FACOLTÀ DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Analisi Matematica I

Programma del Corso e Informazioni Generali

DOCENTE

Prof. Emil Nabil

Dipartimento di Matematica e Informatica

Anno Accademico

2026 / 2027

Informazioni sul Corso

Prof. Emil Nabil

Obiettivi Formativi

Lo scopo è fornire conoscenze operative per ragionare autonomamente su argomenti matematici di base, con un approccio applicativo.

- **A) Conoscenza e Comprensione**
  Rappresentazione funzioni, calcolo differenziale/integrale (1+ variabili), equazioni differenziali.
- **B) Applicazione Conoscenza**
  Studio autonomo testi scientifici (fisica tecnica, statica), problem solving scientifico.
- **C) Autonomia di Giudizio**
  Individuazione strumenti matematici per Scienze dell'Architettura.
- **D) Abilità Comunicative**
  Utilizzo corretto del linguaggio matematico.
- **E) Capacità di Apprendimento**
  Nuove metodologie per contesti applicativi.

Prerequisiti

È indispensabile la conoscenza del **calcolo aritmetico e algebrico letterale a livello elementare** per poter seguire proficuamente il corso.

Ricevimento

Il ricevimento studenti si svolge secondo gli orari pubblicati sul sito di Ateneo o previo appuntamento via email.

Materiali e slide disponibili su Teams/Moodle.

Metodi Didattici

- Lezioni frontali alla lavagna con illustrazione concetti fondamentali.
- Svolgimento di esempi ed esercizi pratici per favorire la comprensione.
- Attività di tutoraggio dedicata al miglioramento della risoluzione quesiti e preparazione esami.

Valutazione

Esame scritto con esercizi sugli argomenti trattati.

- Punteggio per ogni esercizio
- Focus sul ragionamento
- Max 32 punti (30 e Lode se > 30)

→ Dettagli nella slide finale

PROGRAMMA DEL CORSO

Parte I: Fondamenti

X_1 Numeri Reali

- Insiemi numerici, assiomi fondamentali, ordine e proprietà di completezza.
- Estremo superiore ed inferiore: definizioni e proprietà.
- Valore assoluto: definizione e disuguaglianze fondamentali.
- Potenze e radicali: regole di calcolo e proprietà.
- Funzioni esponenziali e logaritmi: definizioni e proprietà algebriche.

Limiti e Continuità

- Definizione formale di limite di funzione.
- Limiti notevoli: *sin x/x* e numero di Nepero *e*.
- Teoremi del confronto e dei due carabinieri.
- Concetto di continuità e classificazione delle discontinuità.
- Teoremi fondamentali: Weierstrass, Bolzano e dei Valori Intermedi.

PROGRAMMA DEL CORSO

Parte II: Calcolo e Equazioni

Calcolo Differenziale

- Derivata, retta tangente e regole di calcolo.
- Teoremi fondamentali: Rolle, Lagrange, de L'Hôpital.
- Monotonia, convessità e Teorema di Fermat.
- Formula di Taylor e sviluppi asintotici.
- Studio completo del grafico di funzione.

Calcolo Integrale

- Integrale di Riemann e proprietà dell'integrale definito.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Metodi: sostituzione, per parti, funzioni razionali.
- Integrali impropri: definizioni e criteri di convergenza.
- Funzione integrale e ricerca delle primitive.

Equazioni Differenziali

- Definizioni generali e problema di Cauchy.
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine.
- Equazioni a variabili separabili.
- Struttura dell'integrale generale.
- Applicazioni a semplici modelli fisici e geometrici.

DETTAGLI CONCLUSIVI

Modalità d'Esame e Bibliografia

Esame Scritto

Tipologie Esercizi

- Studio funzione completo
- Limiti (notevoli/Taylor)
- Integrali (sost/parti)
- Derivate parziali
- Ottimizzazione

Valutazione (Max 32 punti)

- Ogni esercizio ha un punteggio determinato.
- Fondamentale il **ragionamento** risolutivo.
- Voto > 30 corrisponde a **30 e Lode**.

Criteri

Correttezza teorica · Chiarezza metodo · Calcolo · Interpretazione

Bibliografia Consigliata

Analisi Matematica Uno
P. Marcellini, C. Sbordone
Liguori Editore

Analisi Matematica 1
M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa
Zanichelli

Esercitazioni di Matematica (Vol. I)
P. Marcellini, C. Sbordone
Liguori Editore

Risorse Digitali

Materiali didattici integrativi, slide delle lezioni e tracce d'esame passate sono disponibili sui canali ufficiali di Ateneo (Moodle / Teams).

INTRODUZIONE AL CORSO

Perché l'Analisi Matematica per Architetti?

Prof. Emil Nabil
Università degli Studi di Cagliari

È solo teoria astratta?

No. La matematica è il **linguaggio universale** della forma, della struttura e dello spazio.

A cosa mi servirà?

Per trasformare un'idea creativa in una **realtà costruibile**, sicura ed efficiente.

Il Ponte tra Idea e Costruzione

Forma e Geometria

Dalle cupole del Brunelleschi alle superfici parametriche di Zaha Hadid: le funzioni descrivono curve e superfici complesse.

Sicurezza Strutturale

Derivate e integrali sono essenziali per calcolare carichi, deformazioni e stabilità degli edifici.

Sostenibilità e Comfort

L'analisi matematica ottimizza l'uso dei materiali, l'efficienza energetica e l'acustica degli spazi.

APPLICAZIONE REALE

MOTIVAZIONE E APPLICAZIONI

Funzioni nella Progettazione Architettonica

Dalla teoria alla forma costruita

Le funzioni matematiche non sono astrazioni, ma il linguaggio con cui definiamo forme, strutture e comportamenti nello spazio architettonico.

PARABOLE E CATENARIE

Archi e Ponti

La forma ottimale per un arco che sostiene il proprio peso. Le funzioni quadratiche e iperboliche definiscono la geometria strutturale perfetta.

$y = ax^2 + bx + c$

FUNZIONI ESPONENZIALI

Crescita e Acustica

Modellazione della crescita urbana, decadimento del suono nelle sale da concerto e analisi demografica per la pianificazione.

