Cagliari, 26/02/2026

Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)

MATRICOLA e CDL ____

NOME e COGNOME ____

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino l'ellisse di centro C (1; 1) e semiassi orizzontale *a* e verticale *b* di lunghezza pari a 4 e 3 rispettivamente, nonché la retta passante per i punti A (0; 5) e B (4; 1).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta.

2) Studio di funzione: Escursione termica (11 punti)

In una certa località, viene misurata la temperatura durante una giornata invernale. Le misurazioni partono nel momento in cui la temperatura supera i 0° C per interrompersi una volta che la temperatura scenda nuovamente sotto lo zero. La seguente funzione modellizza l'andamento della temperatura *T* (in gradi Celsius) in funzione del tempo (in ore):

$$T(t) = -kt\ln\left(\frac{t}{k}\right)$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Sapendo che il picco termico viene raggiunto dopo 2 ore, calcolare il valore di *k*. (3 punti)
b. Quanto vale la temperatura massima raggiunta? (1 punto)
c. Per quanto tempo viene misurata la temperatura? (1 punto)
d. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione *T(t)* e tracciarne il grafico preciso mediante uno studio per punti. (6 punti)

3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (7 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza la velocità di crescita di una popolazione batterica (in milioni di unità) rispetto al tempo (in ore):

$$v(t) = \frac{2t + 2}{t^2 + 5t + 6}$$

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo tempo ed in funzione del numero iniziale di batteri N_0. (5 punti)
b. Creare una tabella che mostri la variazione del numero di batteri presenti nel campione nelle prime 24 ore, con frequenza di campionamento (i.e. ogni quanto tempo si effettua ogni misurazione) non superiore alle 4 ore e per un numero iniziale di organismi pari a un milione. (1 punto)
c. Tracciare un grafico dei valori ottenuti al punto precedente. (1 punto)

4) Statistica: Confronto tra servizi (7 punti)

Tre diverse aziende introducono sul mercato altrettanti servizi simili.
Sia data la seguente tabella che lega il numero di prodotti venduti al costo di produzione totale del servizio:

AZIENDA	**A**	**B**	**C**
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra costo di produzione e il numero di servizi venduti. (3 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
c) Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il rapporto tra il costo di produzione e il numero di servizi venduti sia di 1.50 €. (2 punti)

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = 1 \quad y_C = 1 \qquad a = 4 \rightarrow a^2 = 16 \quad b = 3 \rightarrow b^2 = 9$$

$$x_A = 0 \quad y_A = 5 \qquad x_B = 4 \quad y_B = 1$$

SOLUZIONE

Equazione dell'ellisse:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \rightarrow 9x^2 + 16y^2 - 18x - 32y - 119 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow y = -x + 5$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 - 18x - 32y - 119 = 0 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$25x^2 - 146x + 121 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = 1 \\ x_{P2} = \dfrac{121}{25} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 5$, facendo attenzione a cambiare di segno x_P:

$$\begin{cases} y_{P1} = 4 \\ y_{P2} = \dfrac{4}{25} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(1;\ 4)\ ,\ \mathrm{P}_2\left(\frac{121}{25};\ \frac{4}{25}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$T(t) = -kt\ \ln\left(\frac{t}{k}\right) \qquad T_0 = T_f = 0\ °C \qquad t_M = 2\ hr$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$T'(t) = -k\left[\ln\left(\frac{t}{k}\right) + t \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t/k}\right] = -k\left[\ln\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{t}{k} \cdot \frac{k}{t}\right]$$

$$\boldsymbol{T'(t) = -k\left[\ln\left(\frac{t}{k}\right) + 1\right]}$$

$$T'(t_M) = 0 \ \rightarrow\ \ln\left(\frac{t_M}{k}\right) + 1 = 0 \ \rightarrow\ \frac{t_M}{k} = e^{-1} \ \rightarrow\ \frac{k}{t_M} = e \ \rightarrow\ k = e \cdot t_M$$

$$\boldsymbol{k = 2\,e\ \approx 5.44}$$

$$\boldsymbol{T(t) = -2e\ t\ \ln\left(\frac{t}{2e}\right) = 2e\ t\ \ln\left(\frac{2e}{t}\right)}$$

b)

$$T_M = T(t_M) = -4e \cdot \ln\left(\frac{2}{2e}\right) \ \rightarrow\ \boldsymbol{T_M = 4e \approx 10.87\ °C}$$

c)

$$T(t_f) = 0 \ \rightarrow\ \ln\left(\frac{t}{2e}\right) = 0 \ \rightarrow\ \frac{t}{2e} = 1 \ \rightarrow\ \boldsymbol{t_f = k = 2e \approx 5.44\ hr = 5\ hr\ \ 26\ min\ \ 12s}$$

d)

$$\boldsymbol{T(t) = -2e\ t\ \ln\left(\frac{t}{2e}\right)\ \ con\ \ 0 \le t \le 2e}$$

