Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2025-2026

Prova scritta in aula del 20.03.2026

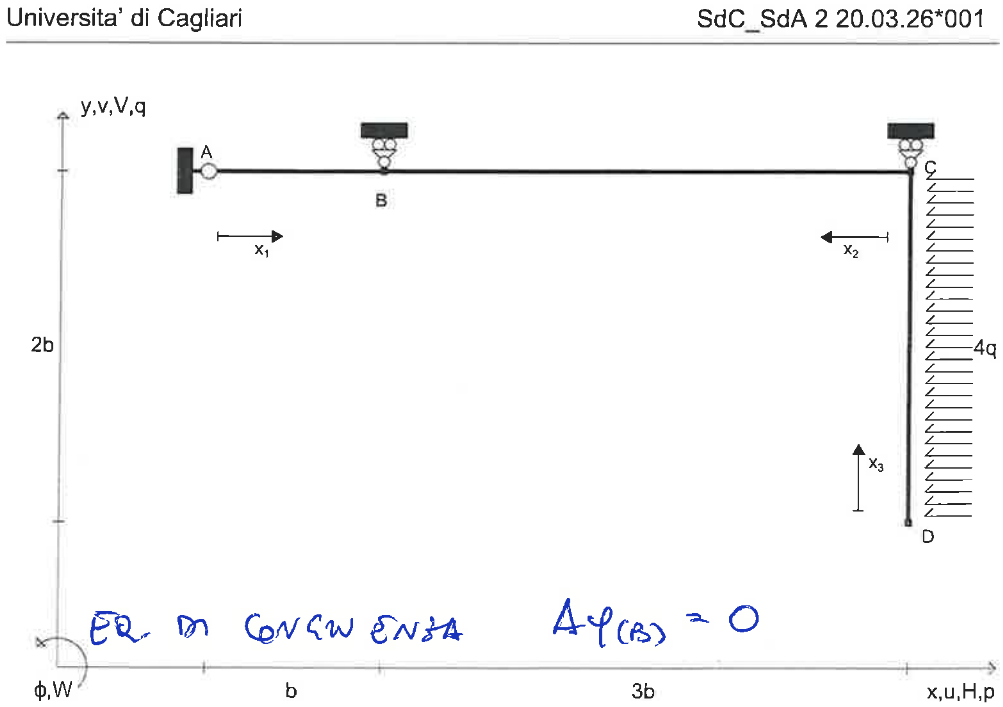
Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui <u>*soli*</u> *fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:...................................... e-mail:........................ Matricola:.......

Esercizio n. 1 (17 punti)

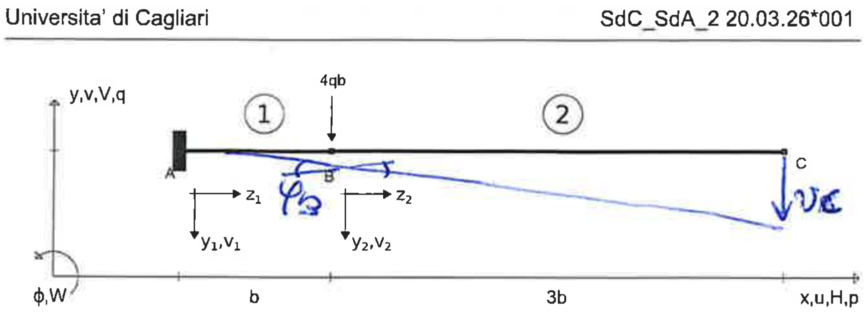
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B.
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, φ_A.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.



Esercizio n. 2 (7 punti)

Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.
Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto C, v_C;
4. La rotazione del punto B, φ_B.



↑[+]↓

↺[+]↻

H_A (⇨) = 0; V_A (⇧) = 4pb; M_A (↺) = $4pb^2$;

N_{AB} = //; T_{AB} = 4pb; M_{AB} = $-4pb^2 + 4qb\,z_1$;

N_{BC} = //; T_{BC} = //; M_{BC} = //;

c.c in A = $v_1(z_1=0)=0$; $v_1'(z_1=0)=0$; c.c in B = $v_1(z_1=b) = v_2(z_2=0)$; $v_1'(z_1=b) = v_2'(z_2=0)$

c.c in C = //;

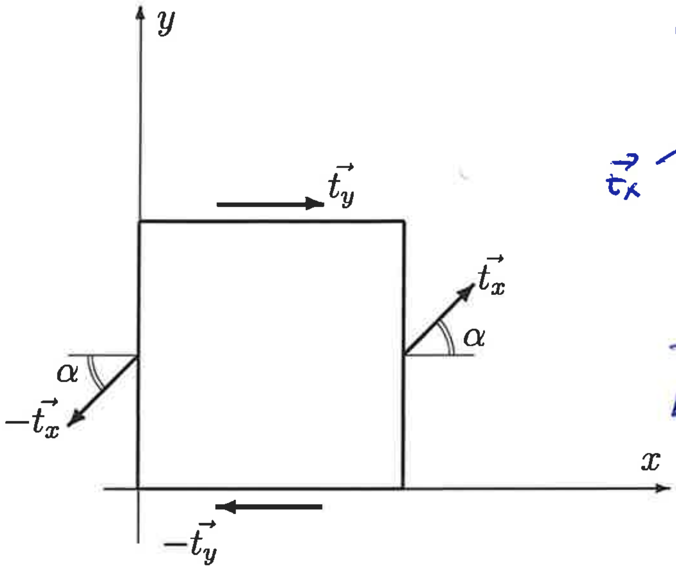
$v_1(z_1)$ = $\frac{1}{EJ}\left(2pb^2 z_1 - \frac{2}{3}pb\,z_1^3\right)$; $v_1'(z_1)$ = $\frac{1}{EJ}\left(4pb\,z_1 - 2pb\,z_1^2\right)$;