$P(t) = P_0 e^{(rt)}$

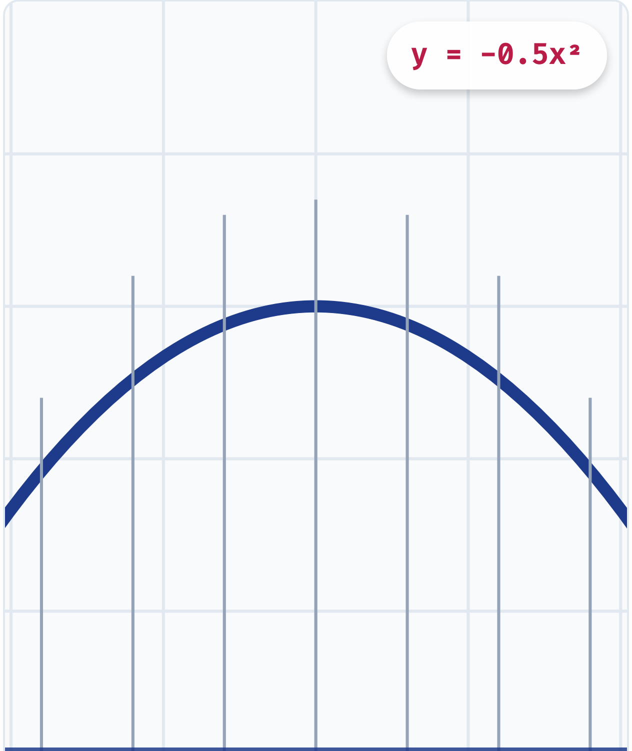
FUNZIONI PERIODICHE

Strutture Ondulate

Coperture a guscio, facciate parametriche e moduli ripetitivi. Le funzioni trigonometriche creano ritmi visivi e strutturali.

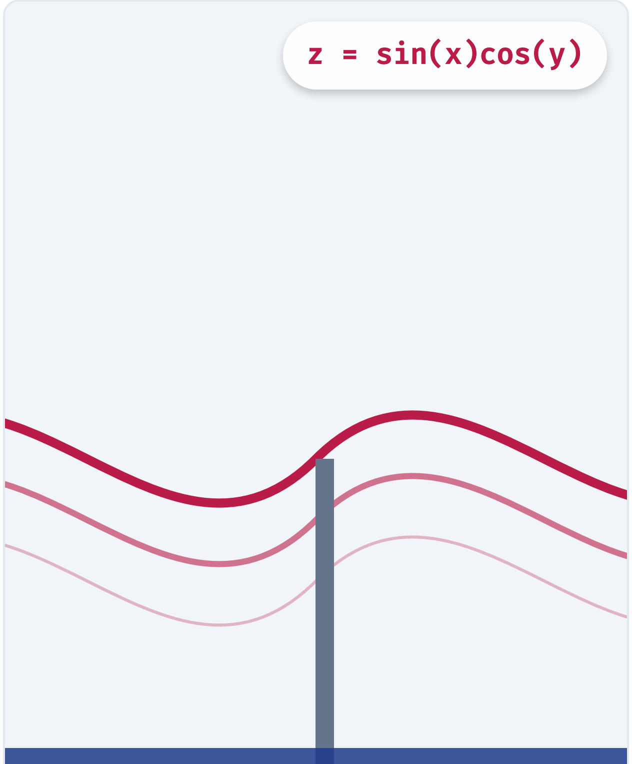
$y = A \sin(\omega x + \varphi)$

VISUALIZZAZIONE APPLICATIVA



STRUTTURE

L'arco parabolico distribuisce uniformemente i carichi verticali.



DESIGN PARAMETRICO

Superfici complesse generate da funzioni periodiche per coperture fluide.

La matematica è il motore invisibile del design

I software come Rhino e Grasshopper utilizzano queste funzioni per generare forme complesse che sarebbero impossibili da disegnare a mano.

APPLICAZIONI PRATICHE - INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Limiti e Continuità nelle Strutture

Dal concetto matematico alla realtà fisica

CONTINUITÀ = INTEGRITÀ STRUTTURALE

In matematica, una funzione è continua se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. In architettura, questo modella l'**integrità dei materiali**. Una trave che si flette sotto carico segue una curva continua. Una discontinuità matematica (es. salto) rappresenta fisicamente una **frattura** o un giunto di dilatazione.

IL LIMITE COME PUNTO DI ROTTURA

Il concetto di limite è fondamentale per definire gli **Stati Limite** (SLU/SLE). Calcoliamo cosa accade quando il carico w tende al valore critico w_{max}. Il collasso strutturale è l'analogo fisico di una funzione che diverge o esce dal dominio di elasticità.

TRANSIZIONI E CONNESSIONI

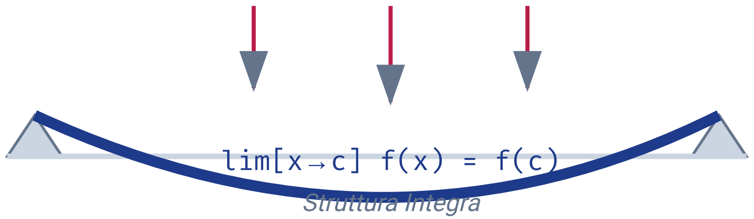
Nel design parametrico e nelle strutture a guscio, le transizioni morbide tra superfici richiedono non solo continuità (C0), ma anche derivabilità (C1, tangenza) per evitare concentrazioni di stress pericolose.

APPLICAZIONE PROFESSIONALE

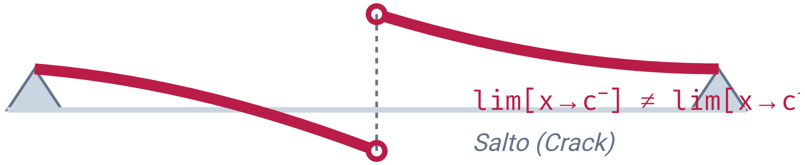
Quando verificherete una trave o progetterete un giunto, starete verificando le condizioni di continuità e i limiti di resistenza dei materiali.