- Dominio:

$$D: \forall t \in R \qquad (0 \le t \le 2e)$$

- Intersezioni con gli assi:

$$t = 0 \ \rightarrow\ T = T_0 = 0 \ \rightarrow\ P_0(0; 0)$$

$$t = 2e \ \rightarrow\ T = T_f = 0 \ \rightarrow\ P_0(2e; 0)$$

- Studio del segno:

$$T(t) > 0$$

$-2e\, t > 0 \quad \rightarrow \quad t < 0$

$\ln\left(\frac{t}{2e}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{t}{2e} > 1 \quad \rightarrow \quad t > 2e \quad (fuori\ dal\ dominio)$

$$\boldsymbol{T(t) > 0} \quad \rightarrow \quad 0 < t < 2e$$

- Comportamento asintotico agli estremi: NON RICHIESTO PERCHE' ESTERNO AL DOMINIO

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$\boldsymbol{T'(t) = -2e\left[\ln\left(\frac{t}{2e}\right) + 1\right]}$$

$$T'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2$$

$T'(t) > 0$

$-2e\left[\ln\left(\frac{t}{2e}\right) + 1\right] > 0 \quad \rightarrow \quad -\ln\left(\frac{t}{2e}\right) - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad -\ln\left(\frac{t}{2e}\right) > 1 \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{2e}{t}\right) > 1 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \frac{2e}{t} > e \quad \rightarrow \quad \frac{2}{t} > 1 \quad \rightarrow \quad t < 2$

$$\boldsymbol{T'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < t < 2}$$

- Studio della derivata seconda:

$T''(t) = -2e\, \frac{1}{t/2e} \cdot \frac{1}{2e} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T''(t) = -\frac{2e}{t}}$

$T''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \nexists t \in R$

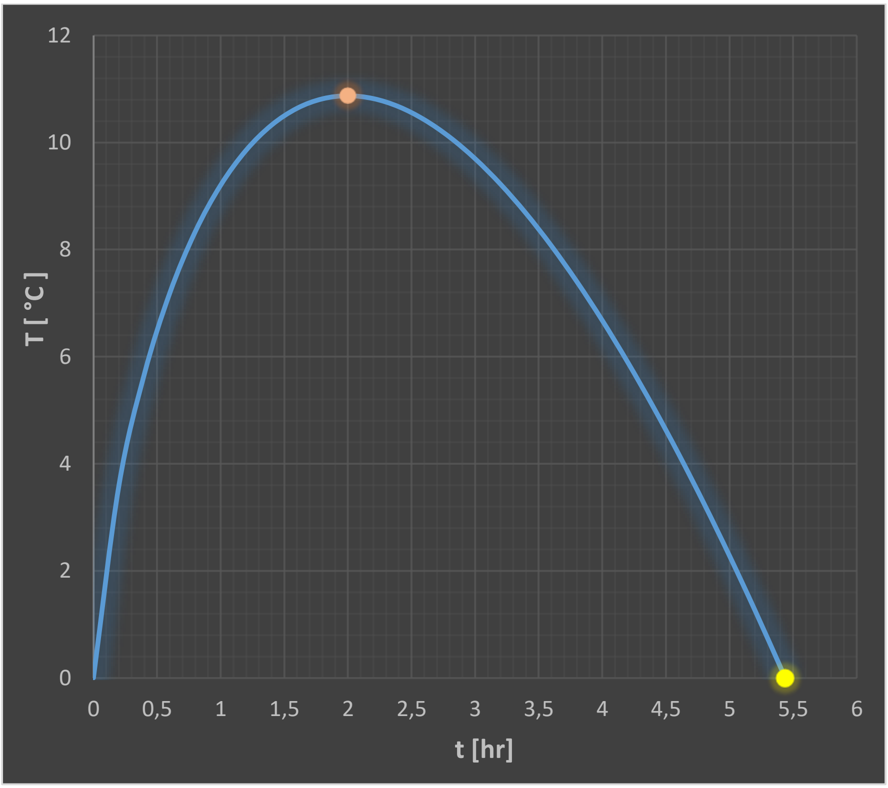
$T''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad \nexists t \in [0; 2e]$