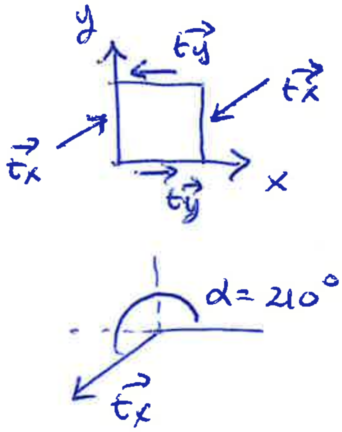
$v_2(z_2)$ = $\frac{1}{EJ}\left(\frac{4}{3}pb^4 + 2pb^3 z_2\right)$; $v_2'(z_2)$ = $\frac{1}{EJ}\left(2pb^3\right)$;

v_C = $22pb^4/3EJ$ (↓); φ_B = $2pb^3/EJ$ (↻);

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente; di questi $\boldsymbol{t}_x$ è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 210°$ (sicché: $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;) e ha modulo di valore $|\boldsymbol{t}_x| = 30$ MPa. L'altro vettore sforzo, $\boldsymbol{t}_y$, è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_I e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_I.

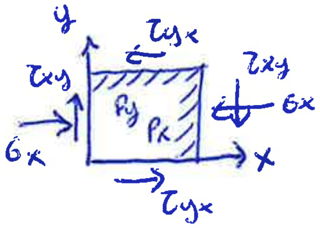




σ_x = -25,980 (MPa); σ_y = 0,000 (MPa); τ_{xy} = -15,000 (MPa);

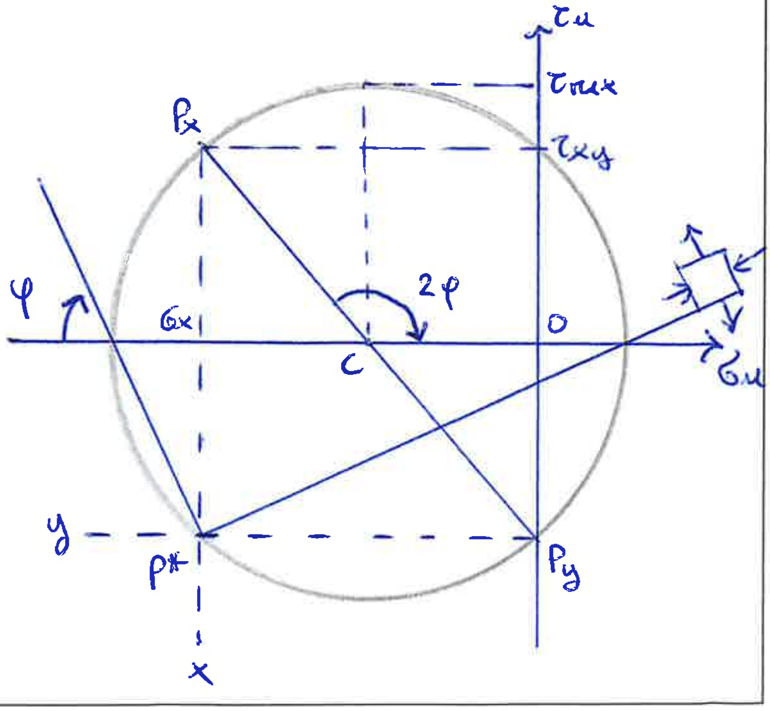
σ_I = 6,852 (MPa); σ_2 = -32,833 (MPa); τ_{max} = 19,843 (MPa);

cerchio di Mohr:

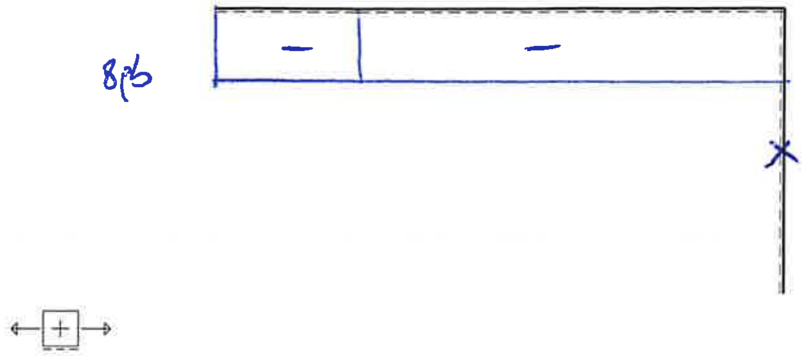


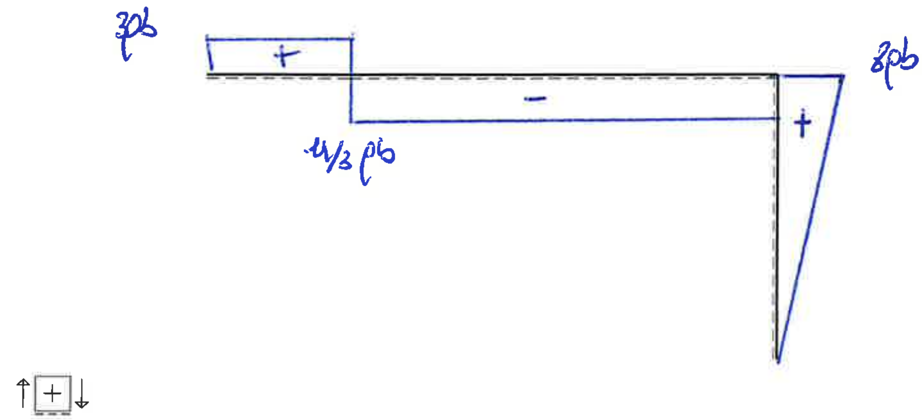
Px = (-25,980; 15,000)

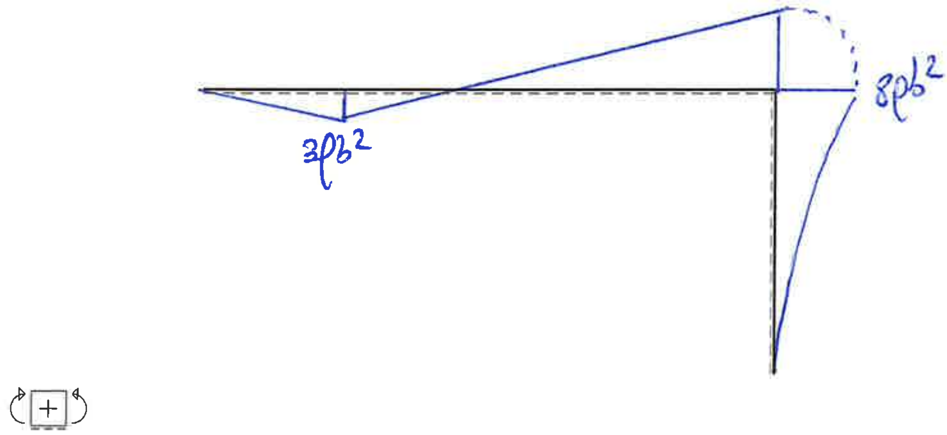
Py = (0,000; -15,000)



φ = -65,44 (°);







$H_A (\Rightarrow) =$ $8pb$; $V_A (\Uparrow) =$ $3pb$; $V_B (\Uparrow) =$ $-20/3\,pb$; $V_C (\Uparrow) =$ $11/3\,pb$; $M_B (\circlearrowright \square \circlearrowleft) =$ $3pb^2$;

$N_{AB} =$ $-8pb$; $T_{AB} =$ $3pb$; $M_{AB} =$ $3pb\,x_1$;

$N_{CB} =$ $-8pb$; $T_{CB} =$ $-11/3\,pb$; $M_{CB} =$ $-8pb^2 + 11/3\,pb\,x_2$;

$N_{DC} =$ // ; $T_{DC} =$ $4p\,x_3$; $M_{DC} =$ $-2p\,x_3^2$;

$\varphi_A =$ $-qb^3/2EJ$ (2) ;

Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2025-2026

Prova scritta in aula del 20.03.2026

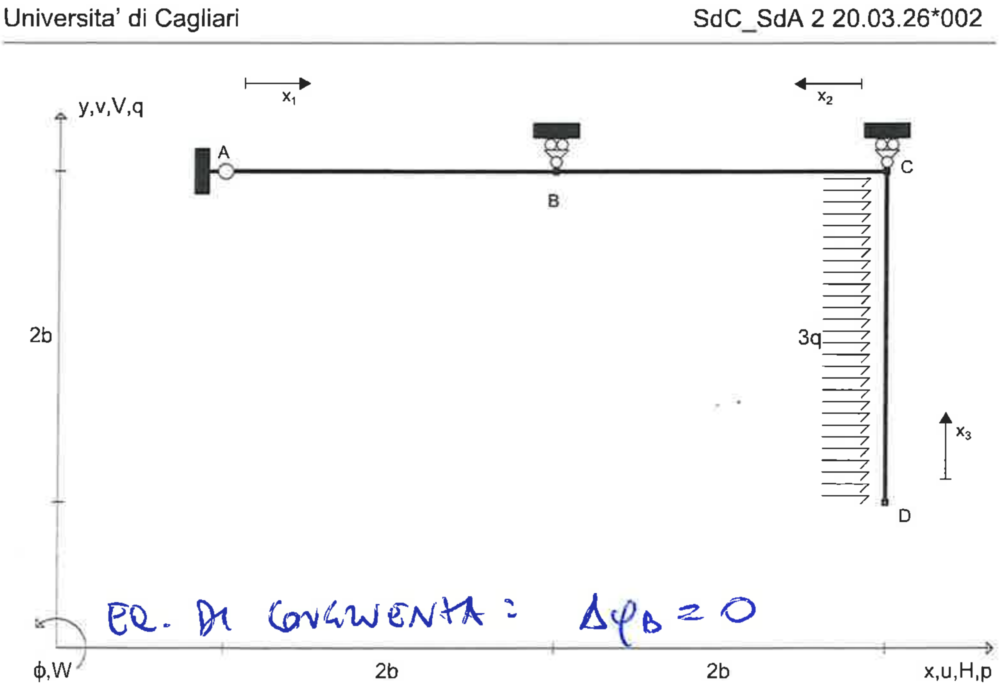
Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.................................... e-mail:........................ Matricola:.......