MODELLAZIONE MATEMATICA VS REALTÀ

1. Deformazione Continua (Elastica)



2. Discontinuità (Rottura/Taglio)



Derivate per Ottimizzazione del Design

Dal calcolo alla forma perfetta

IL PRINCIPIO DI OTTIMIZZAZIONE

In architettura, "progettare" significa spesso cercare la soluzione **migliore** tra infinite possibilità (costi minimi, luce massima, stabilità).

Punti di Massimo/Minimo: `f'(x) = 0`

MINIMIZZARE I MATERIALI

Calcolare le dimensioni ideali di un edificio o di un componente (es. serbatoio) per ottenere un volume fisso con la **minima superficie** esterna.

→ Risparmio costi ed efficienza energetica.

PENDENZE E ACCESSIBILITÀ

La derivata rappresenta la **pendenza** (slope). Nella progettazione di rampe accessibili, la derivata non deve superare limiti normativi precisi.

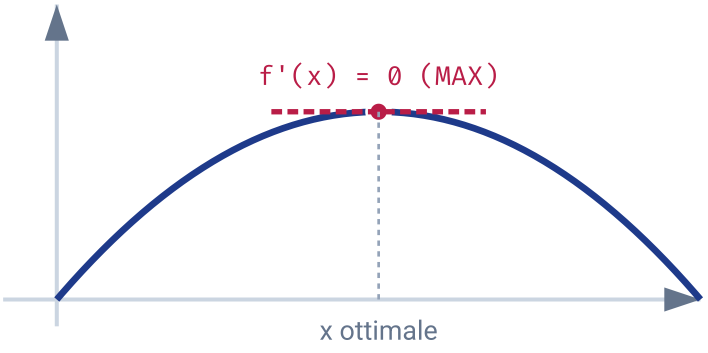
`pendenza m = f'(x) ≤ 8%`

ORIENTAMENTO SOLARE

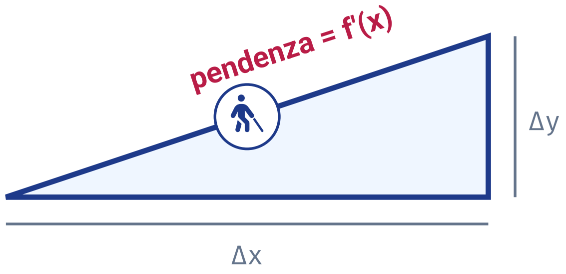
Trovare l'angolo di orientamento che **massimizza** l'esposizione solare invernale o l'illuminazione naturale.

ANALISI GRAFICA

Ottimizzazione (Max Luce/Spazio)



Pendenza (Derivata Costante)



Integrali per Quantità e Prestazioni

L'integrale non è solo un concetto astratto di "area sotto la curva", ma lo strumento fondamentale per quantificare **spazio, materia ed energia** nei progetti architettonici complessi.

$\int V(x)dx$

Calcolo Volumi e Materiali

Determinazione esatta di quantità di calcestruzzo per forme complesse e scavi di terreno.

Esempio: Cubatura cupole e volte

$\iint dS$

Aree Superficiali

Computo metrico per rivestimenti di facciate curve, coperture organiche e membrane.

Esempio: Metratura pannelli Zaha Hadid

$\int q(x)dx$

Carichi Distribuiti

Analisi della risultante di forze distribuite (neve, vento, folla) su travi e solai.

Esempio: Pressione idrostatica dighe

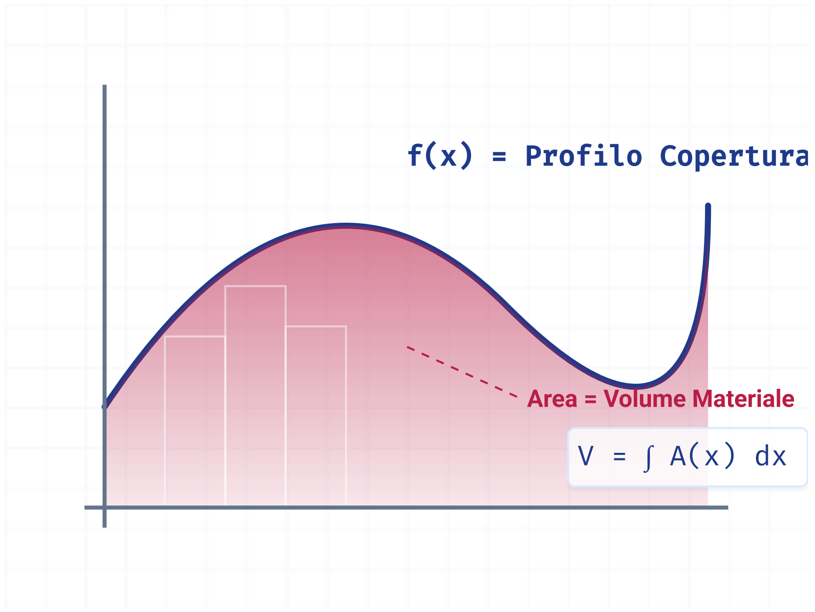
$\int Q(t)dt$

Flussi Termici ed Energetici

Accumulo termico inerziale, analisi energetica su cicli giornalieri/annuali.

Esempio: Guadagno solare cumulativo

VISUALIZZAZIONE CONCETTUALE



Dalla Curva al Costo

L'integrale trasforma una linea progettuale (profilo) in quantità fisiche (metri cubi/quadri), permettendo preventivi precisi e ottimizzazione dei costi già in fase di concept.

Applicazioni: Computi metrici, Analisi strutturale, Fisica tecnica ambientale

INTEGRAZIONE CURRICOLARE

Dalla Teoria agli Strumenti Professionali

Progressione dalla matematica al software

1 Geometria e Vettori

Punti, linee e vettori definiscono lo spazio cartesiano per il disegno tecnico di precisione.

`(x,y,z)` `Vectors`

AUTOCAD

2 Modellazione NURBS

Equazioni parametriche e matrici per generare superfici complesse e forme libere.

`Splines` `Matrices`

RHINO 3D

3 Design Parametrico

L'architettura diventa funzione di parametri: logica matematica e algoritmi generativi.

