Inoltre $F(t, 0) = 1$, $F(t, 1) = e^{2\pi int}$, $F(0, s) = F(1, s) = 1$, per ogni $s \in I$. Quindi F definisce un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ tra il laccio costante ϵ_1 e il laccio $f(t) = e^{2\pi int}$ (lacci basati in $1 \in S^1$). Osserviamo che il sollevamento di ϵ_1 che inizia in 0 è ϵ_0 , mentre il sollevamento di f che inizia in 0 è $\tilde{f} = kt$. Quindi, per il Corollario 3.3.5, abbiamo $0 = \epsilon_0(1) = \tilde{f}(1) = k$ che dimostra la tesi. \square

Corollario 4.2.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Sia $f : D^2 \rightarrow D^2$ un'applicazione continua. Allora f ha un punto fisso, cioè esiste $x_0 \in D^2$ tale che $f(x_0) = x_0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$. Allora possiamo definire un'applicazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ che al punto $x \in D^2$ associa l'intersezione della semiretta affine di \mathbb{R}^2 con origine in x e vettore direttore $x - f(x)$, con la frontiera di D^2 (cioè S^1).



Non è difficile scrivere l'espressione analitica di r e verificare che è continua. Infatti, un'equazione parametrica della semiretta in questione è la seguente:

$$s(x) = x + tg(x), \text{ per } t \geq 0 \text{ dove } g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

L'intersezione di tale semiretta con S^1 si ottiene per quei valori di t tali che $\|s(x)\|^2 = 1$ cioè:

$$t^2 + 2tx \cdot g(x) + \|x\|^2 = 1$$

dove “ \cdot ” denota il prodotto scalare di \mathbb{R}^2 . L'unica soluzione positiva di quest'equazione è:

$$t = -x \cdot g(x) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2}$$

e quindi l'espressione analitica di $r : D^2 \rightarrow S^1$ diventa:

$$r(x) = x + \left(\sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2} - x \cdot g(x) \right) g(x),$$

dalla quale si vede che r è continua. Osserviamo infine che r è un retractione da D^2 a S^1 (come si verifica facilmente dalla sua espressione analitica o dalla sua costruzione geometrica). Questo è in contrasto con il Corollario 4.2.2 e mostra che deve esistere un punto fisso per f . \square

Corollario 4.2.6 (Teorema di Frobenius). *Sia A un matrice 3×3 con entrate strettamente positive. Allora A ammette un autovalore reale positivo.*

Dimostrazione. Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(x, y, z) = A(x, y, z)^T$. Consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^3 ottenuto dall'intersezione di S^2 con il primo ottante e cioè:

$$B = S^2 \cap \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Osserviamo che, per le ipotesi sulla matrice A , dato $p \in B$, $T(p) \in \mathbb{R}^3$ è non nullo e tutte le sue componenti sono maggiori o uguali a zero. Resta così definita un'applicazione continua $p \mapsto \frac{T(p)}{\|T(p)\|}$ da B in B . Essendo B omeomorfo a D^2 , per il Teorema di Brouwer (cfr. l'Esercizio 4.10) esiste $p_0 \in B$ tale che $\frac{T(p_0)}{\|T(p_0)\|} = p_0$. Equivalentemente $T(p_0) = \|T(p_0)\|p_0$ e quindi $\|T(p_0)\|$ è un autovalore positivo di A . \square

Osservazione 4.2.7. Il Teorema del punto fisso di Brouwer può essere generalizzato al disco D^n , per ogni n , usando la teoria dell'omologia. Una dimostrazione geniale di questo teorema che fa uso del teorema delle funzione inversa è stata ottenuta da John Milnor in [Mil78].

4.3 Il gruppo fondamentale del proiettivo reale

Le tecniche usate nel calcolo del gruppo fondamentale di S^1 possono essere usate per calcolare il gruppo fondamentale del proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ n -dimensionale. Per $n = 1$, $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$, del quale abbiamo già calcolato il gruppo fondamentale. Quindi possiamo assumere $n \geq 2$. Dimostriamo dapprima una proprietà generale sui rivestimenti che generalizza il Teorema 3.3.6. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, sia $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ un punto fissato della fibra di x_0 . Analogamente a quanto fatto per il calcolo del gruppo fondamentale di S^1 possiamo definire un'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ [f] &\longmapsto \tilde{f}(1) \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Segue dal Corollario 3.3.5 che Φ è un'applicazione ben definita. Il risultato del quale abbiamo bisogno è il seguente:

Teorema 4.3.1. *Se \tilde{X} è connesso per archi allora Φ è suriettiva. Se inoltre \tilde{X} è semplicemente connesso allora Φ è una bigezione.*

Dimostrazione. Dato $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ sia $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ un arco che unisce $\tilde{x}_0 = \tilde{f}(0)$ con $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. Allora $f := p \circ \tilde{f} : I \rightarrow X$ è un laccio di base x_0 in X e, per definizione di Φ , $\Phi([f]) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Questo mostra che Φ è suriettiva.

Supponiamo ora che \tilde{X} sia semplicemente connesso. Allora \tilde{X} è connesso per archi e Φ è suriettiva per la prima parte. Resta da dimostrare che Φ è iniettiva. Siano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che $\Phi([f]) = \Phi([g])$. Equivalentemente $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ dove \tilde{f} e \tilde{g} sono i sollevamenti rispettivamente di f e g tali che $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Siccome \tilde{X} è semplicemente connesso $\tilde{f} \sim_{\{0,1\}} \tilde{g}$ tramite un'omotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ (cfr. Lemma 2.4.5). Segue che $f \sim_{\{0,1\}, F} g$ tramite l'omotopia $F := p \circ \tilde{F} : I \times I \rightarrow X$. Quindi $[f] = [g]$ e Φ è una bigezione. \square

Teorema 4.3.2. *Il gruppo fondamentale di \mathbb{RP}^n è il gruppo ciclico \mathbb{Z}_2 per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'identificazione $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ definita da $x \mapsto [x]$ tale che $y \in [x]$ se e solo se $y = \pm x$. Allora p è un omeomorfismo locale. Infatti per ogni punto $x \in S^n$ sia V un aperto di S^n che contiene x e tale che $V \cap (-V) = \emptyset$ dove $-V$ è l'insieme definito come $-V = \{-x \mid x \in V\}$. Allora la restrizione $p|_V : V \rightarrow p(V)$ è un omeomorfismo tra V e l'aperto $p(V)$ di \mathbb{RP}^n ($p(V)$ è aperto in quanto $p^{-1}(p(V)) = V \cup (-V)$ è aperto in S^n). Segue allora dal Teorema 3.2.4 che p è un rivestimento di grado due. Usando il fatto che S^n è semplicemente connessa (Teorema 2.5.1) e il Teorema 4.3.1 segue che $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ è un gruppo con due elementi e quindi isomorfo a \mathbb{Z}_2 . \square

Osservazione 4.3.3. Dal Teorema 4.3.2 e dal Corollario 4.2.3 deduciamo che le superfici S^2 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{RP}^2 sono topologicamente distinte. Nel Capitolo 9 calcoleremo il gruppo fondamentale di tutte le superfici compatte e connesse.

4.4 Esercizi

Esercizio 4.1. Si dimostrino le affermazioni fatte negli Esempio 1.1.2 e Esempio 1.2.2.

Esercizio 4.2. Si dimostri che il nastro di Möbius ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z} .

Esercizio 4.3. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ non esiste un'applicazione continua $f : S^n \rightarrow S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$.

[Suggerimento: imitare la dimostrazione del Teorema di Borsuk–Ulam ($n = 2$).]

Esercizio 4.4. Dimostrare che dati due insiemi misurabili nel piano esiste una retta che divide ognuno di essi in due parti della stessa area.

Esercizio 4.5. Trovare due spazi topologici X e Y e una funzione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ iniettiva (risp. suriettiva) tale che φ_* non sia iniettiva (risp. non sia suriettiva).

Esercizio 4.6. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazi di \mathbb{R}^2 : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$; $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$; $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, dove $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Esercizio 4.7. Calcolare il gruppo fondamentale di $S^n \times S^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.8. Dimostrare che \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Esercizio 4.9. Si dimostri che uno spazio topologico non può essere contemporaneamente una 2-varietà e una n -varietà per $n > 2$.

Esercizio 4.10. Sia B uno spazio topologico omeomorfo al disco D^2 . Dimostrare che un'applicazione continua $f : B \rightarrow B$ ha un punto fisso.

Esercizio 4.11. Sia A un retratto del disco D^2 . Dimostrare che un'applicazione continua $f : A \rightarrow A$ ha un punto fisso.

Esercizio 4.12. Sia n un numero naturale positivo. Dimostrare che un'applicazione continua da D^n a se stesso ha un punto fisso usando il fatto che $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 2$, dove $\pi_n(S^n)$ denota l' n -esimo gruppo di omotopia della sfera S^n .

Esercizio 4.13. Sia n un numero naturale positivo. Dimostrare che un'applicazione continua dall'interno del disco D^n a se stesso non ha necessariamente un punto fisso.

Capitolo 5

Classificazione dei rivestimenti

5.1 Azioni di gruppi su spazi topologici

Sia X uno spazio topologico e G un gruppo. Lo spazio X è detto un G -spazio (che da ora in poi sarà sinistro) se X è un G -insieme sinistro (vedi Appendice E) e l'applicazione bigettiva

$$\begin{aligned} L_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

è continua.

Osservazione 5.1.1. Se L_g è continua per ogni $g \in G$, allora è automaticamente un omeomorfismo, infatti la sua inversa è data da $L_{g^{-1}}$ che è continua per assunto.

Equivalentemente, X è un G -spazio se si ha un omomorfismo di G nel gruppo $\text{Omeo}(X)$ degli omeomorfismi di X che associa a g l'omeomorfismo L_g . Possiamo allora dotare lo spazio quoziente X/G della topologia quoziente rispetto alla proiezione canonica $\pi : X \rightarrow X/G$ secondo la quale U è aperto in X/G se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in X . Descriviamo ora alcune proprietà topologiche dello spazio quoziente.

Proposizione 5.1.2. *Sia X un G -spazio e $\pi : X \rightarrow X/G$ la proiezione sul quoziente. Allora π è aperta e se G è un gruppo finito, allora π è anche chiusa. Inoltre X/G è di Hausdorff se e solo se l'insieme*

$$K = \{(x, g \cdot x) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$$

è chiuso in $X \times X$.

Dimostrazione. Sia U un aperto di X . Allora

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} = \{x \in X \mid \pi(x) = \pi(y), \text{ per qualche } y \in U\} \\ &= \{x \in X \mid x = g \cdot y \text{ per qualche } y \in U \text{ e per qualche } g \in G\} \\ &= \{x \in X \mid x \in g \cdot U \text{ per qualche } g \in G\} = \cup_{g \in G} g \cdot U = \cup_{g \in G} L_g(U).\end{aligned}$$

Dal momento che L_g è un omeomorfismo e U è aperto segue che $L_g(U)$ è un aperto di X . Quindi $\pi(\pi^{-1}(U))$ è aperto in quanto unione di aperti e π è aperta.

Se C è un sottoinsieme chiuso di X e G è finito allora allo stesso modo si ottiene:

$$\pi(\pi^{-1}(C)) = \cup_{g \in G} L_g(C)$$

che è un chiuso in quanto unione finita di chiusi.

Infine osserviamo che l'applicazione

$$\begin{aligned}f : X \times X &\longrightarrow X/G \times X/G \\ (x, y) &\longmapsto (\pi(x), \pi(y)).\end{aligned}$$

è aperta e suriettiva e quindi un'identificazione.

Ricordiamo che X/G è di Hausdorff se e solo se la diagonale Δ è chiusa in $X/G \times X/G$ o, equivalentemente, se e solo se

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\} = \{(x, y) \in X \times X \mid y = g \cdot x\} = K$$

è chiuso in $X \times X$. □

Sia X un G -spazio. Diremo che l'azione di G su X è **propriamente discontinua** se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che

$$(g_1 \cdot U) \cap (g_2 \cdot U) = \emptyset \tag{5.1}$$

per ogni coppia di elementi distinti $g_1, g_2 \in G$. Ovviamente un'azione propriamente discontinua è anche propria. Osserviamo anche che l'azione di G su X è propriamente discontinua se e solo se per ogni $x \in X$ esiste un aperto U contenente x tale che

$$(g \cdot U) \cap U = \emptyset \tag{5.2}$$

per ogni elemento $g \in G$ diverso dall'elemento neutro. Infatti la (5.1) implica la (5.2) ponendo $g_2 = 1$. Mentre se vale la (5.2) allora si ottiene la (5.1):

$$(g_1 \cdot U) \cap (g_2 \cdot U) = g_2[(g_2^{-1}g_1U) \cap U] = \emptyset, \forall g_1, g_2 \in G.$$

Osservazione 5.1.3. Lo spazio quoziente di uno spazio di Hausdorff per un'azione propriamente discontinua non è in generale di Hausdorff. Massey ha costruito un esempio del gruppo \mathbb{Z} che agisce in modo propriamente discontinuo su un sottospazio X di \mathbb{R}^2 ma X/\mathbb{Z} non è di Hausdorff, si veda l'Esercizio 5.1.