<u>La derivata seconda è sempre negativa all'interno del dominio. Perciò la funzione sarà sempre a concavità negativa.</u>

- Studio per punti:

$$T(t) = -2e\, t\, \ln\left(\frac{t}{2e}\right) \quad con\ \ 0 \le t \le 2e$$

t [hr]	N
0	0
0.2	3.59
0.4	5.67
0.6	7.19
0.8	8.33
1	9.20
1.2	9.86
1.4	10.33
1.6	10.64
1.8	10.82
2	**10.87**
2.2	10.82
2.4	10.67
2.6	10.43
2.8	10.10
3	9.70
3.2	9.22
3.4	8.68
3.6	8.07
3.8	7.40
4	6.67
4.2	5.89
4.4	5.06
4.6	4.18
4.8	3.25
5	2.28
5.2	1.26
5.4	0.20
5.437	**0**



3) INTEGRALE

$$v(t) = \frac{2t+2}{t^2+5t+6}$$

a)

Per calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x e tener conto della popolazione iniziale N_0 che è data in <u>milioni di unità</u>:

$$N(t) = N_0 + \int_0^{t_x} v(t)\,dt$$

$$\frac{2t+2}{t^2+5t+6} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+3} = \frac{(A+B)t+3A+2B}{(t+2)(t+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=4 \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{4}{t+3} - \frac{2}{t+2}$$

$$N(t) = N_0 + \int_0^{t_x} v(t)\,dt = N_0 + \int_0^{t_x} \left(\frac{4}{t+3} - \frac{2}{t+2}\right) dt =$$

$$= N_0 + [4\ln(t+3) - 2\ln(t+2) + c]_0^{t_x}$$

$$N(t) = N_0 + 4\ln(t_x+3) - 2\ln(t_x+2) - 4\ln 3 + 2\ln 2$$

$$\boldsymbol{N(t) = N_0 + 4\ln(t_x+3) - 2\ln(t_x+2) - 3}$$

In alternativa:

$$N(t) = N_0 + 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] + 2\ln\frac{2}{9}$$

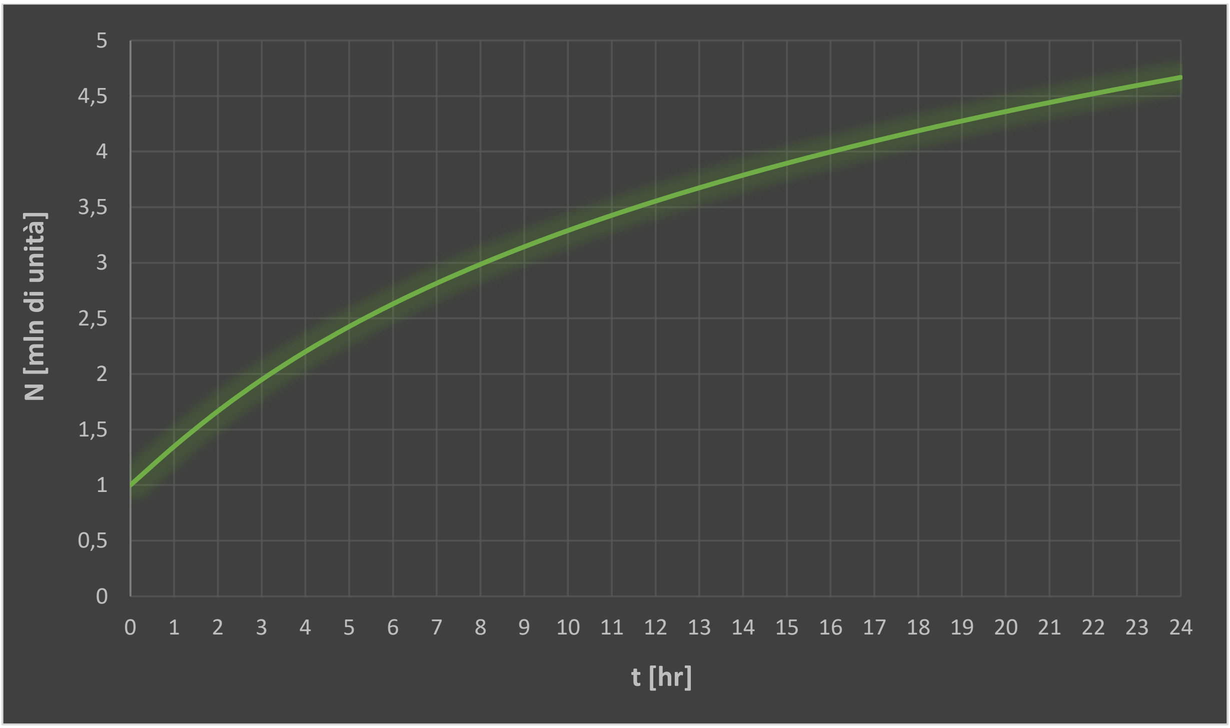
$$\boldsymbol{N(t) = N_0 + 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] - 3}$$