`f(x)` `Lists`

GRASSHOPPER

4 BIM e Quantità

Integrali per il calcolo volumi e logica relazionale per gestire i dati costruttivi.

`∫ dV` `Database`

REVIT

5 Analisi e Ottimizzazione

Derivate e calcolo numerico per ottimizzare strutture, energia e luce (FEM, CFD).

`∂/∂x` `Optimization`

SIMULAZIONI

6 Architettura Digitale

La matematica abilita forme innovative e prestazioni misurabili nel progetto finale.

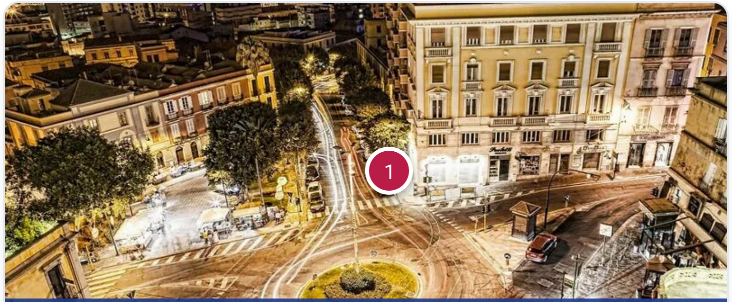
`Sintesi`

IL FUTURO

Padroneggiare la matematica significa controllare gli strumenti, non esserne dominati.

Matematica nei Monumenti di Cagliari

Analisi geometrica e strutturale



BASTIONE SAINT REMY

Archi e Parabole

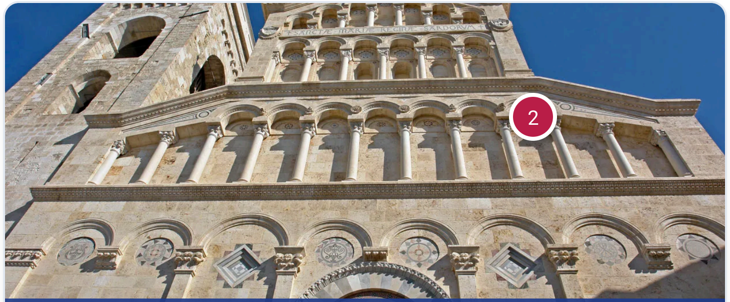
L'imponente arco trionfale della facciata segue una curva che può essere modellata matematicamente per ottimizzare la distribuzione del carico verticale.

ANALISI FUNZIONALE
Modellazione tramite funzione quadratica (parabola).

Equazione dell'Arco:

$$f(x) = -ax^2 + c$$

Con $a > 0$ (concavità verso il basso)



CATTEDRALE S. MARIA

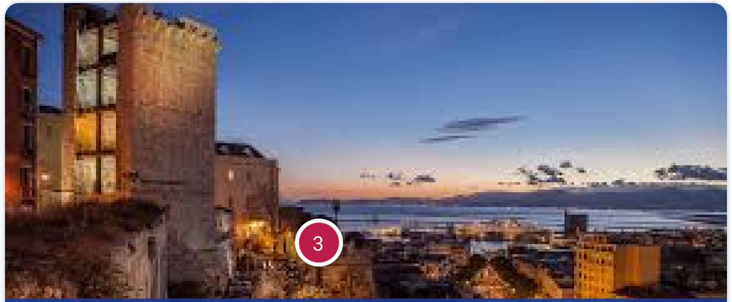
Cupola e Rotazione

La cupola ottagonale è un perfetto esempio di solido di rotazione. Il calcolo del volume interno e della superficie esterna richiede l'uso degli integrali.

CALCOLO INTEGRALE
Volume generato dalla rotazione del profilo f(x).

Volume della Cupola:

$$V = \pi \int [f(x)]^2 \, dx$$



TORRE DELL'ELEFANTE

Vettori e Stabilità

La torre medievale deve resistere a forze laterali (vento) e verticali (peso). L'analisi vettoriale garantisce che la risultante delle forze cada entro la base.

STATICA VETTORIALE
Equilibrio delle forze e baricentro.

Condizione Equilibrio:

$$\Sigma F = 0 \,,\ \Sigma M = 0$$

CAGLIARI NEL TEMPO

Evoluzione della Matematica nell'Architettura

Dal Medioevo al Parametrico

1200 - 1400

Medioevo

GEOMETRIA DIFENSIVA

Torre dell'Elefante

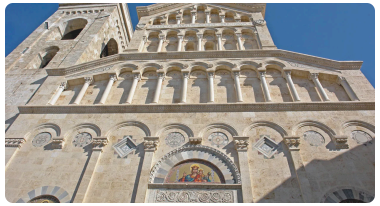
Torre dell'Elefante
Calcolo di angoli per la stabilità e linee di tiro.

Vettori · Trigonometria · Statica

1600 - 1700

Barocco

PROPORZIONI AUREE



Cattedrale S. Maria
Uso della sezione aurea (φ) e simmetria assiale.

Simmetria · $\varphi \approx 1.618$ · Solidi Rot.

1800 - 1900

Neoclassico

ANALISI FUNZIONALE

Bastione St. Remy
Archi parabolici e rampe a doppia elica.

Parabole · Eliche · Curve

1900 - 1970

Modernismo

RAZIONALISMO

Edilizia Razionalista
Griglie ortogonali, moduli ripetitivi e geometria euclidea.

Matrici · Logica · Topologia

2000 - Oggi

Contemporaneo

PARAMETRICO & BIM

Architettura Parametrica
Algoritmi generativi, NURBS e ottimizzazione computazionale.

Algoritmi · NURBS · Integrali

La matematica è il linguaggio nascosto dell'evoluzione urbana di Cagliari.