L'interesse per le azioni propriamente discontinue è giustificato dal seguente:

Teorema 5.1.4. *Sia X un G -spazio. L'azione (a sinistra) di G su X è propriamente discontinua se e solo se $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Supponiamo che l'azione di G sia propriamente discontinua. Dalla Proposizione 5.1.2 l'applicazione π è continua, aperta e suriettiva. Sia $x \in X$ e U un aperto di X contenente x che soddisfa la condizione (5.2). Allora $\pi(U)$ è un aperto contenente $\pi(x)$. Se mostriamo che $\pi(U)$ è ben ricoperto da π seguirà che π è un rivestimento. Abbiamo già visto nella dimostrazione della Proposizione 5.1.2 che $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_g L_g(U)$. Quindi è sufficiente dimostrare che $\pi|_{L_g(U)} : L_g(U) \rightarrow \pi(L_g(U)) = \pi(U)$ è un omeomorfismo. Quest'applicazione non è altro che la composizione

$$\pi|_{L_g(U)} : L_g(U) \xrightarrow{L_g^{-1}} U \xrightarrow{\pi|_U} \pi(U).$$

Qui la prima mappa è un omeomorfismo per definizione e la seconda perché è una bigezione (iniettiva per la (5.2)), continua (in quanto restrizione di un'applicazione continua) e aperta (in quanto π è aperta).

Viceversa supponiamo che $\pi : X \rightarrow X/G$ sia un rivestimento. Dato $x \in X$ sia V un aperto di $\pi(x)$ ben ricoperto da π . Allora $\pi^{-1}(V) = \cup U_j$ e $\pi|_{U_j} : U_j \rightarrow V$ è un omeomorfismo. Sia U_{j_0} l'aperto che contiene x . Per ogni $g \in G$ l'aperto $g \cdot U_{j_0}$ dev'essere disgiunto da U_{j_0} altrimenti due punti di U_{j_0} sarebbero nella stessa orbita rispetto all'azione di G e la restrizione di π a U_{j_0} non sarebbe iniettiva. Quindi la (5.2) è soddisfatta e l'azione di G è propriamente discontinua. \square

Segue una lista di esempi di azioni propriamente discontinue. Il lettore è invitato a dimostrare i dettagli.

Esempio 5.1.5. Il sottogruppo di $\text{Omeo}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ generato dalla moltiplicazione per $\lambda > 0$, $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ è isomorfo a \mathbb{Z} e agisce a sinistra su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in maniera propriamente discontinua. Il quoziente $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{Z}$ è omeomorfo al toro \mathbb{T}^2 .

Esempio 5.1.6. Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}$. Allora ponendo $m \cdot x = m + x$, $x \in \mathbb{R}$ si definisce un'azione sinistra propriamente discontinua di G su X . Otteniamo quindi un rivestimento $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.

Esempio 5.1.7. Sia $G = \mathbb{Z}^2$ e $X = \mathbb{R}^2$. Allora ponendo

$$(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si definisce un'azione sinistra propriamente discontinua di G su X . Equivalentemente si sarebbe potuto considerare l'azione sinistra del sottogruppo H di $\text{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ generato dalle isometrie (traslazioni) $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ e $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$. Otteniamo quindi un rivestimento $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Questo può essere ottenuto anche come prodotto di due copie del rivestimento ottenuto nell'Esempio 5.1.6.

Esempio 5.1.8. Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ una striscia infinita. Allora ponendo

$$m \cdot (x, y) = (x + m, (-1)^m y).$$

si definisce un'azione sinistra propriamente discontinua di G su X . Lo spazio quoziente X/G è omeomorfo al nastro di Mobius e $\pi : X \rightarrow N$ è un rivestimento.

Esempio 5.1.9. Consideriamo l'azione sinistra del sottogruppo H di $\text{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ generata dalle isometrie (traslazioni) $(x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y)$ e $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$. Quindi H è costituito dalle isometrie della forma $(x, y) \mapsto (x + m, (-1)^m y + n)$. Equivalentemente si è definita un'azione sinistra propriamente discontinua di H su X . Lo spazio quoziente X/H è omeomorfo alla bottiglia di Klein e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow X/H$ è un rivestimento.

Esempio 5.1.10. Sia $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ e $X = S^n$ la sfera unitaria centrata nell'origine. Allora ponendo $\pm 1 \cdot x = \pm x$, $x \in S^n$ si definisce un'azione propriamente discontinua di G su X . Otteniamo quindi un rivestimento $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

Se il gruppo G che agisce su uno spazio X è finito allora abbiamo un criterio utile per controllare se l'azione sia propriamente discontinua.

Teorema 5.1.11. *Sia G un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X . Allora l'azione di G su X è propriamente discontinua.*

Dimostrazione. Siano $g_0 = 1, g_1, \dots, g_n$ gli elementi di G e sia $x \in X$. Allora i punti $g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ sono tutti distinti da $g_0 \cdot x = x$ in quanto l'azione è libera. Siccome X è di Hausdorff esistono aperti U_0, \dots, U_n contenenti $x, g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ rispettivamente tali che $U_0 \cap U_k = \emptyset$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Allora

$$U = \bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j$$

è un aperto contenente x che soddisfa la (5.2). Infatti, per ogni $g = g_k \in G$ con $k = 0, \dots, n$ si ha:

$$g_k \cdot U = g_k \cdot (\cap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j) = \cap_{j=0}^n g_k g_j^{-1} \cdot U_j \subset g_k g_k^{-1} \cdot U_k = U_k.$$

Per cui per ogni $k = 1, \dots, n$ otteniamo $g_k \cdot U \cap U \subset U_k \cap U_0 = \emptyset$ dato che $U_0 \cap U_k = \emptyset$. \square

Esempio 5.1.12. Sia $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} h : S^3 &\longrightarrow S^3 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2) \end{aligned}$$

dove p e q sono interi positivi primi fra loro e $1 \leq q < p$. L'applicazione h è un omeomorfismo con inverso

$$\begin{aligned} h^{-1} : S^3 &\longrightarrow S^3 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (e^{-2\pi i/p} z_1, e^{-2\pi i q/p} z_2) \end{aligned}$$

e $h^p = \text{Id}_{S^3}$. L'omeomorfismo h genera quindi un'azione di \mathbb{Z}_p su S^3 :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p \times S^3 &\longrightarrow S^3 \\ ([n]_p, (z_1, z_2)) &\longmapsto (e^{2\pi i n/p} z_1, e^{2\pi i n q/p} z_2) \end{aligned}$$

Quest'azione è libera. Infatti se $e^{2\pi i n/p} z_1 = z_1$ e $e^{2\pi i n q/p} z_2 = z_2$ con $z_1 \neq 0$, allora $e^{2\pi i n/p} = 1$ e quindi $p|n$; se invece $z_1 = 0$, allora $z_2 \neq 0$ e $e^{2\pi i n q/p} = 1$ e quindi, essendo p e q coprimi, si ha $p|n$. Quindi per il Teorema 5.1.11 l'azione è propriamente discontinua. Il quoziente S^3/\mathbb{Z}_p è quindi uno spazio topologico chiamato **spazio lenticolare** e per il Teorema 5.1.4 la proiezione sul quoziente è un rivestimento $S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_p$.

Osservazione 5.1.13. Si può dimostrare che dato il disco unitario $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e un intero $g \geq 2$ esiste un sottogruppo $\Gamma_g \subset \text{Omeo}(D^2)$ che agisce in modo propriamente discontinuo su D^2 e tale che lo spazio quoziente D^2/Γ_g sia omeomorfo a una superficie compatta, connessa e orientabile Σ_g di genere g . Quindi esiste un rivestimento $\pi : D^2 \rightarrow \Sigma_g$.

5.2 Rivestimenti e gruppo fondamentale

In questa sezione studieremo alcuni legami tra i gruppi fondamentali dello spazio totale \tilde{X} e dello spazio di base X di un dato rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

Sia $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in X$. Ricordiamo che in (4.4) abbiamo definito un'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ [f] &\longmapsto \tilde{f}(1) \end{aligned}$$

dove $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ è l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Abbiamo dimostrato nel Teorema 4.3.1 che se \tilde{X} è connesso per archi allora Φ è suriettiva e se \tilde{X} è semplicemente connesso allora Φ è una bigezione. Vale anche il seguente risultato.

Teorema 5.2.1. *Siano $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in X$.*

- (1) *L'omomorfismo $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ indotto da p è iniettivo. In particolare, $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ isomorfo a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$;*
- (2) *Se f è un laccio di X basato in x_0 , allora $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se f si solleva ad un laccio di \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 ;*
- (3) *La mappa Φ induce un'applicazione iniettiva*

$$\Psi : \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)} \rightarrow p^{-1}(x_0) \quad (5.3)$$

dall'insieme delle classi laterali destre di $p_\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ alla fibra $p^{-1}(x_0)$. Inoltre, Ψ è bigettiva se \tilde{X} è connesso per archi.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima la (1). Sia \tilde{f} un laccio in \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 e supponiamo che $p_*([f]) = [p \circ \tilde{f}] = [\epsilon_{x_0}]$. Questo significa che $p \circ \tilde{f}$ e ϵ_{x_0} sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. Ma allora i loro sollevamenti \tilde{f} e $\epsilon_{\tilde{x}_0}$ sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$ per il Corollario 3.3.5 cioè $[\tilde{f}]$ è l'elemento neutro di $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Per dimostrare (2) consideriamo un arco f in X basato in x_0 il cui sollevamento \tilde{f} tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ è un laccio in \tilde{x}_0 . Chiaramente si ha $p_*[\tilde{f}] = [p \circ \tilde{f}] = [f]$ per cui $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Viceversa, se $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ allora f è omotopo relativamente a $\{0, 1\}$ ad un laccio $p \circ \tilde{g}$ dove $\tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ è un laccio basato in \tilde{x}_0 . Ma allora, ancora per il Corollario 3.3.5, il sollevamento \tilde{f} di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ è omotopo relativamente a $\{0, 1\}$ a \tilde{g} e in particolare $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_0$.

Dimostriamo ora la (3). Per mostrare che Ψ è ben definita dobbiamo verificare che se $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]$ allora $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. La prima condizione significa che esiste un laccio $\tilde{h} : I \rightarrow \tilde{X}$ basato in \tilde{x}_0 tale che $[f] = (p_*[\tilde{h}])[g] = [(p \circ \tilde{h}) \cdot g]$.

Per cui i loro sollevamenti \tilde{f} e $\widetilde{(p \circ \tilde{h}) \cdot g}$ tali che $\tilde{f}(0) = \widetilde{(p \circ \tilde{h}) \cdot g}(0) = \tilde{x}_0$ sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. Ma $\widetilde{(p \circ \tilde{h}) \cdot g} = \tilde{h} \cdot \tilde{g}$ dove \tilde{g} è il sollevamento di g tale che $\tilde{g}(0) = \tilde{h}(1) = \tilde{x}_0$. Per cui concludiamo che $\tilde{f}(1) = (\tilde{h} \cdot \tilde{g})(1) = \tilde{g}(1)$. L'iniettività di Ψ è equivalente al viceversa del precedente punto. Ovvero, dati due elementi $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ tali che $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ vale $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g]$. Ora se $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ allora l'arco $\tilde{f} \cdot i(\tilde{g})$ è un laccio basato in \tilde{x}_0 per cui $[f \circ i(g)] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ per il punto (2). Quindi abbiamo

$$[f] = [f \cdot i(g) \cdot g] = [f \cdot i(g)][g] = p_*[\tilde{f} \cdot i(\tilde{g})][g] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[g].$$

Infine, se \tilde{X} è connesso per archi, allora per il Teorema 4.3.1 la mappa Φ , e conseguentemente la Ψ , è suriettiva. \square

Corollario 5.2.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} connesso per archi. Allora p è un omeomorfismo se e solo se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(X, x_0)$.*

Corollario 5.2.3. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} connesso per archi. Allora il grado del rivestimento è uguale a n se e solo se l'indice di $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ è n , per ogni $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

Nella proposizione che segue ci proponiamo di capire come sono legati i due gruppi $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ per scelte diverse di $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ tali che $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$.

Proposizione 5.2.4. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, \tilde{X} connesso per archi, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora un sottogruppo $H \leq \pi_1(X, x_0)$ è coniugato a $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se esiste $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ tale che $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ tale che $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ e dimostriamo che H è coniugato a $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Sia \tilde{f} un arco da \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 e

$$\begin{aligned} u_{\tilde{f}} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) &\longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \\ [\tilde{g}] &\longmapsto [i(\tilde{f}) \cdot \tilde{g} \cdot \tilde{f}] \end{aligned}$$

l'isomorfismo associato. Applicando p_* si ha: $p_*u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. D'altra parte per ogni $[\tilde{g}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ si ha

$$p_*u_{\tilde{f}}[\tilde{g}] = p_*[i(\tilde{f}) \cdot \tilde{g} \cdot \tilde{f}] = [i(f) \cdot g \cdot f] = u_f[g] = u_f p_*[\tilde{g}].$$

Per cui

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_*u_{\tilde{f}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = u_f p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = [i(f)]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f]$$

e la conclusione segue da $[i(f)] = [f]^{-1}$.

Viceversa, se H è un sottogruppo coniugato a $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, allora $H = [f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f]$ per un certo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Sia \tilde{f} il sollevamento di f che inizia in \tilde{x}_0 e sia $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. Per la parte precedente $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ e quindi $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. \square

Osservazione 5.2.5. Le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$ sono invarianti algebrici del rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Mostriamo nel Corollario 5.6.2 che queste determinano il rivestimento a meno di isomorfismi.

5.3 Teorema di sollevamento

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia Y uno spazio topologico, $y_0 \in Y$ e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$.

Domanda: *Quando esiste un sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p (cioè una funzione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$, tale che $p \circ \tilde{f} = f$) tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$?*

Dalla Proposizione 3.3.1 sappiamo che se Y è connesso e un tale sollevamento esiste allora è unico. Inoltre sappiamo che un tale sollevamento esiste se $Y = I$ (Proposizione 3.3.2) o $Y = I^2$ (Proposizione 3.3.4).