b)

Se il numero iniziale di batteri è pari ad un milione, ricordando che *N* è dato in milioni di unità:

$$\boldsymbol{N(t) = 1 + 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] - 3 = 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] - 2}$$

t [hr]	N [mln]
0	1.00
4	2.20
8	2.99
12	3.55
16	4.00
20	4.36
24	4.67



4) STATISTICA

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

SERVIZI	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Costo di produzione	1 306.67 €	28 433.33 €	168.62 €
Servizi venduti	841	8 812	93.87

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} = -15\,500$$

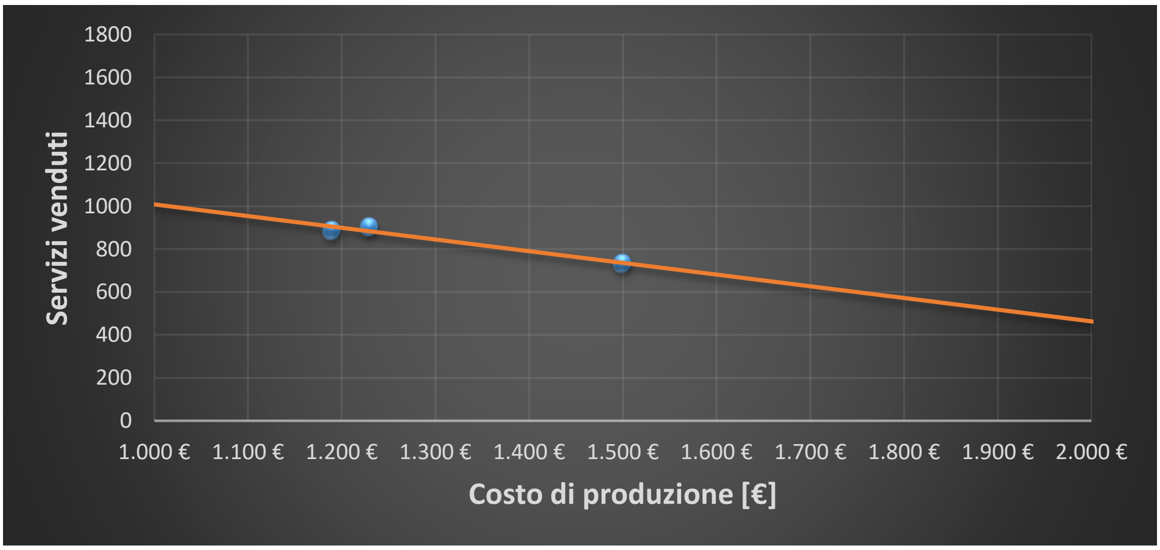
$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = -0.979$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = -0.545\,x + 1553}$$



c)

Il test fa riferimento al rapporto tra il costo di produzione e il numero di servizi venduti, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati:

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1 500 €	1 230 €	1 190 €
Servizi venduti	733 €	903 €	887 €
Rapporto	2.05 €	1.36 €	1.34 €

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a *n = 3* (A, B, C). Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo *t-Student* con gradi di libertà pari a $v = n - 1 = 2$ e dovrà essere utilizzata la seguente quantità pivotale:

$$T^{*}_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard campionaria della serie di dati ottenuta:

Media	1.58 €
Varianza C	0.16089
Dev Std C	0.40111
Pivot T	**0.360**

Test T				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati per $v = 2$, si ottiene che l'ipotesi nulla H_0 secondo la quale il rapporto tra il costo di produzione e il numero di servizi venduti sia pari a 1.50 € è non negabile al 90%.