Insiemi Numerici

Gerarchia e Interi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- **Naturali ($\mathbb{N}$)**
  $\{0, 1, 2, \ldots\}$
  Es: $5 \in \mathbb{N}$, *ma* $-3 \notin \mathbb{N}$.
- **Interi ($\mathbb{Z}$)**
  $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$
  Es: $-2 \in \mathbb{Z}$, *ma* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Razionali e Reali

- **Razionali ($\mathbb{Q}$)**
  Frazioni a/b, decimali finiti o periodici.
  Es: $0.333\ldots \in \mathbb{Q}$.
- **Irrazionali**
  Decimali infiniti non periodici.
  Es: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- **Reali ($\mathbb{R}$)**
  Unione di razionali e irrazionali.
  Es: $e \in \mathbb{R}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

Complessi e Proprietà

- **Complessi ($\mathbb{C}$)**
  Estensione di $\mathbb{R}$ con $i^2 = -1$.
  Es: $3+i \in \mathbb{C}$, *ma* $i \notin \mathbb{R}$.
- **Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$**
  Tra due numeri reali distinti esiste sempre un numero razionale.
- **Completezza di $\mathbb{R}$**
  Idea intuitiva: la retta reale non ha "buchi", garantendo la continuità.

Operazioni sugli Insiemi

Definizioni e Proprietà

Inclusione (Sottoinsieme)

$A \subseteq B$

Si dice che A è sottoinsieme di B se ogni elemento di A appartiene anche a B.

```
Ex: A = {2, 4}, B = {1, 2, 3, 4} ⇒ A ⊆ B
```

Operazioni Algebriche

Unione (∪) Elementi in A **oppure** in B.

```
{1, 2} ∪ {2, 3} = {1, 2, 3}
```

Intersezione (∩) Elementi **comuni** ad entrambi.

```
{1, 2, 3} ∩ {2, 3, 4} = {2, 3}
```

Differenza (\) Elementi in A **non** presenti in B.

```
{1, 2, 3} \ {3, 4} = {1, 2}
```

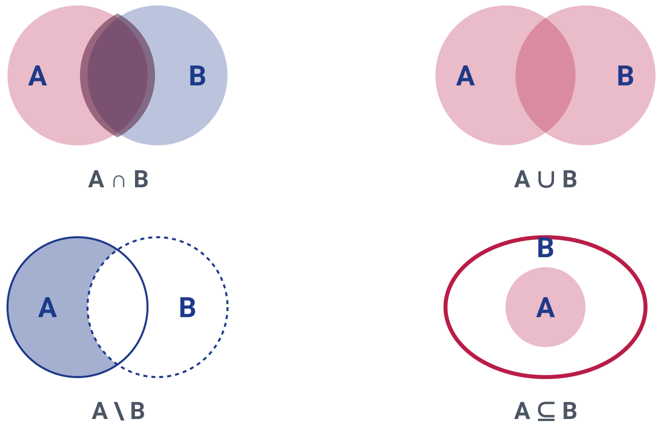
Prodotto Cartesiano

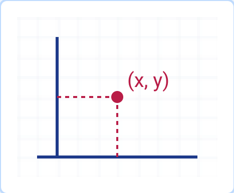
$A \times B$

Insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

```
ℝ × ℝ = ℝ² (Piano Cartesiano)                    Ord. conta!
```

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA (DIAGRAMMI DI VENN)





Il Piano Cartesiano
Ogni punto del piano corrisponde univocamente a una coppia ordinata di numeri reali.

Intervalli ed Estremi

Tipi di Intervalli

- **Chiuso [a, b]:** include gli estremi a e b.
  $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$
- **Aperto (a, b):** esclude gli estremi.
  $\{x \in R : a < x < b\}$
- **Semichiusi (a, b] o [a, b):** un estremo incluso, l'altro escluso.
- **Illimitati (a, +∞) o (-∞, b]:** estesi all'infinito in una direzione.

Punti Notevoli

- **Punti Interni:** esiste un intorno del punto interamente contenuto nell'insieme.
- **Punti Esterni:** esiste un intorno del punto interamente fuori dall'insieme.
- **Punti di Frontiera:** ogni intorno contiene punti dell'insieme e punti fuori.
- **Punti di Accumulazione:** ogni intorno contiene infiniti punti dell'insieme.

Estremi

- **Max / Min:** il più grande/piccolo elemento che *appartiene* all'insieme.
- **Sup / Inf:** il più piccolo dei maggioranti o il più grande dei minoranti.

Regola Pratica:

- Quadre **[ ]** → Max/Min esistono.
- Tonde **( )** → Solo Sup/Inf.

Piano Cartesiano R^2

Riferimento Cartesiano

- **Assi Ortogonali:** Due rette perpendicolari orientate. Asse x (ascisse) e asse y (ordinate).
- **Origine O:** Punto di intersezione $O(0,0)$, centro del sistema.
- **Quadranti:** Il piano è diviso in 4 regioni (I, II, III, IV) numerate in senso antiorario a partire da $x>0,\ y>0$.
- **R^2 come Prodotto:** Insieme delle coppie ordinate $R\times R = \{(x,y) \mid x\in R,\ y\in R\}$.

Punti e Metrica

- **Coordinate:** Ogni punto P è univocamente determinato dalla coppia $(x_P,\ y_P)$.
- **Distanza Euclidea:** Dati $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

- **Punto Medio:** $M = ((x_1+x_2)/2,\ (y_1+y_2)/2)$.

Equazioni della Retta

- **Forma Esplicita:** $y = mx + q$.
  - m = coefficiente angolare (pendenza).
  - q = intercetta all'origine.
- **Rette Particolari:**
  - Verticale: $x = k$ (pendenza indefinita).
  - Orizzontale: $y = k$ (pendenza m=0).

Il Concetto di Funzione

Definizione

- Funzione $f: D \subseteq R \to R$.
- **Dominio (D):** Insieme di partenza dei valori ammissibili.
- **Codominio:** Insieme di arrivo contenente i valori possibili.
- **Immagine:** Sottoinsieme del codominio dei valori effettivamente assunti.
- **Grafico in R^2:** Insieme delle coppie $(x, f(x))$ nel piano cartesiano.

Proprietà

- **Iniettiva:** Ad ogni y corrisponde al più una x (elementi distinti hanno immagini distinte).
- **Suriettiva:** Ogni y del codominio è raggiunto da almeno una x.
- **Biiettiva:** Sia iniettiva che suriettiva (corrispondenza biunivoca).
- **Funzione inversa f^{-1}:** Esiste se e solo se la funzione è biiettiva.