Per rispondere alla domanda nel caso generale osserviamo che se esiste un sollevamento $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ di $f : Y \rightarrow X$ allora

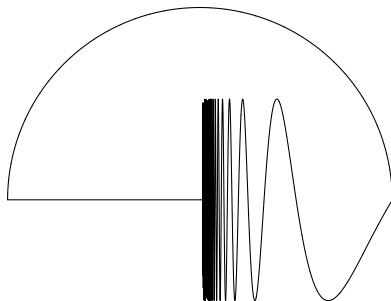
$$f_*\pi(Y, y_0) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Quindi la condizione

$$f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \tag{5.4}$$

è necessaria per l'esistenza di un sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Il seguente esempio mostra che in generale questa condizione non è sufficiente.

Esempio 5.3.1. Sia Y il cosiddetto *cerchio polacco* cioè $Y = A \cup B \cup C$, dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\}$.



Si verifica facilmente che Y è semplicemente connesso, cfr. l'Esercizio 5.2, e quindi soddisfa banalmente la (5.4). Consideriamo il rivestimento $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dell'Esempio 3.1.5 e fissiamo i punti $y_0 = (1, 0) \in Y$, $\tilde{x}_0 = 0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Definiamo ora una funzione continua (perché?) $f : Y \rightarrow S^1$ come:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ (x, -\sqrt{1-x^2}) & \text{se } (x, y) \in B \cup C. \end{cases}$$

Si noti che $f(y_0) = x_0$. Vogliamo mostrare che f non ammette un sollevamento $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. A tal fine scegliamo una funzione continua $p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\cos p(x) = x, \sin p(x) \geq 0, p(-1) = \pi, p(1) = 0;$$

per esempio, l'inversa di $y = \cos x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

Analogamente consideriamo una funzione continua $q : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\cos q(x) = x, \sin q(x) \leq 0, q(-1) = -\pi, q(1) = 0;$$

per esempio, l'inversa di $y = \cos x$ nell'intervallo $[-\pi, 0]$.

Se per assurdo un tale sollevamento \tilde{f} esistesse, allora per ogni $(x, y) \in A$ si avrebbe

$$\exp \tilde{f}(x, y) = f(x, y) = (x, y) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (\cos p(x), \sin p(x)) = \exp p(x)$$

e quindi

$$\tilde{f}(x, y) = p(x) + 2\pi n(x, y),$$

dove n è una funzione a valori interi definita su A . Essendo n continua perché differenza di funzione continue segue che n è costante:

$$\tilde{f}(x, y) = p(x) + 2\pi n, \forall (x, y) \in A. \quad (5.5)$$

Analogamente per ogni $(x, y) \in B \cup C$ si avrebbe

$$\exp \tilde{f}(x, y) = f(x, y) = (x, y) = (x, -\sqrt{1-x^2}) = (\cos q(x), \sin q(x)) = \exp q(x)$$

e quindi

$$\tilde{f}(x, y) = q(x) + 2\pi m, \forall (x, y) \in B \cup C \quad (5.6)$$

per una certa costante intera m .

Valutando le equazioni (5.5) e (5.6) nei punti $A \cap (B \cup C) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}(-1, 0) &= p(-1) + 2\pi n = q(-1) + 2\pi m \\ \tilde{f}(1, 0) &= p(1) + 2\pi n = q(1) + 2\pi m \end{aligned}$$

Queste implicano rispettivamente:

$$\begin{aligned} p(-1) - q(-1) = 2\pi(m - n) &\Rightarrow 2\pi = 2\pi(m - n) \Rightarrow m = n + 1 \\ p(1) - q(1) = 2\pi(m - n) &\Rightarrow 0 = 2\pi(m - n) \Rightarrow m = n. \end{aligned}$$

Questa contraddizione mostra che un sollevamento \tilde{f} di f non può esistere.

Se si analizza il cerchio polacco ci si accorge che non è localmente connesso per archi nell'origine (si confronti l'Appendice A). In effetti il prossimo risultato mostra che questo è il motivo topologico per il quale il sollevamento di f non esiste e che sotto questa ipotesi la condizione (5.4) diventa sufficiente per l'esistenza di un sollevamento. Ricordiamo che per il Teorema A.1.4 uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è sempre connesso per archi.

Teorema 5.3.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, Sia inoltre Y uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$ e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$. Allora esiste un unico sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ se e solo se $f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che la condizione (5.4) è necessaria per l'esistenza di un rivestimento. Ci rimane da dimostrare solo che esiste un sollevamento \tilde{f} di f tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ poiché l'unicità di \tilde{f} segue dalla Proposizione 3.3.1 per la connessione di Y . La dimostrazione si divide in tre parti (definizione, buona definizione e continuità) ognuna delle quali usa un'ipotesi del teorema ovvero, rispettivamente, la connessione per archi, la condizione (5.4) e la locale connessione per archi.

Definizione: Costruiamo \tilde{f} usando la connessione per archi di Y . Sia $y \in Y$ e sia $\alpha : I \rightarrow Y$ un arco tale che $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = y$. Osserviamo che l'arco $f \circ \alpha$ inizia in x_0 quindi per il teorema del sollevamento degli archi esiste un suo unico sollevamento $\widetilde{f \circ \alpha}$ tale che $\widetilde{f \circ \alpha}(0) = \tilde{x}_0$. L'immagine di $y \in Y$ attraverso l'applicazione $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ è definita come il punto finale dell'arco $\widetilde{f \circ \alpha}$ cioè:

$$\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \alpha}(1). \quad (5.7)$$

Buona definizione: Dobbiamo dimostrare che \tilde{f} è ben definita, cioè che non dipende dall'arco α scelto. Sia dunque $\beta : I \rightarrow Y$ un altro arco in Y tale che $\beta(0) = y_0$ e $\beta(1) = y$. Allora $\alpha \cdot i(\beta)$ è un laccio basato in y_0 e quindi $[\alpha \cdot i(\beta)] \in \pi_1(Y, y_0)$. L'ipotesi (5.4) implica l'esistenza di un laccio φ in \tilde{X} basato in \tilde{x}_0 tale che

$$f_*[\alpha \cdot i(\beta)] = [f \circ (\alpha \cdot i(\beta))] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ i(\beta))] = p_*[\varphi] = [p \circ \varphi]$$

cioè $(f \circ \alpha) \cdot (f \circ i(\beta)) \sim_{\{0,1\}} (p \circ \varphi)$. Segue che

$$f \circ \alpha \sim_{\{0,1\}} (f \circ \alpha) \cdot (f \circ i(\beta)) \cdot (f \circ \beta) \sim_{\{0,1\}} (p \circ \varphi) \cdot (f \circ \beta).$$

Per il teorema di sollevamento delle omotopie, i sollevamenti degli archi $f \circ \alpha$ e $(p \circ \varphi) \cdot (f \circ \beta)$ che iniziano in \tilde{x}_0 finiscono nello stesso punto. Ma il sollevamento di $f \circ \alpha$ è $\widetilde{f \circ \alpha}$ mentre quello di $(p \circ \varphi) \cdot (f \circ \beta)$ è $\varphi \cdot \widetilde{f \circ \beta}$, dove $\widetilde{f \circ \beta}$ è il sollevamento di $f \circ \beta$ che inizia in $\varphi(1) = \tilde{x}_0$. Segue che:

$$\widetilde{f \circ \alpha}(1) = \widetilde{f \circ \beta}(1)$$

e quindi la definizione di \tilde{f} non dipende dall'arco scelto.

Continuità: Per concludere mostriamo ora che \tilde{f} è continua. Sia $y \in Y$ e \tilde{U} un aperto arbitrario di \tilde{X} contenente $\tilde{f}(y)$. Vogliamo trovare un aperto V di Y tale che $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. Siccome p è aperta, $p(\tilde{U})$ è aperto in X . Esiste quindi $U \subseteq p(\tilde{U})$ ben ricoperto da p , cioè $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti \tilde{U}_j e $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo. Sia quindi \tilde{U}_k l'aperto contenente $\tilde{f}(y)$ tale che $p|_{\tilde{U}_k} : \tilde{U}_k \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Dalla continuità di f segue che $f^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k))$ è un aperto di Y contenente y . Essendo Y localmente connesso per archi esiste un aperto V connesso per archi e contenente y tale che

$$V \subseteq f^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)).$$

Mostriamo che

$$\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{U}_k \subseteq \tilde{U}$$

e questo mostrerà la continuità di \tilde{f} . Scegliamo $y' \in V$. Sia α un arco in Y tra y_0 e y e sia β un arco in V tra y e y' . Ora possiamo calcolare $\tilde{f}(y')$ come punto finale del sollevamento di $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$ che comincia in \tilde{x}_0 . Questo sollevamento è dato dalla concatenazione di $\widetilde{f \circ \alpha}$ con il sollevamento di $(f \circ \beta)$ che inizia in $\widetilde{f \circ \alpha}(1) = \tilde{f}(y)$. Ma questo sollevamento è esattamente $p|_{\tilde{U}_k}^{-1} \circ f \circ \beta$ per cui

$$\tilde{f}(y') = f \circ (\alpha \cdot \beta)(1) = (p|_{\tilde{U}_k}^{-1} \circ f \circ \beta)(1) \in p|_{\tilde{U}_k}^{-1}(p(\tilde{U} \cap \tilde{U}_k)) = \tilde{U} \cap \tilde{U}_k.$$

□

Osservazione 5.3.3. Si noti che nel dimostrare il teorema abbiamo dovuto sfruttare l'esistenza e unicità dei sollevamenti di archi e omotopie tra archi. Per cui con questa linea dimostrativa non possiamo considerare la Proposizione 3.3.2 e la Proposizione 3.3.4 come corollari del Teorema 5.3.2.

Corollario 5.3.4. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia inoltre Y semplicemente connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$ e $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua tale che $f(y_0) = x_0$. Allora esiste un unico sollevamento \tilde{f} di f rispetto a p tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

5.4 Omomorfismi e Isomorfismi tra rivestimenti

In questo paragrafo gli spazi topologici \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 e X saranno connessi e localmente connessi per archi.

L'obiettivo di questa sezione è definire il concetto di isomorfismo tra rivestimenti e trovare condizioni necessarie e sufficienti perché due rivestimenti siano isomorfi. Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ due rivestimenti sullo stesso spazio X . Un **omomorfismo** tra i due rivestimenti è un'applicazione continua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ cioè che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Si verifica immediatamente che la composizione di omomorfismi è un omomorfismo e che se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento $id_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ è un omomorfismo.

Un omomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ è un **isomorfismo** se esiste un omomorfismo $\psi : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $\psi \circ \varphi = Id_{\tilde{X}_1}$ e $\varphi \circ \psi = Id_{\tilde{X}_2}$. Quindi un omomorfismo tra rivestimenti è un isomorfismo se e solo se è un omeomorfismo. Dato che la relazione di isomorfismo tra rivestimenti è chiaramente una relazione di equivalenza, due rivestimenti saranno detti **isomorfi** oppure **equivalenti** se esiste un isomorfismo che li lega.

Teorema 5.4.1. *Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ due rivestimenti e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Esiste un unico isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ un isomorfismo tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Allora essendo φ un omeomorfismo, abbiamo

$$\varphi_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2).$$

Dal momento che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ si deduce che

$$p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\varphi_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2).$$

Viceversa, supponiamo che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Applicando il Teorema 5.3.2 al rivestimento p_2 esiste un unico sollevamento della mappa p_1 cioè un'unica applicazione continua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \varphi$ e $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Allo stesso modo, scambiando il ruolo di p_1 e p_2 , esiste un'unica applicazione continua $\psi : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $p_2 = p_1 \circ \psi$ e $\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. Ora l'applicazione $\psi \circ \varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ è un sollevamento di p_1 e $\psi(\varphi(\tilde{x}_1)) = \tilde{x}_1$, lo stesso vale per $\text{Id}_{\tilde{X}_1}$. Visivamente

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id}_{\tilde{x}_1} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\psi} & \tilde{X}_1 \\
 & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p_1 & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Segue dall'unicità del sollevamento che $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\tilde{X}_1}$. Analogamente si ha

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id}_{\tilde{x}_2} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\psi} & \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\
 & \searrow p_2 & \downarrow p_1 & \swarrow p_2 & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

per cui $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\tilde{X}_2}$ e φ è un isomorfismo con inverso ψ . \square

Osservazione 5.4.2. Segue dal Teorema 5.3.2 che se $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ sono due rivestimenti e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ sono tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, allora esiste un omomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subseteq p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.

Osserviamo che il Teorema 5.4.1 non risolve il problema di quando due rivestimenti sono isomorfi in piena generalità in quanto abbiamo richiesto una consistenza sui punti $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$. Potrebbe capitare infatti che non esista un isomorfismo che manda il punto \tilde{x}_1 su \tilde{x}_2 nonostante i due rivestimenti siano isomorfi. Il seguente risultato tiene conto di questo e fornisce una condizione necessaria e sufficiente all'equivalenza di due rivestimenti.

Teorema 5.4.3. *Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ due rivestimenti e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Esiste un isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ se e solo se i sottogruppi $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati.*

Dimostrazione. Sia $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ un isomorfismo e $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$. Per Teorema 5.4.1 vale $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ e per la Proposizione 5.2.4 il sottogruppo

$p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$ è coniugato a $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Quindi $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati.

Viceversa, se $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati, allora per la Proposizione 5.2.4 esiste \tilde{x}'_2 tale che $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)$. Quindi per il Teorema 5.4.1 esiste un (unico) isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ (tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$). \square

5.5 Rivestimenti universali

Supponiamo che $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sia un rivestimento. Se \tilde{X} è semplicemente connesso, allora $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è chiamato un **rivestimento universale** di X . Dal momento che $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$ per ogni $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, segue dal Teorema 5.4.3 che due rivestimenti universali sono isomorfi. Per questo motivo \tilde{X} si chiamerà il *rivestimento universale*. L'aggettivo universale è motivato dal risultato seguente.

