MA 24 MAR 2026

BUONA POSITURA DEL PROBLEMA DI DIRICHLET

SOSTITUIAMO y_2 CON ty_2: IL DETERMINANTE DIVENTA

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & t\,y_2(a) \\ y_1(b) & t\,y_2(b) \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

E LA CONDIZIONE DI ANNULLAMENTO / NON ANNULLAMENTO (BUONA POSITURA) NON CAMBIA.

SOSTITUIAMO, ALLORA, y_2 CON UNA $y_3 =$

$= \alpha y_1 + \beta y_2$ INDIPENDENTE DA y_1:

OVVIAMENTE, $y_1 = 1 \cdot y_1 + 0\, y_2$

QUINDI $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0.$

PER LA MULTILINEARITÀ DEL DETERMINANTE, SI TROVA

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_3(a) \\ y_1(b) & y_3(b) \end{vmatrix} = \alpha \cancel{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1(a) \\ y_1(b) & y_1(b) \end{vmatrix}} + \beta \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

DUNQUE LA BUONA POSITURA DIPENDE DA $a_0(x)$ E $a_1(x)$, DA $[a,b]$, MA NON DA y_1, y_2 (NÉ DA y_a, y_b).

STUDIAMO IL PROBLEMA MISTO

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda > 0, \quad \text{IN } [0,\ell] \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\,x$, DA CUI $y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x$

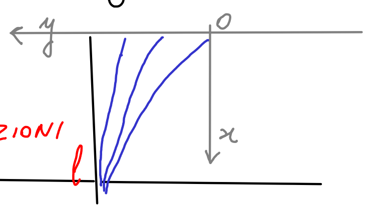
TROVIAMO A, B DAL SISTEMA

$$\begin{cases} A = 0 \\ -A\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\,\ell + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\ell = 0 \end{cases}$$

LA CUI MATRICE È

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\,\ell & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\ell \end{pmatrix}$$

CON DETERMINANTE $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\ell \neq 0$ PER $\lambda \in \left(0, \frac{\pi^2}{4\ell^2}\right)$: IN QUESTO CASO ESISTE SOLO LA SOLUZIONE NULLA. SE, PERÒ, PONIAMO $\lambda = \frac{\pi^2}{4\ell^2}$ ABBIAMO LE INFINITE SOLUZIONI $y(x) = B\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2\ell}x$, $B \in \mathbb{R}$, DETTE AUTOFUNZIONI



(*)

DELL'OPERATORE $Ly = y''$ CORRISPONDENTI ALL'AUTOVALORE $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4\ell^2}$ CON CONDIZIONI MISTE, OMOGENEE.

SONO SOLUZIONI $(\neq 0)$ DI $Ly = \lambda_1 y$.

(*) LA FIGURA SI RIFERISCE AL CLASSICO PROBLEMA DEL CARICO CRITICO DI EULERO. VEDERE, AD ESEMPIO, COLLATZ: DIFFERENTIAL EQUATIONS, PAG. 186.

ESISTE UNA SUCCESSIONE (DIVERGENTE) DI AUTOVALORI:

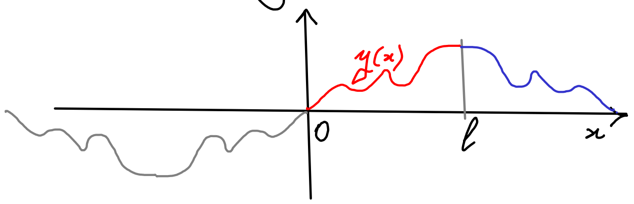
$$\lambda_n = \left(\frac{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}{\ell} \right)^2 \sim \frac{\pi^2}{\ell^2} n^2$$

CHE SODDISFANO $\sqrt{\lambda_n}\, \ell = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$

CON LE CORRISPONDENTI AUTOFUNZIONI

$$y_n(x) = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x.$$

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE QUALUNQUE $y \in C^2([0,\ell])$ SI PUÒ SVILUPPARE IN SERIE DI FOURIER RISPETTO ALLE y_n. SUGGERIMENTO:



1) PROLUNGARE $y(x)$ DALL'INTERVALLO $[0,\ell]$ ALL'INTERVALLO $[0,2\ell]$ PER RIFLESSIONE RISPETTO A ℓ $\left(y(x) = y(2\ell - x) \right)$;

2) PROLUNGARE ANCORA, DALL'INTERVALLO $[0,2\ell]$ ALL'INTERVALLO $[-2\ell, 2\ell]$ PER DISPARITÀ;

3) VERIFICARE CHE LA FUNZIONE COSÌ OTTENUTA È DI CLASSE $C^1([-2\ell, 2\ell])$;

4) INVOCARE IL TEOREMA DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER (NON È RESTRITTIVO SUPPORRE $\ell = \frac{\pi}{2}$) VERIFICANDO CHE I COEFFICIENTI b_{2h} SONO TUTTI NULLI.