Operazioni ed Esempi

- **Composizione:** $g \circ f$ significa $g(f(x))$.
- **Esempio Modulo:** $|x|$ (Pari, non iniettiva su R).
- **Esempio Potenza:** x^2 (Parabola, non iniettiva su R).
- **Esempio Esponenziale:** e^x (Sempre positiva, iniettiva).
- **Esempio Logaritmo:** $\ln x$ (Definita per $x > 0$, biiettiva).

Funzioni Fondamentali I

La Retta

Equazione: $y = mx + q$

- **Coefficiente angolare (m):** determina la pendenza.
- Se $m > 0$: funzione strettamente crescente.
- Se $m < 0$: funzione strettamente decrescente.
- **Intercetta (q):** ordinata all'origine (intersezione asse y).
- Casi particolari: $m=0$ (orizzontale), $x=k$ (verticale, non funz.).

La Parabola

Equazione: $y = ax^2 + bx + c$

- **Concavità (a):** $a > 0$ convessa (U), $a < 0$ concava (∩).
- **Vertice V:** punto di minimo (se a>0) o massimo (se a<0).
- Coordinate V: $(-b/2a, f(-b/2a))$.
- **Asse di simmetria:** retta verticale $x = -b/2a$.

Potenze e Modulo

Funzione Potenza x^n

- **n pari:** pari (simm. asse y), img $[0, +\infty)$.
- **n dispari:** dispari (simm. origine), biiettiva.
- **n razionale:** attenzione al dominio (es. radici).

Valore Assoluto $|x|$

- Grafico a "V" (spezzata).
- Sempre ≥ 0.
- **Punto angoloso:** non derivabile in $x=0$.

Esponenziali e Logaritmi

Funzione Esponenziale

- Definita come $y = a^x$ con base $a > 0,\ a \neq 1$.
- **Dominio:** Tutto $\mathbb{R}$ (-∞, +∞).
  Codominio: $\mathbb{R}^+$ (0, +∞).
- **Monotonia:**
  Crescente se $a > 1$
  Decrescente se $0 < a < 1$
- **Il numero di Nepero *e*:**
  Caso speciale $y = e^x$.
  Derivata fondamentale: $(e^x)' = e^x$.

Funzione Logaritmica

- Inversa dell'esponenziale: $y = \log_a x$.
- **Dominio:** $(0, +\infty)$ (argomento positivo).
  Codominio: Tutto $\mathbb{R}$.
- **Logaritmo Naturale:**
  Base *e*, indicato come $\ln x = \log_e x$.
- **Cambio di base:**
  $\log_a x = (\ln x) / (\ln a)$

Proprietà ed Equazioni

- **Proprietà delle Potenze:**
  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  $(a^x)^y = a^{xy}$
- **Proprietà dei Logaritmi:**
  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
  $\ln(x^k) = k \cdot \ln x$
- **Equazioni/Disequazioni:**
  Risolubili passando alla forma esponenziale o logaritmica rispettando la monotonia della base.

Funzioni goniometriche e inverse

Seno e Coseno

- **Periodicità:** Entrambe hanno periodo $T = 2\pi$. Valori ripetuti ogni giro completo.
- **Simmetria:**
  $\cos(-x) = \cos(x)$ (Pari)
  $\sin(-x) = -\sin(x)$ (Dispari)
- **Domini:** Definite su tutto R.
  Codominio: Limitato in $[-1, 1]$.
- Funzioni continue e derivabili ovunque.

Tangente e Proprietà

- **Definizione:** $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$.
  Periodo: $T = \pi$.
- **Simmetria:** Funzione dispari ($\tan(-x) = -\tan(x)$).
- **Asintoti verticali:** Dove $\cos(x)=0$, ovvero $x = \pm\pi/2 + k\pi$.
- **Identità Fondamentale:**
  $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Funzioni Inverse

- **Arcseno e Arccoseno:**
  Domini ristretti a $[-1, 1]$.
  Codomini: $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[0, \pi]$.
- **Arctangente:**
  Definita su tutto R.
  Codominio: $(-\pi/2, \pi/2)$.
- **Relazione notevole:**
  $\sin(\arcsin t) = t$ per t in $[-1,1]$.
- **Derivata notevole:**
  $D(\arctan x) = 1 / (1 + x^2)$.

Mappa delle Funzioni Fondamentali

Obiettivi & Metodo

Analisi sistematica di tutte le funzioni base per costruire un "vocabolario" matematico solido.

- **Grafico:** Visualizzazione immediata dell'andamento.
- **Scheda Proprietà:** Dominio, codominio, parità, segno, monotonia, asintoti.
- **Continuità:** Analisi punti di non derivabilità.
- **Esempio Svolto:** Applicazione numerica diretta per ogni funzione.

Funzioni Algebriche

- **Costante & Lineare:** Rette orizzontali e oblique (m, q).
- **Quadratica:** Parabole, vertice, asse e concavità.
- **Potenze x^n:** Differenze tra esponenti pari e dispari.
- **Radici $x^{(1/n)}$:** Domini e comportamento in 0.
- **Valore Assoluto:** Funzione definita a tratti e punti angolosi.

Funzioni Trascendenti

- **Esponenziale:** Basi $a>1$ vs $0<a<1$, crescita rapida.
- **Logaritmo:** Domini, asintoti verticali e crescita lenta.
- **Goniometriche:** Periodicità di sin, cos, tan.
- **Inverse Trig:** Restrizioni di dominio (arcsin, arccos, arctan).