Proposizione 5.5.1. *Siano \tilde{X} , X e \tilde{X}_1 tre spazi topologici connessi e localmente connessi per archi, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento con \tilde{X} semplicemente connesso. Se $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ è un altro rivestimento allora esiste un rivestimento $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $p = p_1 \circ \tilde{p}$:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{X}_1 \\ & \searrow p & \downarrow p_1 \\ & & X \end{array}$$

Dimostrazione. Per ogni $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ si ha $\{1\} = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$. Segue quindi dal Teorema 5.3.2 che esiste $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ tale che $p = p_1 \circ \tilde{p}$. Per il punto (1) dell'Esercizio 5.5 si deduce che \tilde{p} è un rivestimento. \square

Osservazione 5.5.2. La Proposizione 5.5.1 può essere considerata come la proprietà universale del rivestimento universale. Da questa discende immediatamente l'unicità del rivestimento universale ma lascia aperta la seguente:

Domanda: *Sia X uno spazio topologico. Sotto quali condizioni esiste un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, con \tilde{X} semplicemente connesso?*

Andiamo alla ricerca di condizioni necessarie. Supponiamo quindi che $p : \tilde{X} \rightarrow X$, sia un rivestimento con \tilde{X} semplicemente connesso. Sia $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ e U un aperto banalizzante che contiene x_0 . Esiste quindi un aperto V di \tilde{X} che contiene \tilde{x}_0 tale che $p|_V : V \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Denotiamo con

$i : U \rightarrow X$ e $j : V \rightarrow \tilde{X}$ le inclusioni. Allora $i \circ p|_V = p \circ j$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ p|_V \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Passando alla applicazioni indotte sui gruppi fondamentali

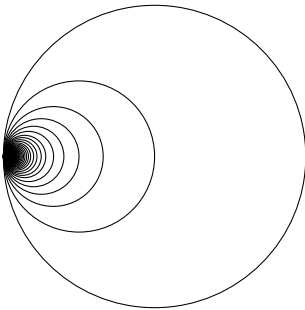
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\} \\ p|_{V*} \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(U, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

e usando il fatto che \tilde{X} è semplicemente connesso si deduce che $i_*([f]) = [\epsilon_{x_0}]$ per ogni $[f] \in \pi_1(U, x_0)$. Quindi se X ammette un rivestimento universale allora soddisfa la seguente proprietà:

Ogni punto $x_0 \in X$ ha un intorno aperto U tale che l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i_ : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è banale.*

In altri termini, ogni laccio in U basato in x_0 è equivalente all'arco costante ϵ_{x_0} tramite un'omotopia che non avviene necessariamente in U . Uno spazio topologico che soddisfa questa proprietà è detto **semilocalmente semplicemente connesso**. Dalla definizione risulta chiaro che questa proprietà è locale (cioè vale per ogni altro intorno aperto di x_0 contenuto in U). Osserviamo che uno spazio semplicemente connesso è anche semilocalmente semplicemente connesso. Il prossimo esempio dimostra che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi non è necessariamente semilocalmente semplicemente connesso.

Esempio 5.5.3. Consideriamo l'*orecchino hawaiano* ossia $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, dove C_n è la circonferenza di raggio $\frac{1}{n}$ e centro nel punto $(\frac{1}{n}, 0)$ in \mathbb{R}^2 .



Si verifica immediatamente che X è connesso e localmente connesso per archi ma non è semilocalmente semplicemente connesso. Infatti sia U un intorno aperto dell'origine $x_0 = (0, 0)$ di X . Esiste un n sufficientemente grande per cui $C_n \subset U$.

Fissiamo un tale n e consideriamo la retrazione $r : X \rightarrow X/(X \setminus C_n)$ di X su C_n che identifica tutti i cerchi C_m con $n \neq m$ nell'origine e lascia fisso C_n . Si consideri la composizione

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Id}_{C_n} & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ C_n & \xrightarrow{j_n} & U & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & X/(X \setminus C_n) \cong C_n \end{array}$$

dove j_n e i denotano le inclusioni. Questa implica che gli omomorfismi indotti a livello di gruppo fondamentale soddisfino

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Id}_{\mathbb{Z}} & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ \mathbb{Z} \cong \pi_1(C_n, x_0) & \xrightarrow{j_{n*}} & \pi_1(U, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(C_n, x_0) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

per cui $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ non può essere l'omomorfismo banale.

In effetti l'essere semilocalmente semplicemente connesso e anche una condizione sufficiente per l'esistenza di un rivestimento universale:

Teorema 5.5.4. *Sia X uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Allora X ammette un rivestimento universale se e solo se X è semilocalmente semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Per giustificare la costruzione del rivestimento universale si consideri un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ con spazio totale \tilde{X} semplicemente connesso, un punto $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Per la Proposizione 3.3.4 due archi in X che iniziano in x_0 sono omotopi relativamente agli estremi se e solo se lo sono i loro sollevamenti che iniziano in \tilde{x}_0 . Ma dato che \tilde{X} è semplicemente connesso, per il Lemma 2.4.5 questi sollevamenti sono omotopi relativamente agli estremi se e solo se hanno lo stesso punto finale. Per cui possiamo interpretare i punti di \tilde{X} come classi di equivalenza di archi in X che iniziano in x_0 . Questo ci permette di definire uno spazio \tilde{X} solo in termini di X .

Definizione e suriettività: Denotiamo con $[\gamma]$ la classe di omotopia relativa a $\{0, 1\}$ di un arco $\gamma : I \rightarrow X$. Definiamo dunque

$$\tilde{X} := \{[\gamma] \mid \gamma : I \rightarrow X \text{ con } \gamma(0) = x_0\}.$$

La funzione (per il momento tra insiemi)

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} &\longrightarrow X \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

è chiaramente ben definita e suriettiva poiché X è connesso per archi.

Una base per la topologia di X : Denotiamo con \mathcal{U} l'insieme degli aperti connessi per archi di X tali che l'omomorfismo $i_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ indotto dall'inclusione sia banale. Qua omettiamo la scelta del punto base perché tutti gli spazi sono connessi per archi. Si noti che un sottoinsieme connesso per archi $V \subset U$ di $U \in \mathcal{U}$ è ancora un elemento di \mathcal{U} perché la composizione $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ è necessariamente banale. Per cui \mathcal{U} è una base per la topologia di X se X è localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso.

Una topologia di \tilde{X} : Dato un aperto $U \in \mathcal{U}$ e un arco γ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) \in U$ definiamo il sottoinsieme di \tilde{X} :

$$U_{[\gamma]} := \{[\gamma \cdot \eta] \mid \eta : I \rightarrow U \text{ con } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Si noti che $U_{[\gamma]}$ dipende solo da U e dalla classe di omotopia $[\gamma]$ di γ .

Inoltre se $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ allora $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$. Questo perché se $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ possiamo assumere che $\gamma' = \gamma \cdot \eta$ dove $\eta : I \rightarrow U$ soddisfa $\eta(0) = \gamma(1)$. Ma allora gli elementi di $U_{[\gamma']}$ sono del tipo $[\gamma \cdot \eta \cdot \mu]$ dove $\mu : I \rightarrow U$ soddisfa $\mu(0) = \eta(1)$. Quindi $U_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$ perché $\eta \cdot \mu$ è un arco in U tale che $\eta \cdot \mu(0) = \gamma(1)$. Viceversa, un elemento di $U_{[\gamma]}$ è del tipo $[\gamma \cdot \mu]$ dove $\mu : I \rightarrow U$ soddisfa $\mu(0) = \gamma(1)$. Ma allora $[\gamma \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot i(\eta) \cdot \mu] = [\gamma' \cdot i(\eta) \cdot \mu] \in U_{[\gamma']}$.

Sfruttando questa proprietà possiamo mostrare che gli insiemi $U_{[\gamma]}$ formano una base per una topologia su \tilde{X} al variare di γ e $U \in \mathcal{U}$. Chiaramente questi insiemi ricoprono \tilde{X} per cui ci basta dimostrare che dati due insiemi $U_{[\gamma]}$ e $V_{[\gamma']}$ e un elemento $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ esiste un insieme della forma $W_{[\gamma'']}$ (che contiene $[\gamma'']$) contenuto in $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Innanzitutto osserviamo che, per la proprietà appena dimostrata, $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ e $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Ora la condizione $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ implica che $\gamma''(1) \in U \cap V$. Essendo \mathcal{U} una base per la topologia di X esiste un insieme $W \in \mathcal{U}$ che contiene $\gamma''(1)$ e tale che $W \subset U \cap V$. Per cui per definizione abbiamo $[\gamma''] \in W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$.

La mappa p è un omeomorfismo locale: Osserviamo innanzitutto che la mappa $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \rightarrow U$ è suriettiva perché U è connesso per archi e iniettiva perché l'omomorfismo $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ è banale per cui due archi in U con gli stessi estremi sono omotopi in X . Inoltre $p|_{U_{[\gamma]}}$ è un omeomorfismo perché definisce una bigiezione tra gli aperti $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$ e gli aperti $V \in \mathcal{U}$ contenuti in U . Infatti se $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$ allora $p(V_{[\gamma']}) = V$. Viceversa, se $V \in \mathcal{U}$ è contenuto in U e $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ soddisfa $\gamma'(1) \in V$, allora si ha $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$ e quindi $V_{[\gamma']} = p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]}$.

La mappa p è un rivestimento: Abbiamo visto nel paragrafo precedente che $p : \tilde{X} \rightarrow X$ è un omeomorfismo locale. Quindi dobbiamo solo mostrare che ogni punto $x \in X$ ammette un intorno ben ricoperto. Sia $U \in \mathcal{U}$ un insieme contenente

x . Allora $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta degli aperti $U_{[\gamma]}$ al variare di $[\gamma]$. Infatti se $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$ allora si ha $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma']}$.

Lo spazio \tilde{X} è connesso per archi: Sia $[\gamma]$ un qualsiasi punto di \tilde{X} e sia $[\varepsilon_{x_0}] \in \tilde{X}$ dove ε_{x_0} è l'arco costante in $x_0 = \gamma(0)$. Allora il sollevamento di γ che inizia in $[\varepsilon_{x_0}]$ è dato da $f_\gamma(t) = [\gamma_t]$ dove

$$\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{se } s \in [0, t] \\ \gamma(t) & \text{se } s \in [t, 1] \end{cases}$$

Si noti che $f_\gamma(1) = [\gamma]$. Ora l'arbitrarietà di γ implica che \tilde{X} è connesso per archi poiché qualsiasi punto di \tilde{X} è connesso a $[\varepsilon_{x_0}]$ da un arco.

Lo spazio \tilde{X} è semplicemente connesso: Per il punto precedente e il Teorema 5.2.1 l'omomorfismo p_* è iniettivo e quindi ci basta mostrare che $p_*\pi_1(\tilde{X}, [\varepsilon_{x_0}]) = \{1\}$. Ricordiamo che un elemento $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ appartiene all'immagine di p_* se e solo se il suo sollevamento che incomincia in $[\varepsilon_{x_0}]$ è un laccio. Ma il suo sollevamento è l'arco f_γ dato nel punto precedente e soddisfa $f_\gamma(1) = [\gamma]$. Per cui essere un laccio equivale a soddisfare $[\gamma] = f_\gamma(1) = [\varepsilon_{x_0}]$ e cioè γ è omotopo al laccio costante in x_0 e questo conclude la dimostrazione. \square

5.6 Classificazione dei rivestimenti

Siamo ora pronti per la classificazione dei rivestimenti di uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. In generale vale il seguente risultato che risponde in piena generalità alla domanda sull'esistenza di un rivestimento di uno spazio topologico dato.

Teorema 5.6.1. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$. Per ogni sottogruppo H di $\pi_1(X, x_0)$ esiste un rivestimento $p_H : X_H \rightarrow X$ e un punto $\tilde{x}_0 \in p_H^{-1}(x_0)$ tale che $p_{H*}\pi_1(X_H, \tilde{x}_0) = H$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 5.5.4 esiste il rivestimento universale $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Usando la notazione della dimostrazione del Teorema 5.5.4 consideriamo la seguente relazione tra i punti del rivestimento universale \tilde{X} :

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \iff \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ e } [\gamma \cdot i(\gamma')] \in H.$$

Questa è ben definita in quanto se $\gamma(1) = \gamma'(1)$ allora $\gamma \cdot i(\gamma')$ è un laccio basato in x_0 . Inoltre questa relazione è chiaramente

Riflessiva: perché $[\gamma \cdot i(\gamma)] = [\varepsilon_{x_0}]$ e H contiene l'elemento neutro.

Simmetrica: perché $[\gamma' \cdot i(\gamma)] = [\gamma \cdot i(\gamma')]^{-1}$ e H è chiuso rispetto all'inverso.

Transitiva: perché se $[\gamma] \sim [\gamma']$ e $[\gamma'] \sim [\gamma'']$ allora $[\gamma \cdot i(\gamma')][\gamma' \cdot i(\gamma'')] = [\gamma \cdot i(\gamma'')] \in H$ perché H è chiuso rispetto al prodotto.

Per cui possiamo considerare lo spazio quoziente $X_H := \tilde{X} / \sim$ e la mappa

$$\begin{aligned} p_H : X_H &\longrightarrow X \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

indotta da $p : \tilde{X} \rightarrow X$ dove con abuso di notazione indichiamo con $[\gamma]$ la classe di equivalenza di $[\gamma]$ stesso.