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B.
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, φ_A.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

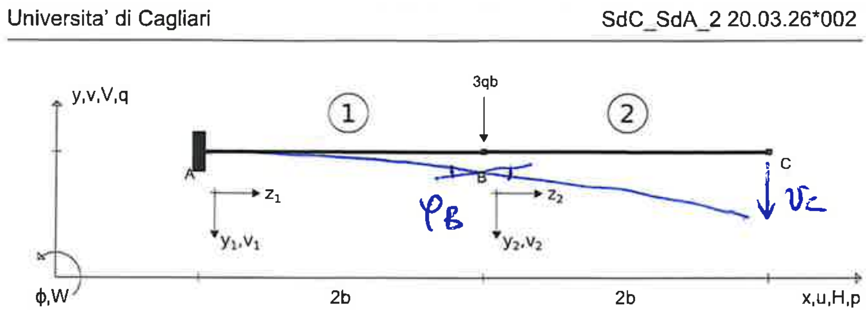


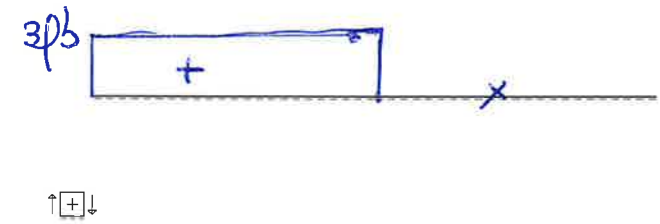
EQ. DI CONGRUENZA: $\Delta\varphi_B = 0$

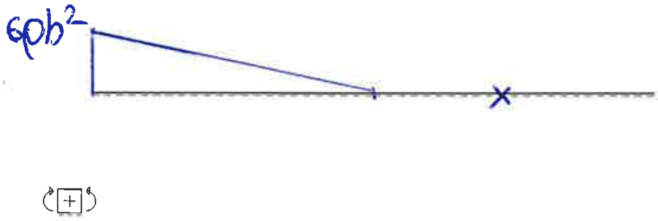
Esercizio n. 2 (7 punti)

Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.
Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto C, v_C;
4. La rotazione del punto B, φ_B.







H_A (⇨) = 0; V_A (⇧) = $3pb$; M_A = $6pb^2$;

N_{AB} = //; T_{AB} = $3pb$; M_{AB} = $-6pb^2 + 3pb\,z_1$;

N_{BC} = //; T_{BC} = //; M_{BC} = //;

c.c in A = $v_1(z_1=0)=0;\ v_1'(z_1=0)=0$; c.c in B = $v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0);\ v_1'(z_1=2b)=v_2'(z_2=0)$

c.c in C = //;

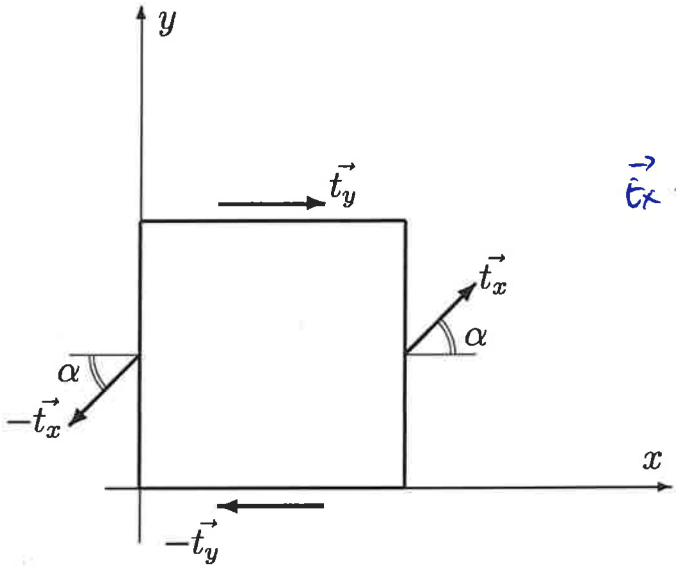
$v_1(z_1)$ = $\frac{1}{EJ}\left(3pb^2 z_1^2 - \frac{1}{2} qb\, z_1^3\right)$; $v_1'(z_1)$ = $\frac{1}{EJ}\left(6pb^2 z_1 - \frac{3}{2} pb\, z_1^2\right)$;

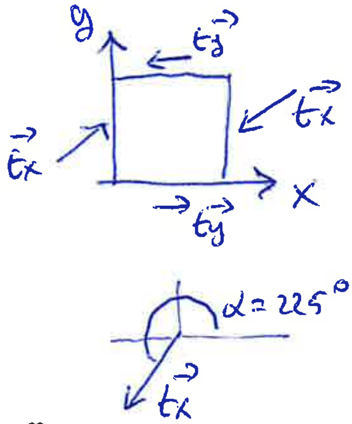
$v_2(z_2)$ = $\frac{1}{EJ}\left(8pb^4 + 6pb^3 z_2\right)$; $v_2'(z_2)$ = $\frac{1}{EJ}\left(6pb^3\right)$;

v_C = $20pb^4/EJ$ (↓); φ_B = $6pb^3/EJ$ (↺);

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente; di questi $\boldsymbol{t}_x$ è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 225°$ (sicché: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;) e ha modulo di valore $|\boldsymbol{t}_x| = 30$ MPa. L'altro vettore sforzo, $\boldsymbol{t}_y$, è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.