Funzione Costante f(x) = k

Grafico e Proprietà

DEFINIZIONI BASE

Dominio: $\mathbb{R}$

Codominio: $\{k\}$

Parità: Né pari né dispari ($k \neq 0$)

ANALISI

Continuità: Continua ovunque

Derivata: $f'(x) = 0$

Monotonia: Costante

COMPORTAMENTO E LIMITI

Zeri: Nessuno (se $k \neq 0$)

Segno: Dipende dal segno di k

Limiti all'infinito: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$

ESEMPIO PRATICO

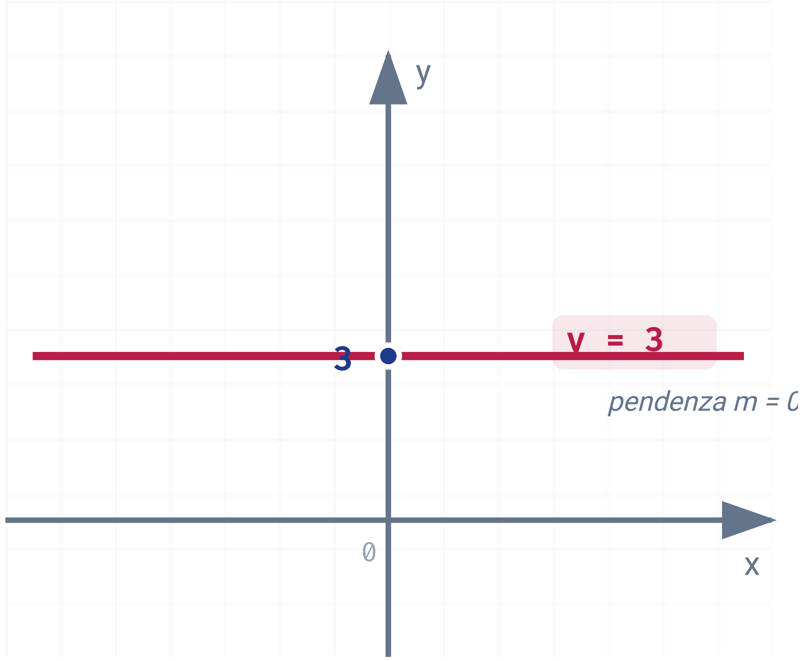
$f(x) = 3$

Intersezione asse y: $(0, 3)$

Valore derivata

$f'(x) = 0$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



Il grafico è una **retta orizzontale** parallela all'asse delle ascisse. L'altezza della retta è determinata dal valore della costante *k*.

La derivata nulla indica che la funzione non cresce né decresce.

Funzione Lineare $f(x) = mx + q$

Grafico e Proprietà

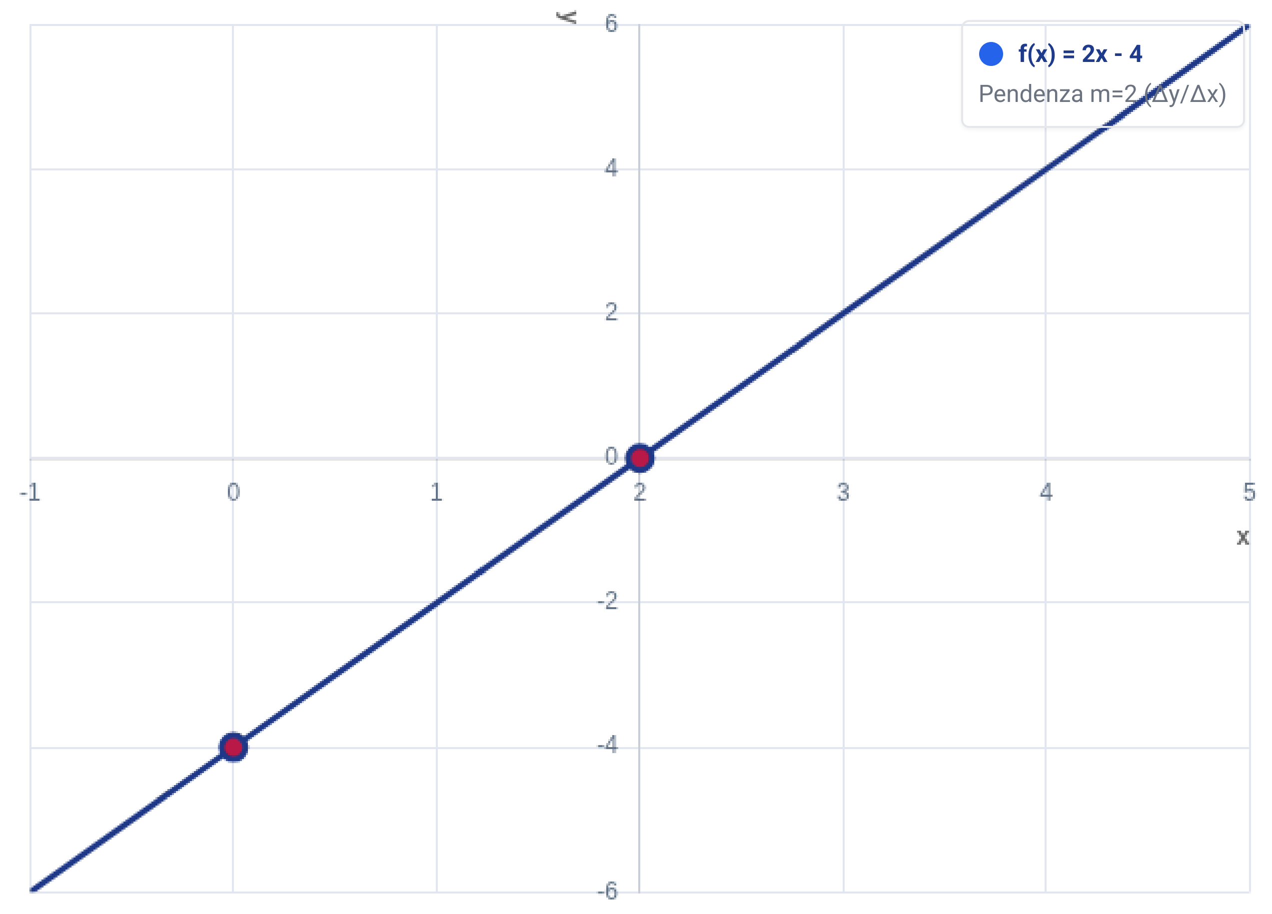
Scheda Proprietà

Dominio	$\mathbb{R}$
Codominio	$\mathbb{R}$ (se $m \neq 0$)
Parità	Dispari solo se q=0
Monotonia	↗ m>0, ↘ m<0, → m=0
Pendenza (m)	Coefficiente angolare
Intercetta (q)	$(0, q)$
Zeri	$x_0 = -q/m$ (se $m \neq 0$)
Continuità	Continua e derivabile ovunque
Derivata	$f'(x) = m$

ESEMPIO PRATICO

$$f(x) = 2x - 4$$

- m = 2 (crescente)
- q = -4 (passa per (0, -4))
- Zero: 2x - 4 = 0 ⇒ x = 2



INTERCETTA Y	ZERO (INTERCETTA X)	COMPORTAMENTO
(0, -4)	(2, 0)	Crescente

Retta: Trasformazioni Geometriche

Parametri m e q

Pendenza m

Controlla l'inclinazione (rotazione).