Osserviamo che se η è un arco in $U \in \mathcal{U}$ e $\gamma(1) = \gamma'(1)$ allora

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \Leftrightarrow [\gamma \cdot i(\gamma')] \in H \Leftrightarrow [\gamma \cdot \eta \cdot i(\eta) \cdot i(\gamma')] \in H \Leftrightarrow [\gamma \cdot \eta] \sim [\gamma' \cdot \eta].$$

Per questo motivo se due elementi in due aperti della forma $U_{[\gamma]}$, $U_{[\gamma']}$ sono in relazione, allora gli intorni $U_{[\gamma]}$ e $U_{[\gamma']}$ sono interamente identificati nel quoziente X_H . Ne deduciamo che $p_H : X_H \rightarrow X$ è un rivestimento perché p_H è chiaramente suriettiva e ogni intorno $U \subset X$ ben ricoperto da p è ancora ben ricoperto da p_H .

Infine consideriamo come punto base \tilde{x}_0 in X_H la classe di $[\varepsilon_{x_0}]$. Allora un elemento $[\gamma]$ appartiene all'immagine $p_{H*}\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)$ se e solo se γ ammette un sollevamento f_γ che è un laccio in \tilde{x}_0 . Questo avviene se e solo se $f(1) = \tilde{x}_0$ cioè $[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}]$ in X_H . Ma questo è equivalente a dire che $[\gamma] = [\gamma \cdot i(\varepsilon_{x_0})] \in H$. Per cui

$$[\gamma] \in p_{H*}\pi_1(X_H, \tilde{x}_0) \iff [\gamma] \in H.$$

□

Come conseguenza del Teorema 5.4.3 e del Teorema 5.6.1 otteniamo una classificazione algebrica dei rivestimenti di uno spazio topologico (cfr. Esercizio 5.7):

Corollario 5.6.2. *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Sia $x_0 \in X$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi di isomorfismo di rivestimenti di X e le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.*

5.7 Automorfismi di un rivestimento

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento. Un **automorfismo** (o **trasformazione** oppure **deck transformation**) del rivestimento è un isomorfismo dal rivestimento

in se stesso. L'insieme degli automorfismi è un gruppo rispetto alla composizione e verrà denotato con $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$. In questa sezione dimostriamo che $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ è interamente determinato dal sottogruppo $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Ricordiamo che se H è un sottogruppo di un gruppo G il **normalizzatore** di H in G è il sottogruppo di G definito da:

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Osserviamo che $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G che contiene H come sottogruppo normale e quindi H è normale in G se e solo se $G = N(H)$.

Teorema 5.7.1. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento dove \tilde{X} e X sono spazi connessi e localmente connessi per archi. Dato $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ il gruppo $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo quoziente $\frac{N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la bigezione

$$\begin{aligned} \Psi : \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)} &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] &\longmapsto \tilde{f}(1) \end{aligned}$$

data in (5.3) dove \tilde{f} è l'unico sollevamento dell'arco f che inizia in \tilde{x}_0 . Vogliamo mettere in relazione il gruppo $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ con la fibra $p^{-1}(x_0)$ tramite l'applicazione

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Aut}(\tilde{X}, p) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ \varphi &\longmapsto \varphi(\tilde{x}_0) \end{aligned}$$

Si noti che Θ è ben definita perché $p \circ \varphi = p$. Inoltre Θ è iniettiva in quanto un automorfismo φ è un sollevamento di p per cui è univocamente determinato dal valore che assume in \tilde{x}_0 .

Vogliamo dimostrare di poter invertire Ψ in modo da definire una relazione biunivoca tra i due gruppi. Mostriamo quindi che l'immagine di Θ è uguale all'immagine del sottoinsieme $\frac{N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$ di $\frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$ tramite Ψ . Questo è equivalente a dimostrare che $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{f}(1)$ se e solo se $[f] \in N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. In effetti per il Teorema 5.4.1 un tale automorfismo φ esiste se e solo se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, dove $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(1)$. D'altra parte, per la Proposizione 5.2.4, $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Quindi φ esiste se e solo se $[f]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ossia se e solo se $[f] \in N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ che dimostra l'asserto.

Segue che l'applicazione

$$\Psi^{-1} \circ \Theta : \text{Aut}(\tilde{X}, p) \rightarrow \frac{N(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}$$

è una bigezione. Dimostriamo che quest'applicazione è un omomorfismo di gruppi e questo concluderà la dimostrazione del teorema. Fissiamo la notazione: Siano φ_1 e φ_2 due automorfismi di \tilde{X} tali che $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ e $\varphi_2(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_2$ e quindi $\Theta(\varphi_1) = \tilde{x}_1$ e $\Theta(\varphi_2) = \tilde{x}_2$. Sia \tilde{f}_1 (rispettivamente \tilde{f}_2) un arco in \tilde{X} da \tilde{x}_0 in \tilde{x}_1 (risp. \tilde{x}_2) e $f_1 = p \circ \tilde{f}_1$ (risp. $f_2 = p \circ \tilde{f}_2$). Allora $\Psi(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_1]) = \tilde{x}_1$ e $\Psi(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_2]) = \tilde{x}_2$. Sia $\tilde{x}_3 = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}_0)) = \varphi_1(\tilde{x}_2)$. Allora $\Theta(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \tilde{x}_3$. Per dimostrare che $\Psi^{-1} \circ \Theta$ è un omomorfismo dobbiamo far vedere che

$$\Psi^{-1}(\Theta(\varphi_1 \circ \varphi_2)) = \Psi^{-1}(\Theta(\varphi_1))\Psi^{-1}(\Theta(\varphi_2))$$

ossia:

$$\Psi^{-1}(\tilde{x}_3) = \Psi^{-1}(\tilde{x}_1)\Psi^{-1}(\tilde{x}_2) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_1]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_2] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_1 \cdot f_2].$$

Equivalentemente, dobbiamo mostrare che:

$$\Psi(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_1 \cdot f_2]) = \tilde{x}_3.$$

Si noti che per definizione $\Psi(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_1 \cdot f_2]) = \widetilde{f_1 \cdot f_2}(1)$ dove $\widetilde{f_1 \cdot f_2}$ è l'unico sollevamento di $f_1 \cdot f_2$ che inizia in \tilde{x}_0 . Si verifica immediatamente che questo sollevamento è esattamente $\tilde{f}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{f}_2)$. Ma allora

$$\Psi(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[f_1 \cdot f_2]) = \widetilde{f_1 \cdot f_2}(1) = (\tilde{f}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{f}_2))(1) = \varphi_1(\tilde{f}_2(1)) = \tilde{x}_3$$

che conclude la dimostrazione. \square

Applicando il risultato precedente ad un rivestimento universale $p : \tilde{X} \rightarrow X$ otteniamo immediatamente il seguente

Corollario 5.7.2. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ il rivestimento universale di X . Allora $\text{Aut}(\tilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x_0)$ per un qualsiasi punto $x_0 \in X$.*

Osservazione 5.7.3. È immediato verificare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\tilde{X}, p) \times p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ (\varphi, \tilde{x}_0) &\longmapsto \varphi(\tilde{x}_0) \end{aligned}$$

è un'azione del gruppo $\text{Aut}(\tilde{X})$ sulla fibra $p^{-1}(x_0)$.

Appendice A

Componenti connesse e connesse per archi

Il lettore può consultare [Loi13, Capitolo 9] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi connessi e connessi per archi.

A.1 Componenti connesse e connesse per archi

Consideriamo uno spazio topologico X . Esiste un modo naturale per scrivere lo spazio come unione di sottospazi connessi e connessi per archi. Cominciamo con i connessi. Diremo che due punti x e y di X sono in relazione se esiste un sottospazio connesso di X che contiene x e y . La riflessività e la simmetria di questa relazione sono immediate. La transitività segue dal fatto che se A è un sottospazio connesso di X che contiene x e y e B un sottospazio connesso che contiene y e z allora $A \cup B$ è un sottospazio connesso (perché unione di due connessi A e B con il punto y in comune) che contiene x e z . Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione d'equivalenza sono chiamate le **componenti connesse di X** . Vale il seguente risultato lasciato come esercizio per il lettore.

Teorema A.1.1. *Le componenti connesse di X sono sottospazi connessi, chiusi e disgiunti di X che ricoprono X . Ogni connesso è contenuto in una e una sola componente connessa. Inoltre la cardinalità delle componenti connesse è un invariante topologico.*

Se la cardinalità delle componenti connesse è finita allora ogni componente connessa è un sottoinsieme aperto (oltre che chiuso) di X . Infatti in questo caso una componente connessa è il complementare del chiuso ottenuto come unione finita delle altre componenti connesse. Ma in generale una componente connessa

non è aperta. Si pensi, ad esempio, alle componenti connesse di \mathbb{Q} che sono costituite dai singoli punti (che non sono aperti di \mathbb{Q}).

Veniamo ora ai connessi per archi. Diremo che due punti x e y di X sono in relazione se esiste un arco in X che congiunge x con y . La riflessività di questa relazione si ottiene usando l'arco costante, la simmetria usando l'arco $i(f) : I \rightarrow X$, $i(f)(t) = f(1 - t)$ e la transitività usando la concatenazione tra archi (cfr.(2.1) del Capitolo 2). Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione d'equivalenza sono chiamate **componenti connesse per archi** di X .

Anche la dimostrazione del seguente teorema è lasciata per esercizio al lettore.

Teorema A.1.2. *Le componenti connesse per archi di X sono sottospazi connessi per archi e disgiunti di X che ricoprono X . Ogni sottospazio connesso per archi è contenuto in una e una sola componente connessa per archi. Inoltre la cardinalità delle componenti connesse per archi è un invariante topologico.*

Le componenti connesse per archi di uno spazio X possono essere aperte oppure chiuse. Consideriamo per esempio i seguenti sottoinsiemi del piano:

$$C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], n \geq 1 \text{ intero} \right\}, \quad I_x = \{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1] \}$$

E' immediato verificare che $C \cup I_x$ è connesso per archi e quindi connesso. Inoltre si dimostra (cfr. [Loi13, Esempio 9.2.6]) che

$$X = \{P_0\} \cup C \cup I_x, \quad P_0 = (0, 1) \tag{A.1}$$

è connesso ma non connesso per archi. Lo spazio X ha una componente connessa (essendo connesso) mentre le componenti connesse per archi sono due: una è costituita dal punto $P_0 = (0, 1)$ che è chiusa ma non aperta e l'altra da $X \setminus P_0$ che è aperta ma non chiusa. Esistono anche spazi dove le componenti connesse per archi non sono né aperte né chiuse (non ne parleremo).

Sia x un punto di uno spazio topologico X . Diremo che X è **localmente connesso in x** se per ogni aperto U contenente x esiste un intorno ¹ connesso V di x contenuto in U . Se X è localmente connesso in ogni suo punto diremo che X è **localmente connesso**. Analogamente X è **localmente connesso per archi in x** se per ogni intorno aperto U di x esiste un intorno connesso per archi V di x contenuto in U . Se X è localmente connesso per archi in ogni suo punto diremo che X è **localmente connesso per archi**. Dal momento che uno spazio connesso

¹Un intorno di un punto x di uno spazio topologico X è un sottoinsieme N di X per il quale esiste un aperto A di X tale che $x \in A \subseteq N$.

per archi è anche connesso segue che uno spazio localmente connesso per archi è localmente connesso. Esistono spazi localmente connessi ma non localmente connessi per archi (non ne parleremo). Osserviamo che una varietà topologica (o più in generale uno spazio localmente euclideo) è localmente connessa per archi.

Osservazione A.1.3. Non esiste nessun legame tra la locale connessione e la connessione oppure tra la locale connessione per archi e la connessione per archi. Per esempio l'unione di due intervalli disgiunti di \mathbb{R} non è connesso per archi (e neppure connesso) ma localmente connesso per archi (e quindi localmente connesso). Un esempio di spazio connesso per archi ma non localmente connesso (per archi) si ottiene considerando lo spazio $Y = X \cup S$ dove X è lo spazio dato da (A.1) e S è il segmento di retta verticale che congiunge l'origine con il punto P_0 .

Teorema A.1.4. *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi di X sono sia aperte che chiuse e coincidono con le componenti connesse di X . In particolare, uno spazio connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*

Dimostrazione. Sia A una componente connessa per archi di X diversa dal vuoto. Vogliamo mostrare che A è aperta e chiusa. Sia $x \in A$ e sia V un intorno di x connesso per archi (che esiste perché X è localmente connesso per archi in x). Allora $V \subseteq A$ altrimenti $V \cup A$ sarebbe un connesso per archi che contiene A . Questo mostra che x è un punto interno di A e quindi A è aperto. Ma allora A è anche chiuso in quanto complementare dell'unione delle componenti connesse per archi diverse da A .

Sia ora C una componente connessa di X . Esisterà quindi una componente connessa per archi A di X tale che $A \cap C \neq \emptyset$. Quindi $A \cap C$ è un sottoinsieme non vuoto sia aperto che chiuso di C ; essendo C connesso $A \cap C = C$ ossia $C \subseteq A$. D'altra parte $A \subseteq C$, altrimenti $A \cup C$ sarebbe un connesso che contiene C . Concludiamo che $A = C$ che è quello che si voleva dimostrare. \square

A.2 Esercizi

Esercizio A.1. Dimostrare il Teorema A.1.1 e il Teorema A.1.2.

Appendice B

Spazi localmente compatti

Il lettore può consultare [Loi13, Capitolo 10] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi compatti. Inoltre nella dimostrazione della Proposizione B.3.2 faremo uso di alcune proprietà degli spazi quoziente che il lettore può trovare in [Loi13, Capitolo 11]).