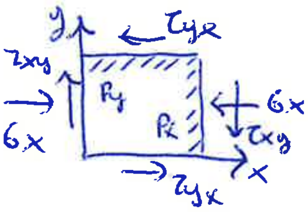




σ_x = -21,213 (MPa); σ_y = 0,000 (MPa); τ_{xy} = -21,213 (MPa);

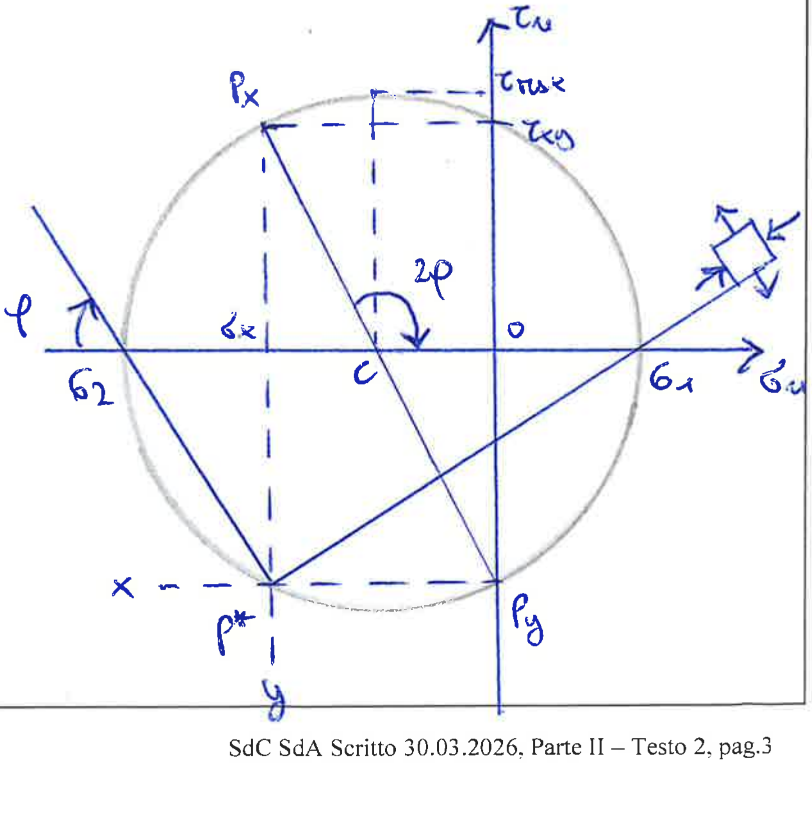
σ_1 = 13,110 (MPa); σ_2 = -34,323 (MPa); τ_{max} = 23,717 (MPa);

cerchio di Mohr:

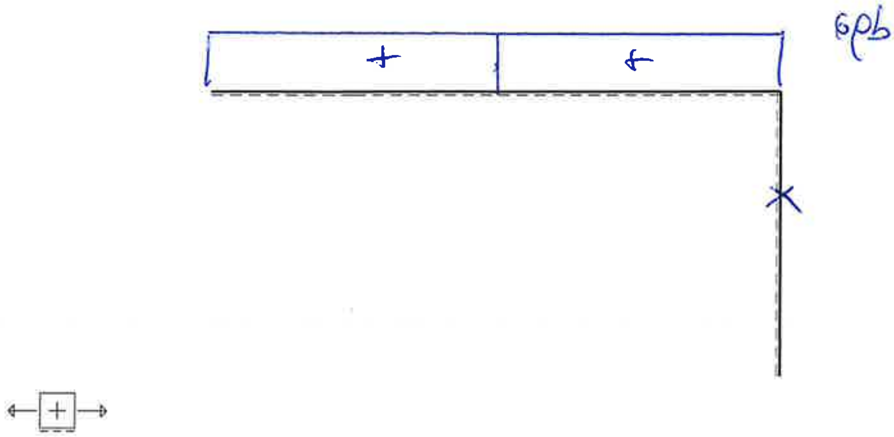


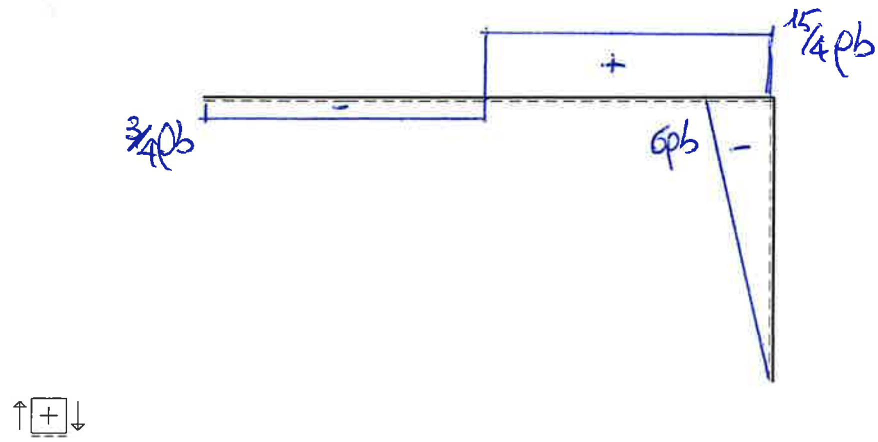
$P_x = (-21,213; 21,213)$

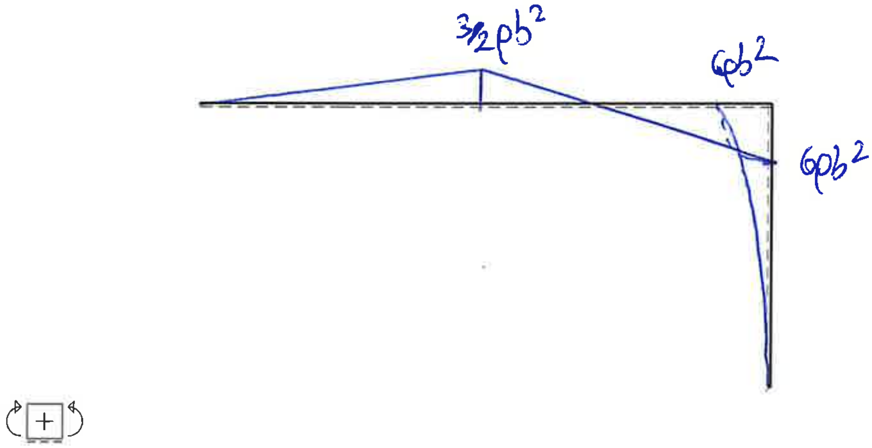
$P_y = (0,000; -21,213)$



φ = -58,28 (°);







H_A (⇨) = $-6pb$; V_A (⇧) = $-3/4\ pb$; V_B (⇧) = $3/2\ pb$; V_C (⇧) = $-15/4\ pb$; M_B (↻□↺) = $-3/2\ pb^2$;

N_{AB} = $6pb$; T_{AB} = $-3/4\ pb$; M_{AB} = $-3/4\ pb\,x_1$;

N_{CB} = $6pb$; T_{CB} = $15/4\ pb$; M_{CB} = $6pb^2 - 15/4\ pb\,x_2$;

N_{DC} = / ; T_{DC} = $-3p\,x_3$; M_{DC} = $3/2\ p\,x_3^2$;

φ_A = $9b^3/2EI$ (5);

Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2025-2026

Prova scritta in aula del 20.03.2026
Parte II - Testo 3

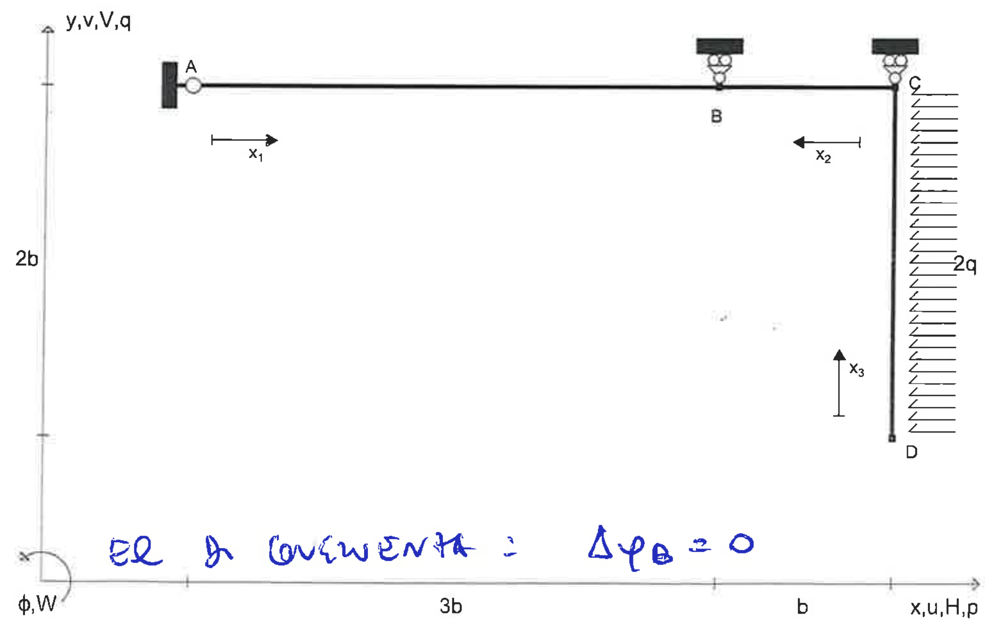
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:..................................e-mail:...................... Matricola:.......

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B.
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, φ_A.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 2 20.03.26*003

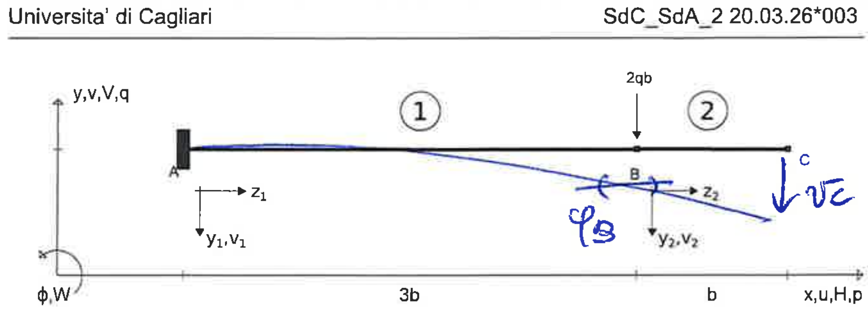


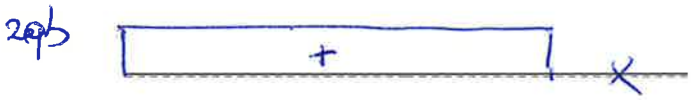
EQ di CONGRUENZA : $\Delta\varphi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

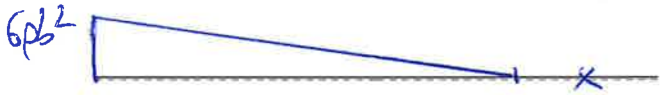
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.
Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto C, v_C;
4. La rotazione del punto B, φ_B.