B.1 Definizioni e prime proprietà

Sia x un punto di uno spazio topologico X . Diremo che X è **localmente compatto in** x se esiste un intorno compatto di x , cioè se esiste un compatto $K \subseteq X$, $x \in K$ e un aperto U di X tale che $x \in U \subseteq K$. Se X è localmente compatto in ogni suo punto diremo che X è **localmente compatto**.

I seguenti fatti sono di facile verifica e sono lasciati come esercizio per il lettore (cfr. Esercizio B.1):

- (i) Ogni varietà topologica è localmente compatta.
- (ii) Ogni spazio topologico compatto è localmente compatto.
- (iii) Il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto.
- (iv) Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione continua, aperta e suriettiva (un'identificazione aperta) e X è localmente compatto allora Y è localmente compatto. In particolare la locale compattezza è una proprietà topologica.

Teorema B.1.1. *Uno spazio topologico X è localmente compatto e di Hausdorff se e solo se esiste uno spazio topologico X^∞ che soddisfa le condizioni seguenti:*

- a) X è un sottospazio di X^∞ ;

b) $X^\infty \setminus X$ è un solo punto;

c) X^∞ è uno spazio compatto e di Hausdorff.

Inoltre, se X^∞ e \tilde{X}^∞ sono due spazi topologici che soddisfano le condizioni a), b), c), allora esiste un omeomorfismo da X^∞ a \tilde{X}^∞ che è uguale all'identità ristretto a X .

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'ultima parte del teorema. Definiamo un'applicazione $f : X^\infty \rightarrow \tilde{X}^\infty$ che porta il punto $\infty := X^\infty \setminus X$ nel punto $\tilde{\infty} := \tilde{X}^\infty \setminus X$ e che sia l'identità su X . Vogliamo dimostrare che f è un omeomorfismo. Per fare questo sarà sufficiente far vedere che f è aperta (per simmetria infatti lo sarà anche f^{-1}). Sia U un aperto di X^∞ . Se $\infty \notin U$ allora $f(U) = U$. Siccome U è aperto in X^∞ e $U \subseteq X$ allora $U = U \cap X$ è aperto in X . Siccome X è aperto anche in \tilde{X}^∞ , l'insieme U è aperto in \tilde{X}^∞ . Supponiamo che invece $\infty \in U$. Siccome $K = X^\infty \setminus U$ è chiuso in X^∞ allora è compatto in X^∞ (in quanto X^∞ è compatto). Dal momento che K è contenuto in X allora K è un compatto di X (per la proprietà assoluta dei compatti). Ma allora K è anche un compatto di \tilde{X}^∞ (sempre per la proprietà assoluta dei compatti) e quindi chiuso in \tilde{X}^∞ (in quanto \tilde{X}^∞ è di Hausdorff). Allora $f(U) = f(X^\infty \setminus K) = \tilde{X}^\infty \setminus K$ è aperto in \tilde{X}^∞ .

Mostriamo ora che se X^∞ è uno spazio topologico che soddisfa le condizioni a), b), c) allora X è localmente compatto e di Hausdorff. Il fatto che X sia di Hausdorff segue dal fatto che X è un sottospazio di X^∞ che è di Hausdorff. Dato $x \in X$ mostriamo ora che X è localmente compatto in x . Come sopra denotiamo con ∞ il punto $X^\infty \setminus X$ dato da b). Dal momento che X^∞ è di Hausdorff esistono due aperti disgiunti U e V di X^∞ che contengono rispettivamente il punto x e il punto ∞ . Allora $K = X^\infty \setminus V$ è un chiuso di X^∞ e quindi compatto in quanto X^∞ è compatto. Ma K è un sottoinsieme di X e quindi è compatto anche in X . Inoltre $x \in U \subseteq K$, e quindi K è un intorno compatto di x e quindi X è localmente compatto in x .

Supponiamo ora che X sia uno spazio topologico localmente compatto e di Hausdorff e costruiamo uno spazio X^∞ che soddisfa le condizioni a), b) e c). Sia ∞ un punto qualsiasi che non appartiene a X e poniamo $X^\infty := X \cup \{\infty\}$. Definiamo una topologia su X^∞ come la famiglia dei sottoinsiemi di X^∞ costituita da (1) tutti i sottoinsiemi U aperti di X e (2) da tutti gli insiemi della forma $X^\infty \setminus K$, dove K è un sottoinsieme compatto di X . La verifica che si tratta effettivamente di una topologia è lasciata al lettore (cfr. Esercizio B.3). Mostriamo ora che X è un sottospazio di X^∞ cioè un insieme U è aperto in X se e solo se esiste un

aperto V di X^∞ tale che $U = X \cap V$. Se l'aperto di X^∞ è di tipo (1) allora $U = X \cap U$, che è aperto in X . Mentre se l'aperto di X^∞ è di tipo (2), cioè della forma $V = X^\infty \setminus K$ con K compatto di X , allora $V \cap X = X \setminus K$ che è aperto in X (complementare del chiuso K). Mostriamo ora che X^∞ è compatto. Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X^∞ . La famiglia \mathcal{U} deve contenere un aperto di tipo (2), $X^\infty \setminus K$ perché gli insiemi aperti di tipo (1) non contengono il punto ∞ . Si consideri la famiglia di tutti gli elementi di \mathcal{U} escluso l'aperto $X^\infty \setminus K$. Otteniamo così una famiglia di aperti di X^∞ che ricopre K . Essendo K un compatto di X e quindi di X^∞ (per la proprietà assoluta dei compatti), un numero finito di questi aperti ricopre K . Si ottiene quindi un numero finito di aperti di \mathcal{U} che, insieme all'aperto $X^\infty \setminus K$, costituisce un sottoricoprimento finito del ricoprimento \mathcal{U} .

Mostriamo infine che X^∞ è di Hausdorff. Siano x e y due punti distinti di X^∞ . Se entrambi stanno in X allora esistono due aperti di X (e quindi di X^∞) disgiunti U e V contenenti rispettivamente x e y . Se $x \in X$ e $y = \infty$. Sia U un aperto di X e K un sottoinsieme compatto di X tali che $x \in U \subseteq K$ (qui si sfrutta il fatto che X è localmente compatto). Allora U e $X^\infty \setminus K$ sono due aperti disgiunti che contengono x e ∞ rispettivamente. \square

B.2 Altre proprietà degli spazi localmente compatti

La definizione di spazio localmente compatto non è una proprietà locale. Di solito uno spazio X soddisfa una data proprietà "localmente" se ogni $x \in X$ ammette un intorno "arbitrariamente piccolo" che soddisfa la proprietà. La definizione di compattezza locale non ha a che fare con il concetto di "arbitrariamente piccolo". Se però X è di Hausdorff esiste una caratterizzazione "locale" degli spazi localmente compatti.

Teorema B.2.1. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Allora X è localmente compatto se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni aperto U contenente x esiste un aperto V contenente x tale che \bar{V} è compatto e $\bar{V} \subseteq U$.*

Dimostrazione. Se è soddisfatta la condizione del teorema allora X è localmente compatto. Infatti dato $x \in X$ e l'aperto $U = X$ basta definire $K = \bar{V}$ (dove V è l'aperto tale che $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X$). Viceversa sia X localmente compatto. Sia $x \in X$ e U un aperto di X che contiene x . Sia X^∞ come nel Teorema B.1.1 e sia $H = X^\infty \setminus U$. Allora H è un chiuso in X^∞ e quindi compatto in X^∞ . Siano V e W due aperti disgiunti di X^∞ che contengono rispettivamente x e H

(due compatti disgiunti in uno spazio di Hausdorff possono essere separati da aperti). La chiusura \bar{V} di V in X^∞ è compatta. Inoltre $W \cap V = \emptyset$ implica $W \cap \bar{V} = \emptyset$ e quindi $H \cap \bar{V} = \emptyset$. Deduciamo che $\bar{V} \subseteq U$ è un compatto di X tale che $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. \square

Gli spazi topologici “fatti bene” sono gli spazi metrizzabili e gli spazi compatti e di Hausdorff. Inoltre ogni sottospazio di uno spazio metrizzabile è metrizzabile ma in generale un sottoinsieme di uno spazio compatto e di Hausdorff (pur essendo di Hausdorff) non è compatto. Se il sottoinsieme è chiuso allora è compatto. Ma se il sottoinsieme è aperto questo non è vero. Per gli spazi localmente compatti e di Hausdorff questo continua a essere vero come mostra il seguente:

Corollario B.2.2. *Sia X uno spazio localmente compatto e di Hausdorff e sia C (risp. A) un sottoinsieme chiuso (risp. aperto) di X . Allora C (risp. A) è localmente compatto (e di Hausdorff).*

Dimostrazione. Sia $x \in C$ e siano U e K rispettivamente un aperto e un sottospazio compatto di X tali che $x \in U \subseteq K$. Allora $K \cap C$ è chiuso in K e quindi compatto e contiene l'aperto $U \cap C$ che contiene x . Sia $x \in A$. Per il Teorema B.2.1 esiste un aperto V contenente x tale che \bar{V} è compatto e $\bar{V} \subseteq A$. Allora $K = \bar{V}$ è un sottoinsieme compatto di A tale che $x \in V \subseteq K$. \square

Il corollario seguente mostra che la condizione che caratterizza gli aperti degli spazi compatti e di Hausdorff è quella di spazio localmente compatto e di Hausdorff.

Corollario B.2.3. *Uno spazio topologico X è omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di uno spazio compatto e di Hausdorff se e solo se X è localmente compatto e di Hausdorff.*

Dimostrazione. Se X è localmente compatto e di Hausdorff allora X è un aperto dello spazio compatto e di Hausdorff X^∞ (si veda il Teorema B.1.1). Viceversa se X è omeomorfo ad un aperto di uno spazio compatto e di Hausdorff allora è localmente compatto e di Hausdorff per il Corollario B.2.2. \square

B.3 Compattificazioni di Alexandrov

Nel Teorema B.1.1 se X è compatto allora lo spazio X^∞ non è molto interessante: è semplicemente X al quale è stato aggiunto un punto isolato ∞ (infatti in questo caso $\{\infty\}$ è un aperto di X^∞ in quanto complementare del chiuso X). Se

invece X non è compatto allora il punto $\infty = X^\infty \setminus X$ è un punto di accumulazione di X . Infatti un aperto di X^∞ che contiene ∞ è della forma $X^\infty \setminus K$ con K compatto di X il quale interseca X in un punto diverso ∞ in quanto $X \setminus K \neq \emptyset$ (altrimenti X sarebbe uguale a K e quindi compatto). Segue allora che X è denso in X^∞ , cioè $\overline{X} = X^\infty$. Se X^∞ è uno spazio compatto e di Hausdorff e X è un sottospazio proprio tale che $X^\infty \setminus X$ sia un solo punto allora X^∞ è chiamata la **compattificazione di Alexandrov** (o con un punto) di X . Il Teorema B.1.1 mostra che esiste una compactificazione di Alexandrov di uno spazio X se e solo se X è localmente compatto e di Hausdorff. Notiamo anche che la compactificazione di Alexandrov X^∞ di X è univocamente determinata a meno di omeomorfismi come segue dall'ultima parte del Teorema B.1.1.

Esempio B.3.1. La sfera n -dimensionale S^n è la compactificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n . Infatti usando la proiezione stereografica \mathbb{R}^n è omeomorfo a $S^n \setminus N$, dove N è il polo nord.

Proposizione B.3.2. *Sia X uno spazio compatto e di Hausdorff e $U \subseteq X$ un suo sottoinsieme aperto. Allora esiste U^∞ la compactificazione di Alexandrov di U e*

$$\frac{X}{X \setminus U} \cong U^\infty,$$

dove $\frac{X}{X \setminus U}$ denota lo spazio quoziente di X tramite la relazione d'equivalenza che identifica due punti di X se e solo se appartengono a $X \setminus U$.

Dimostrazione. L'esistenza di U^∞ segue dal Corollario B.2.2. Consideriamo l'applicazione $f : X \rightarrow U^\infty$ definita da: $f(x) = x$, se $x \in U$ e $f(x) = \infty$ se $x \in X \setminus U$. Dimostriamo che f è continua facendo vedere che la controimmagine di sottoinsieme aperto di U^∞ è aperto in X . Sia $V \subseteq U^\infty$ aperto, abbiamo due casi:

- $V \subseteq U$ aperto, ma allora, dato che $U \subseteq X$ è aperto questo significa che V è aperto in X e quindi per definizione $f^{-1}(V) = V$ aperto.
- $V = U^\infty \setminus K$ con K compatto in U , per la proprietà universale dei compatti, K è compatto in X e quindi è chiuso (dato che X è di Hausdorff); inoltre, osservando che $\infty \notin K$ e che $U \setminus K \subset U$, abbiamo

$$f^{-1}(U^\infty \setminus K) = f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(U \setminus K) = (X \setminus U) \cup (U \setminus K) = X \setminus K$$

che è aperto in quanto complementare di un chiuso.

Notiamo inoltre che f passa al quoziente rispetto alla proiezione canonica

$$\pi : X \rightarrow \frac{X}{X \setminus U}, \quad \pi(x) = [x].$$

Infatti l'unico insieme in cui π non è iniettiva è $X \setminus U$ ma $f(X \setminus U) = \infty$. Per il [Loi13, Corollario 10.2.3]) esiste un'unica applicazione continua

$$\tilde{f} : \frac{X}{X \setminus U} \rightarrow U^\infty$$

tale che $\tilde{f} \circ \pi = f$. Osserviamo che \tilde{f} è iniettiva. Siano infatti $[x], [y] \in \frac{X}{X \setminus U}$ tali che $[x] \neq [y]$ e siano $x, y \in X$ tali che $\pi(x) = [x]$ e $\pi(y) = [y]$. Si hanno due possibilità (a meno di scambiare x con y): 1) $x, y \in U$, $x \neq y$, 2) $x \in U$, $y \in X \setminus U$. Nel primo caso $\tilde{f}([x]) = f(x) = x \neq y = f(y) = \tilde{f}([y])$ e nel secondo caso $\tilde{f}([x]) = f(x) = x \neq \infty = f(y) = \tilde{f}([y])$.

Infine, \tilde{f} è anche chiusa in quanto applicazione continua dal compatto $\frac{X}{X \setminus U}$ (quoziente del compatto X) allo spazio di Hausdorff U^∞ . Concludiamo che \tilde{f} è un omeomorfismo. \square

Corollario B.3.3. *Sia $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ il disco unitario e $\partial D^n = S^{n-1}$ la sua frontiera. Allora*

$$S^n \cong \frac{D^n}{S^{n-1}}.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione B.3.2 con $X = D^n$ e $U = D^n \setminus S^{n-1}$. L'aperto U (il disco unitario aperto) è omeomorfo a \mathbb{R}^n . Si ottiene quindi, usando l'Esempio B.3.1,

$$S^n = (\mathbb{R}^n)^\infty = U^\infty = \frac{D^n}{D^n \setminus U} = \frac{D^n}{S^{n-1}}.$$

\square

B.4 Esercizi

Esercizio B.1. Dimostrare le affermazioni (i), (ii), (iii) e (iv) dell'Appendice B.1.

Esercizio B.2. Dimostrare che i numeri razionali non sono uno spazio localmente compatto.

Esercizio B.3. Sia X uno spazio di Hausdorff. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ costituita da tutti gli aperti di X e dagli insiemi della forma $X^\infty \setminus K$ al variare di K compatto in X definisce una topologia su X^∞ .

Appendice C

Numero di Lebesgue

Il lettore può consultare [Loi13, Capitolo 2] per le definizioni e le principali proprietà degli spazi metrici.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $S \subseteq X$ un sottoinsieme arbitrario di X . Il **diametro** di S , indicato con $\text{diam}(S)$, è definito come $\text{diam}(S) := \sup_{x, y \in S} d(x, y)$ mentre la **distanza di un punto** $x \in X$ **dall'insieme** S , indicato con $d(x, S)$, è definito come $d(x, S) := \inf_{s \in S} d(x, s)$.

Lemma C.0.1. (*esistenza del numero di Lebesgue*) Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X . Allora esiste un numero δ , detto **numero di Lebesgue del ricoprimento** \mathcal{U} , tale che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ con $\text{diam}(S) < \delta$ esiste $k \in J$ tale che $S \subseteq U_k$.

Dimostrazione. Poichè X è compatto possiamo supporre che J sia un insieme finito. Definiamo una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$f(x) = \max_{j \in J} \{f_j(x)\}, \quad (\text{C.1})$$

dove, dato $j \in J$, $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f_j(x) = d(x, X \setminus U_j)$. Si verifica facilmente che la funzione f è continua (cfr. Esercizio C.2). Inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Infatti per definizione $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$. Se per assurdo $f(x)$ fosse uguale a zero per qualche $x \in X$ allora $d(x, X \setminus U_j) = 0$ per ogni $j \in J$ e quindi, essendo $X \setminus U_j$ chiuso, $x \in X \setminus U_j$ per ogni $j \in J$ (cfr. [Loi13, Lemma 5.2.9]). Quindi $x \in \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j = X \setminus X = \emptyset$, la quale fornisce la contraddizione desiderata.

Essendo X è compatto esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > \delta$, per ogni $x \in X$. Vogliamo dimostrare che δ è un numero di Lebesgue del ricoprimento \mathcal{U} . Sia dunque $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$, tale che $\text{diam}(S) < \delta$ e sia $x_0 \in S$. Allora $f(x_0) > \delta$ e quindi esiste $k \in J$ tale che $f_k(x_0) = d(x_0, X \setminus U_k) > \delta$ e quindi $x_0 \in U_k$.

Resta da dimostrare che ogni $y \in S$ appartiene a U_k o, equivalentemente che $d(y, X \setminus U_k) > 0$. Questo segue da:

$$d(y, X \setminus U_k) \geq d(x_0, X \setminus U_k) - d(x_0, y) > \delta - \delta = 0,$$

dove si è usato l'Esercizio C.1 e il fatto che $d(x_0, y) \leq \text{diam}(S) < \delta$. □

C.1 Esercizi

Esercizio C.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e $S \subseteq X$ un sottoinsieme di X . Dimostrare che per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S)$.

Esercizio C.2. Dimostrare che la funzione f definita da (C.1) è continua.

Appendice D

Spazi metrici completi e la curva di Peano

Il lettore può consultare [Loi13, Paragrafo 10.4.2]) per le definizioni e le principali proprietà degli spazi metrici completi.

D.1 Spazi metrici completi

Ricordiamo qui di seguito alcuni fatti sugli spazi metrici completi. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione x_n di punti di X è detta di **Cauchy** se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Si dimostra facilmente che se x_n è una successione convergente ad un punto $x \in X$ allora x_n è di Cauchy.

Diremo che uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Non è difficile vedere che lo spazio euclideo \mathbb{R}^n è completo mentre l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} non è completo (si consideri, per esempio, la successione $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ di numeri razionali che è di Cauchy ma converge al numero di Nepero $e \notin \mathbb{Q}$).

Lemma D.1.1. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo è completo.*

Dimostrazione. Sia (C, d) un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo (X, d) e sia x_n una successione di Cauchy di punti di C . Allora x_n è di Cauchy anche in (X, d) e quindi è convergente ad un punto $x \in X$. Essendo C chiuso (e quindi chiuso per successioni) il punto x appartiene a C . \square

Siano (X, d) e (Y, \hat{d}) due spazi metrici. Diremo che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **limitata** se $f(X)$ è un sottoinsieme limitato di (Y, \hat{d}) . Denotiamo con $(L(X, Y), \rho)$ lo spazio delle funzioni limitate da X a Y dotato della metrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \hat{d}(f(x), g(x)), \quad f, g \in L(X, Y), \quad (\text{D.1})$$

e con $C_L(X, Y) \subseteq L(X, Y)$ lo spazio metrico delle funzioni continue e limitate da X a Y , dotato della metrica indotta da ρ (che indichiamo ancora con ρ).

Teorema D.1.2. *Siano (X, d) e (Y, \hat{d}) due spazi metrici. Supponiamo che (Y, \hat{d}) sia completo. Allora $(L(X, Y), \rho)$ e $(C_L(X, Y), \rho)$ sono spazi metrici completi.*

Dimostrazione. Sia f_n una successione di Cauchy in $L(X, Y)$. Per ogni $x \in X$ la successione $f_n(x)$ di (Y, \hat{d}) è di Cauchy (questo segue dalla disuguaglianza $\hat{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$). Essendo (Y, \hat{d}) completo, per ipotesi, $f_n(x)$ converge ad un punto $f(x)$ di Y . Abbiamo così definito una funzione $f : X \rightarrow Y$ come $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Per mostrare che $(L(X, Y), \rho)$ è completo dobbiamo far vedere che f_n converge a f in $(L(X, Y), \rho)$ e che f è limitata. Essendo f_n di Cauchy, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$. Questo implica che $\hat{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon$, per ogni $x \in X$. Facendo tendere $m \rightarrow +\infty$ si ottiene che $\hat{d}(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ e quindi $\rho(f_n, f) \leq \epsilon$, per ogni $n \geq n_0$. Segue che la successione di funzioni f_n converge alla funzione f nella metrica ρ . Inoltre, dalla disuguaglianza

$$\text{diam}(g(X)) \leq \text{diam}(f(X)) + 2\rho(g, f), \quad (\text{D.2})$$

valida per ogni coppia di funzioni $f, g : X \rightarrow Y$ (cfr. Esercizio D.1), si deduce che, per ogni n ,

$$\text{diam}(f(X)) \leq \text{diam}(f_n(X)) + 2\rho(f_n, f),$$

la quale implica, insieme al fatto che f_n converge alla funzione f nella metrica ρ , che f è limitata.

Per dimostrare che $(C_L(X, Y), \rho)$ è uno spazio metrico completo è sufficiente, per il Lemma D.1.1, far vedere che $(C_L(X, Y), \rho)$ è un sottoinsieme chiuso di $(L(X, Y), \rho)$, ossia che se f_n è una successione di funzioni in $(L(X, Y), \rho)$ convergente ad una funzione $f : X \rightarrow Y$ (nella metrica ρ) allora f è continua e limitata. Abbiamo già mostrato che f è limitata quindi resta da dimostrare che f è continua. Sia $x_0 \in X$. Osserviamo che, dalla disuguaglianza triangolare, si ottiene:

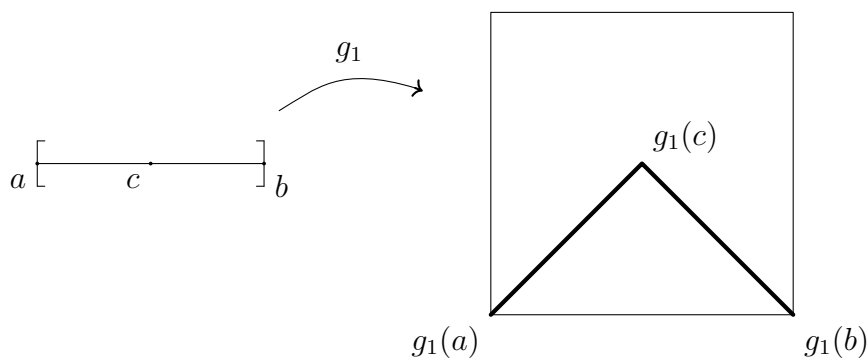
$$\hat{d}(f(x), f(x_0)) \leq \hat{d}(f_n(x), f(x)) + \hat{d}(f_n(x), f_n(x_0)) + \hat{d}(f_n(x_0), f(x_0)),$$

per ogni n . Dato $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\rho(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Fissiamo $n = n_0$. Allora $\hat{d}(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ e $\hat{d}(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$. Inoltre, essendo f_{n_0} continua esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ si ha $\hat{d}(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$. Mettendo insieme le cose abbiamo dimostrato che dato $x_0 \in X$ e dato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $\hat{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ e quindi f è continua in x_0 ; questo conclude la dimostrazione del teorema. \square

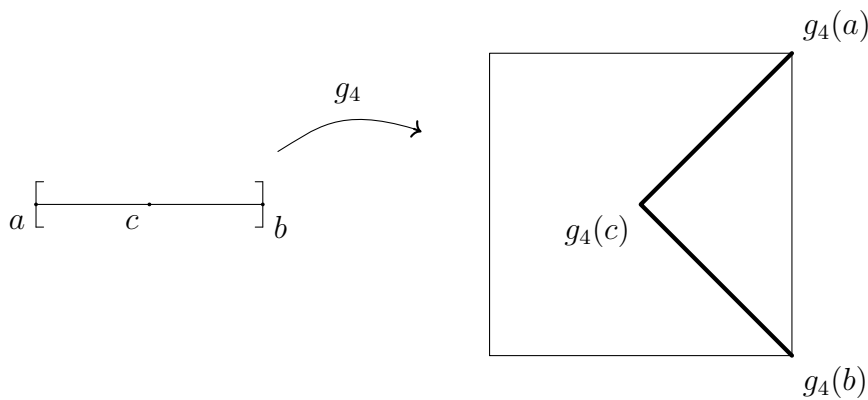
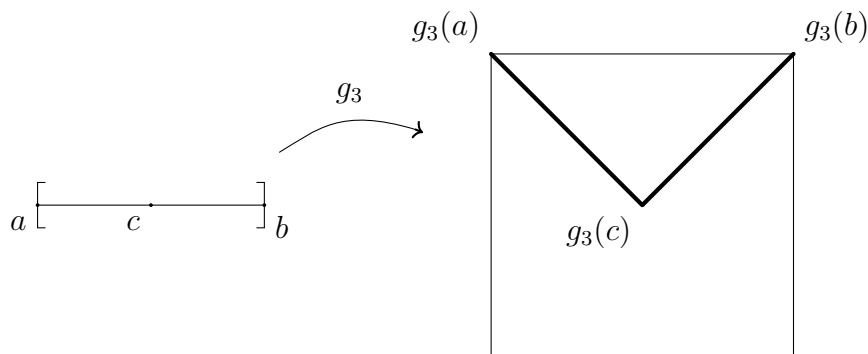
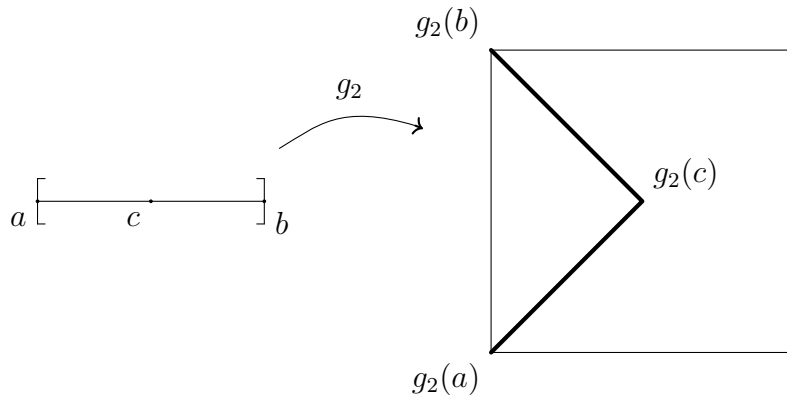
D.2 La curva di Peano

Vogliamo dimostrare l'esistenza di una **curva di Peano** cioè di un'applicazione continua e suriettiva $p : I \rightarrow I^2$, $I = [0, 1]$.