↑[+]↓



H_A (⇨) = 0; V_A (⇧) = $2qb$; M_A (↻) = $6qb^2$;

N_{AB} = //; T_{AB} = $2qb$; M_{AB} = $-6qb^2 + 2qb\,z_1$;

N_{BC} = //; T_{BC} = //; M_{BC} = //;

c.c in A = $v_1(z_1=0)=0;\ v_1'(z_1=0)=0$; c.c in B = $v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0);\ v_1'(z_1=3b)=v_2'(z_2=0)$;

c.c in C = //;

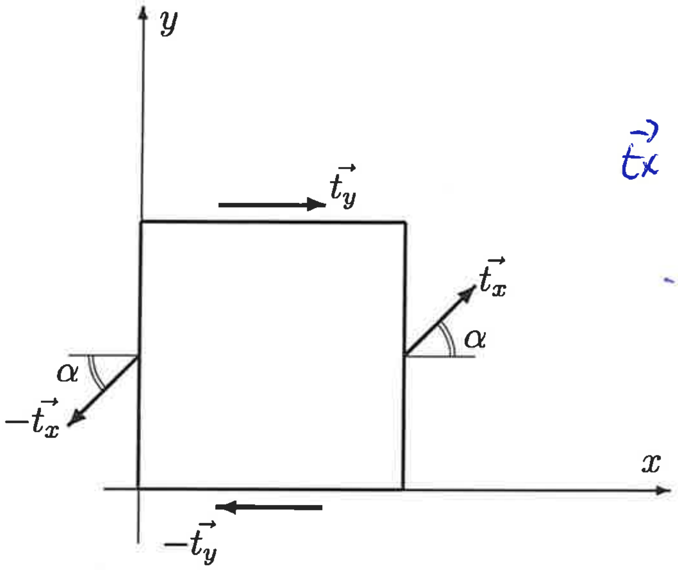
$v_1(z_1) = \frac{1}{EJ}\left(3qb^2 z_1^2 - \frac{1}{3} qb\, z_1^3\right)$; $v_1'(z_1) = \frac{1}{EJ}\left(6qb^2 z_1 - qb\, z_1^2\right)$;

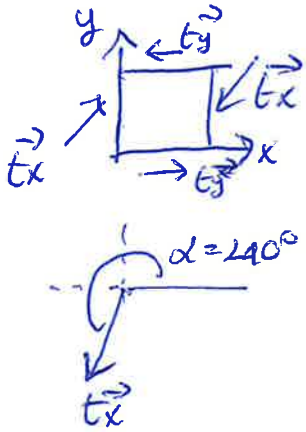
$v_2(z_2) = \frac{1}{EJ}\left(18qb^4 + 9qb^3 z_2\right)$; $v_2'(z_2) = \frac{1}{EJ}\left(9qb^3\right)$;

$v_C = 27qb^4/EJ$ (↓); $\varphi_B = 9qb^3/EJ$ (↻);

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente; di questi $\boldsymbol{t}_x$ è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 240°$ (sicché: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$;) e ha modulo di valore $|\boldsymbol{t}_x| = 30$ MPa. L'altro vettore sforzo, $\boldsymbol{t}_y$, è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.

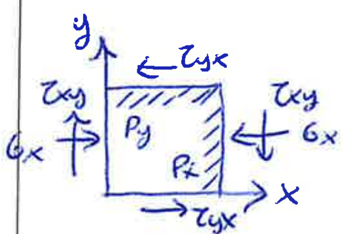




σ_x = -15,000 (MPa); σ_y = 0,000 (MPa); τ_{xy} = -25,880 (MPa);

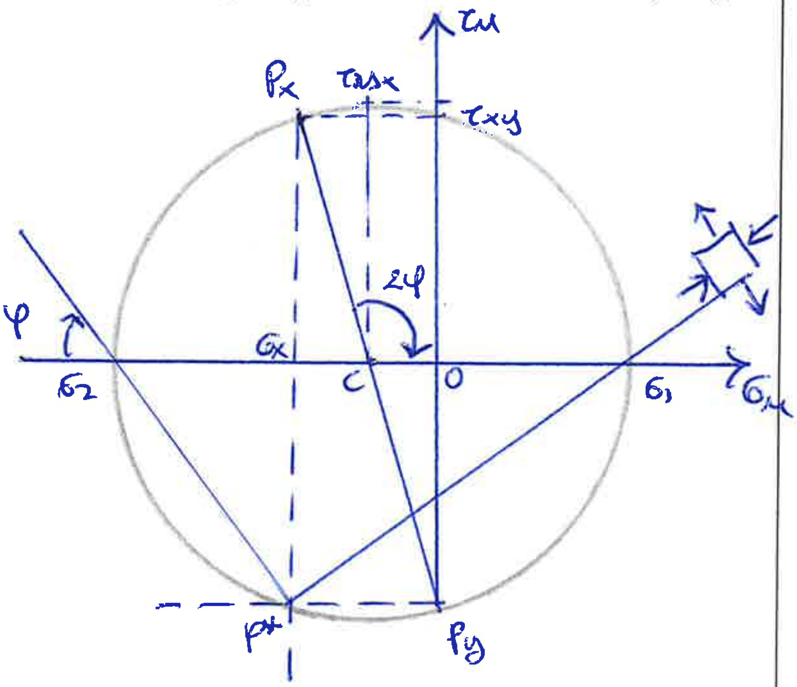
σ_1 = 18,541 (MPa); σ_2 = -34,541 (MPa); τ_{max} = 27,041 (MPa);

cerchio di Mohr:

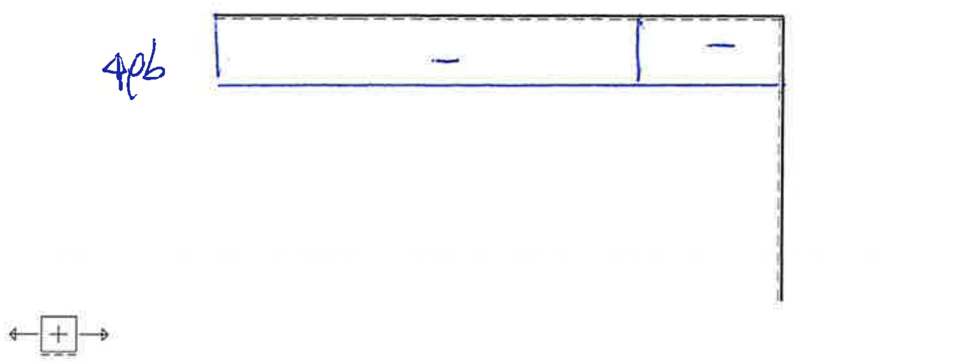


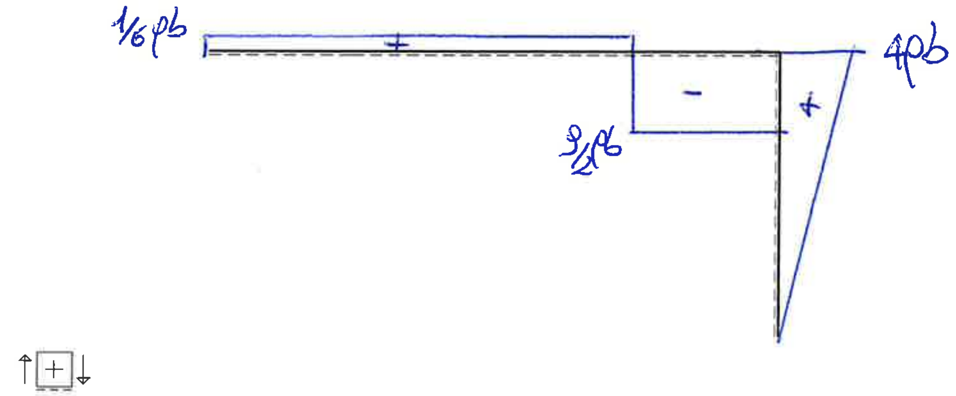
$P_x = (-15{,}000; 25{,}880)$

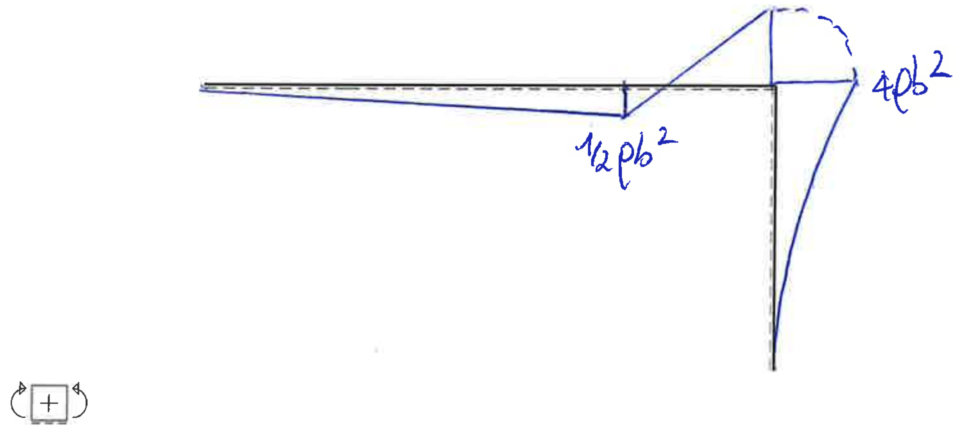
$P_y = (0{,}000; -25{,}880)$



φ = -53,05 (°);







H_A (⇨) = 4pb; V_A (⇧) = 1/6 pb; V_B (⇧) = −14/3 pb; V_C (⇧) = 9/2 pb; M_B (↻□↺) = 1/2 pb²;

N_{AB} = −4pb ; T_{AB} = 1/6 pb ; M_{AB} = 1/6 pb x_1;

N_{CB} = −4pb ; T_{CB} = −9/2 pb ; M_{CB} = −4pb² + 9/2 pb x_2;

N_{DC} = // ; T_{DC} = 2px_3 ; M_{DC} = −p x_3^2;

φ_A = − pb³/4EJ (↻);