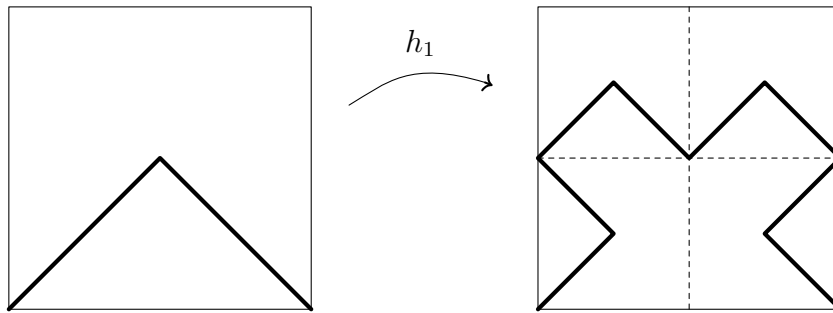
La curva di Peano verrà costruita come limite di una successione di curve continue. Per costruire una tale successione partiamo dalla curva continua $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$) il cui grafico è costituito dai due segmenti che uniscono $g_1(a)$ e $g_1(c)$ e $g_1(c)$ con $g_1(b)$ come in figura. La curva è contenuta nel quadrato che ha come lato il segmento che unisce $g_1(a)$ con $g_1(b)$ dell'asse delle x e il punto $g_1(c)$ è il centro di questo quadrato.



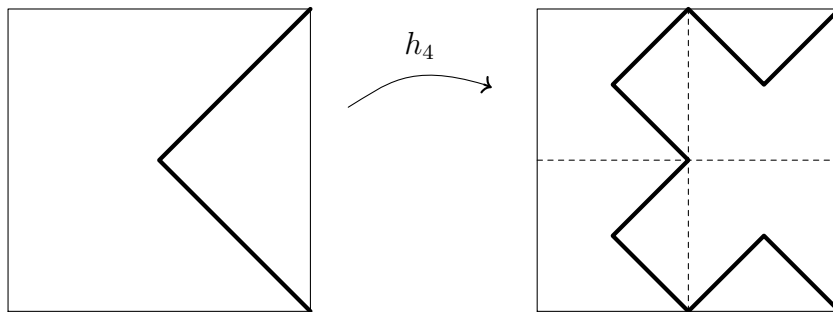
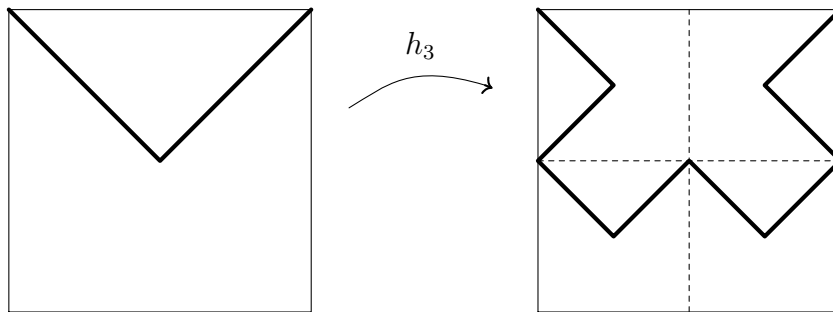
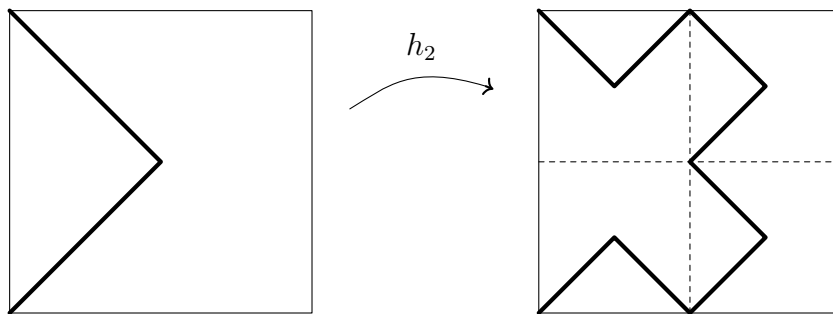
In modo analogo possiamo considerare le curve continue $g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g_4 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ i cui grafici illustrati nelle tre figure seguenti.



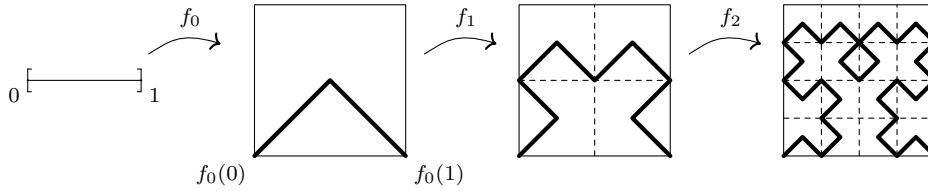
Consideriamo poi la curva $h_1 : g_1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ che trasforma l'immagine di g_1 nella spezzata costituita da 8 segmenti tutti della stessa lunghezza come in figura. Osserviamo che la curva inizia sempre in $g_1(a)$ e finisce in $g_1(b)$.



In modo analogo possiamo considerare le tre curve continue $h_i : g_i([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 2, 3, 4$, che trasformano l'immagine di g_i nella spezzata costituita da 8 segmenti tutti della stessa lunghezza illustrati nelle tre figure seguenti.



Consideriamo infine la successione di applicazioni continue $f_n : I \rightarrow I^2$ costruita usando le applicazioni precedenti e illustrata nella figura seguente:



Vogliamo mostrare che f_n converge ad una funzione continua e suriettiva $p : I \rightarrow I^2$ (la curva di Peano), rispetto alla metrica ρ su $C(I, I^2)$ (lo spazio delle funzioni continue da I e I^2) data da:

$$\rho(g, h) = \sup_{t \in I} d(g(t), h(t)), \quad g, h \in C(I, I^2),$$

dove d è la distanza su \mathbb{R}^2 definita da:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Dal Teorema D.1.2 segue che $(C(I, I^2), \rho)$ è completo (cfr. Esercizio D.2) quindi per mostrare che f_n è convergente è sufficiente mostrare che è di Cauchy. Per fare ciò osserviamo che ogni triangolo del quale è costituito $f_n(I)$ è contenuto in un quadrato di diametro $\frac{1}{2^n}$. Quando si passa da f_n a f_{n+1} stiamo rimpiazzando ognuno di questi triangoli con 4 triangoli che stanno nello stesso quadrato. Quindi la distanza tra $f_n(t)$ e $f_{n+1}(t)$ è al più $\frac{1}{2^n}$, cioè $d(f_n(t), f_{n+1}(t)) \leq \frac{1}{2^n}$, per ogni $t \in I$. Segue che $\rho(f, g) \leq \frac{1}{2^n}$.

Quindi per ogni m, n si ha:

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f_{n+m}) &\leq \rho(f_n, f_{n+1}) + \rho(f_{n+1}, f_{n+2}) + \cdots + \rho(f_{n+m-1}, f_{n+m}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

dalla quale segue che f_n è una successione di Cauchy e in $(C(I, I^2), \rho)$ e quindi converge ad una funzione continua $p : I \rightarrow I^2$ rispetto alla metrica ρ . Per concludere resta da dimostrare la seguente:

Proposizione D.2.1. *L'applicazione p è suriettiva.*

Dimostrazione. Sia x un punto arbitrario di I^2 . Mostriamo che per ogni $\epsilon > 0$ il disco aperto $D_\epsilon(x)$ di centro x e raggio ϵ in \mathbb{R}^2 (rispetto alla metrica d) interseca $p(I)$. Da questo seguirà che $x \in \overline{p(I)}$ e siccome $p(I) \subset I^2$ è chiuso (compatto in uno spazio di Hausdorff) si ha che $x \in \overline{p(I)} = p(I)$ e quindi p è suriettiva. Per dimostrare che $D_\epsilon(x) \cap p(I) \neq \emptyset$ sia n_0 un numero naturale tale che $\rho(f_{n_0}, p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2}$ (tale n_0 esiste in quanto f_n converge a p). Segue che $d(f_{n_0}(t), p(t)) < \frac{\epsilon}{2}$

per ogni $t \in I$. Scegliamo $t_0 \in I$ tale che $d(f_{n_0}(t_0), x) < \frac{1}{2^{n_0}}$; un tale t_0 esiste in quanto $f_{n_0}(I)$ è contenuto in ogni quadrato di lato $\frac{1}{2^{n_0}}$ nel quale è suddiviso I^2 (al passo n_0 ci sono 4^{n_0} di questi quadrati). Allora

$$d(x, p(t_0)) \leq d(x, f_{n_0}(t_0)) + d(f_{n_0}(t_0), p(t_0)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

che implica $p(t_0) \in D_\epsilon(x)$ e quindi $D_\epsilon(x) \cap p(I) \neq \emptyset$. □

D.3 Esercizi

Esercizio D.1. Dimostrare la disuguaglianza (D.2).

Esercizio D.2. Dimostrare la completezza di $(C(I, I^2), \rho)$.

Appendice E

Azioni di gruppi su insiemi

Sia X un insieme non vuoto e G un gruppo. Diremo che G **agisce a sinistra** su X ovvero che X è un **G -insieme sinistro** se esiste una funzione

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tale che:

- $1 \cdot x = x$, $\forall x \in X$, dove 1 è l'elemento neutro di G ;
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, $\forall x \in X$, $\forall g, h \in G$ (gh è la moltiplicazione in G).

Analogamente che G **agisce a destra** su X ovvero X è un **G -insieme destro** se esiste una funzione

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$

tale che:

- $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in X$;
- $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$, $\forall x \in X$, $\forall g, h \in G$.

Osservazione E.0.1. Se G agisce a destra su un insieme X allora si verifica facilmente che

$$g \cdot x := x \cdot g^{-1}$$

definisce un'azione sinistra di G su X .

Esempio E.0.2. Sia H un sottogruppo di un gruppo G allora

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto h \cdot g := hg \end{aligned}$$

definisce un'azione sinistra di H su G .

Esempio E.0.3. Sia G un gruppo e $\mathcal{P}(G)$ il suo insieme delle parti. Allora

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P}(G) &\longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ (g, U) &\longmapsto g \cdot U := gU = \{gu \mid u \in U\} \end{aligned}$$

definisce un'azione sinistra di G su $\mathcal{P}(G)$.

Esempio E.0.4. Sia X uno spazio topologico e $\text{Omeo}(X)$ l'insieme degli omeomorfismi di X dotato del prodotto $gh = g \circ h$, $g, h \in \text{Omeo}(X)$. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \text{Omeo}(X) \times X &\longrightarrow \text{Omeo}(X) \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x := g(x) \end{aligned}$$

definisce un'azione sinistra di $\text{Omeo}(X)$ su X .

Sia G un gruppo che agisce a sinistra su un insieme non vuoto X . Possiamo definire una relazione d'equivalenza su X ponendo $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$. L'insieme delle classi di equivalenza verrà indicato con X/G e la proiezione sul quoziente $\pi : X \rightarrow X/G$. Fissato $x \in X$, il sottoinsieme di X definito da

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

è chiamata l'**orbita di x** . Chiaramente $x \sim y$ se e solo se $y \in G \cdot x$. Lo **stabilizzatore** o **gruppo di isotropia** G_x è il sottogruppo di G definito da

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Le classi laterali sinistre di G_x in G verranno denotate con G/G_x . Osserviamo che dato un G -insieme sinistro X e $x \in X$, l'orbita $G \cdot x$ e le classi laterali sinistre G/G_x sono G -insiemi sinistri in modo naturale. Siano X e Y due G -insiemi sinistri. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta **G -equivariante** se

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \quad \forall x \in X, \forall g \in G.$$

Proposizione E.0.5. *Sia X un G -insieme sinistro, e $x \in X$. Allora esiste una bigezione equivariante tra $G \cdot x$ e G/G_x .*

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned}\Phi : G \cdot x &\longrightarrow G/G_x \\ y = g \cdot x &\longmapsto [g]\end{aligned}$$

dove $[g]$ denota la classe laterale sinistra di g in G/G_x . Si verifica facilmente che Φ è ben definita, equivariante e invertibile (con inversa $\Psi([g]) = g \cdot x$). \square

Ricordiamo infine che un gruppo G agisce **liberamente** (a sinistra o a destra) su un insieme non vuoto X (e l'azione verrà detta **libera**) se per ogni $g \neq 1$ e per ogni $x \in X$, $g \cdot x \neq x$. Mentre G agisce **transitivamente** (a sinistra o a destra) su un insieme X (e l'azione verrà detta **transitiva**) se per ogni $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.

Quindi se G agisce liberamente e transitivamente (a sinistra) su un insieme X allora per ogni $x, y \in X$ esiste un unico g tale che $g \cdot x = y$.

Bibliografia

- [Fra67] John B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967.
- [GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, MA, 1981. A first course.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Kos88] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli Editore S.p.A., Bologna, 1988. Translated from the English by Marilena Pittaluga.
- [Loi13] Andrea Loi. *Introduzione alla topologia generale*. Aracne, 2013.
- [Man15] Marco Manetti. *Topology*, volume 91 of *Unitext*. Springer, Cham, italian edition, 2015. La Matematica per il 3+2.
- [Mas91] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Mil78] John Milnor. Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed-point theorem. *Amer. Math. Monthly*, 85(7):521–524, 1978.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Moi77] Edwin E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, volume Vol. 47 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

- [Mun75] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [Rol76] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume No. 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Berkeley, CA, 1976.