- **m > 0**: Crescente
- **m < 0**: Decrescente
- **|m| alto**: Retta più ripida

Intercetta q

Controlla la posizione (traslazione).

- Traslazione verticale rigida
- Punto intersezione asse y: **(0, q)**

Simmetria

Una retta è una funzione **dispari** (simmetrica rispetto all'origine) solo se **q = 0**.

ESERCIZIO RAPIDO: COSTRUZIONE GRAFICA

STEP-BY-STEP

Costruire il grafico di $f(x) = -x + 1$ partendo dalla retta base $y = x$.

1. Riflessione

Cambio pendenza m → -m

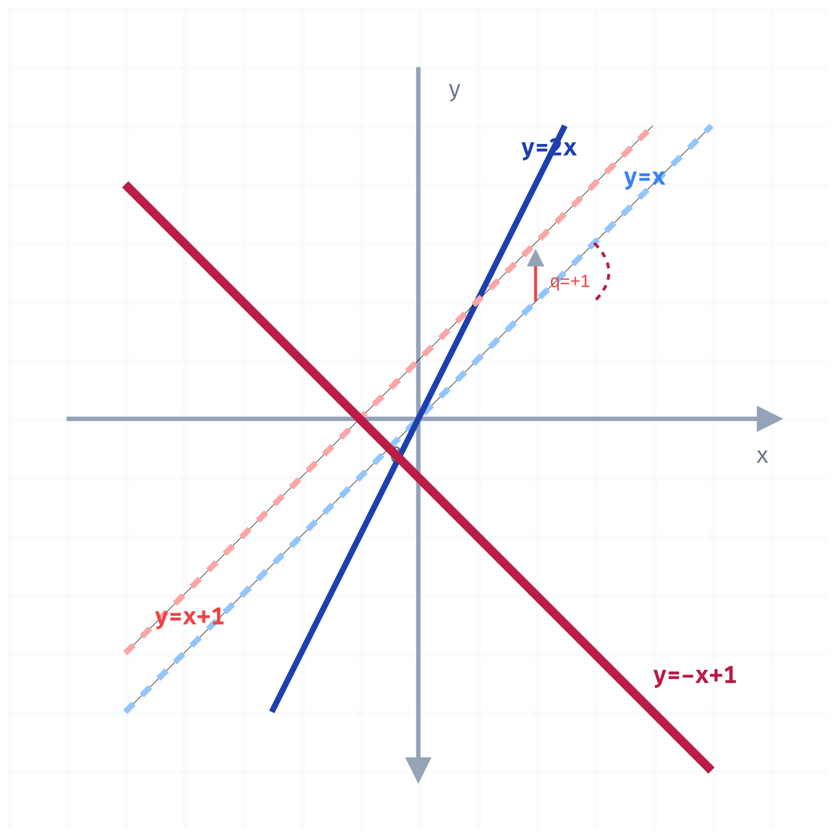
$y = x \rightarrow y = -x$

2. Traslazione

Aggiunta intercetta q = +1

$y = -x \rightarrow y = -x + 1$

CONFRONTO GRAFICO TRASFORMAZIONI



- Base (y=x)
- Più ripida (|m|>1)
- Traslata (q≠0)
- Target (m=-1, q=1)

La Parabola: Formule e Proprietà

Analisi di $f(x) = ax^2 + bx + c$

Coordinate e Formule

VERTICE & ASSE

Punto Notevole

```
V\left(-\frac{b}{2a}, \; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)
\text{Asse: } x = -\frac{b}{2a}
```

Il vertice è il punto di minimo (a>0) o massimo (a<0).

ZERI & DISCRIMINANTE

$\Delta = b^2 - 4ac$

```
x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
```

Definisce le intersezioni con l'asse x.

DERIVATA PRIMA

Monotonia

```
f'(x) = 2ax + b
```

Punto stazionario: $f'(x_V) = 0$

Analisi Qualitativa

Concavità (segno di a)

$a > 0$

Convessa (Verso l'alto)

$a < 0$

Concava (Verso il basso)

Analisi Discriminante Δ

$\Delta > 0$: 2 intersezioni distinte

$\Delta = 0$: 1 intersezione (tangente)

$\Delta < 0$: Nessuna intersezione reale

Dominio & Codominio

Dominio: $\mathbb{R}$ (sempre definita)

Codominio:

$a > 0 : [y_V, +\infty)$

$a < 0 : (-\infty, y_V]$

Intercetta & Monotonia

Intercetta asse y: $(0, c)$

La monotonia cambia nel vertice x_V.

Decrescente $\to$ *Crescente (se* $a > 0$)

Nota Operativa: Per disegnare rapidamente una parabola, individua prima il vertice, poi le intersezioni con gli assi e infine valuta la concavità.

Parabola: Esempio Completo

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. ANALISI ALGEBRICA

Fattorizzazione

$f(x) = (x-1)(x-3)$

Discriminante Δ

$16 - 12 = 4 > 0$

Zeri (f(x)=0)

$x_1 = 1, \ x_2 = 3$

Intercetta Y

$f(0) = 3 \Rightarrow (0, 3)$

2. ELEMENTI GEOMETRICI

Vertice $V(x_v, y_v)$

$x_v = -(-4)/2 = 2$

$y_v = f(2) = -1 \Rightarrow V(2, -1)$

Concavità & Asse

$a = 1 > 0$ (Verso l'alto ∪)

Asse: $x = 2$

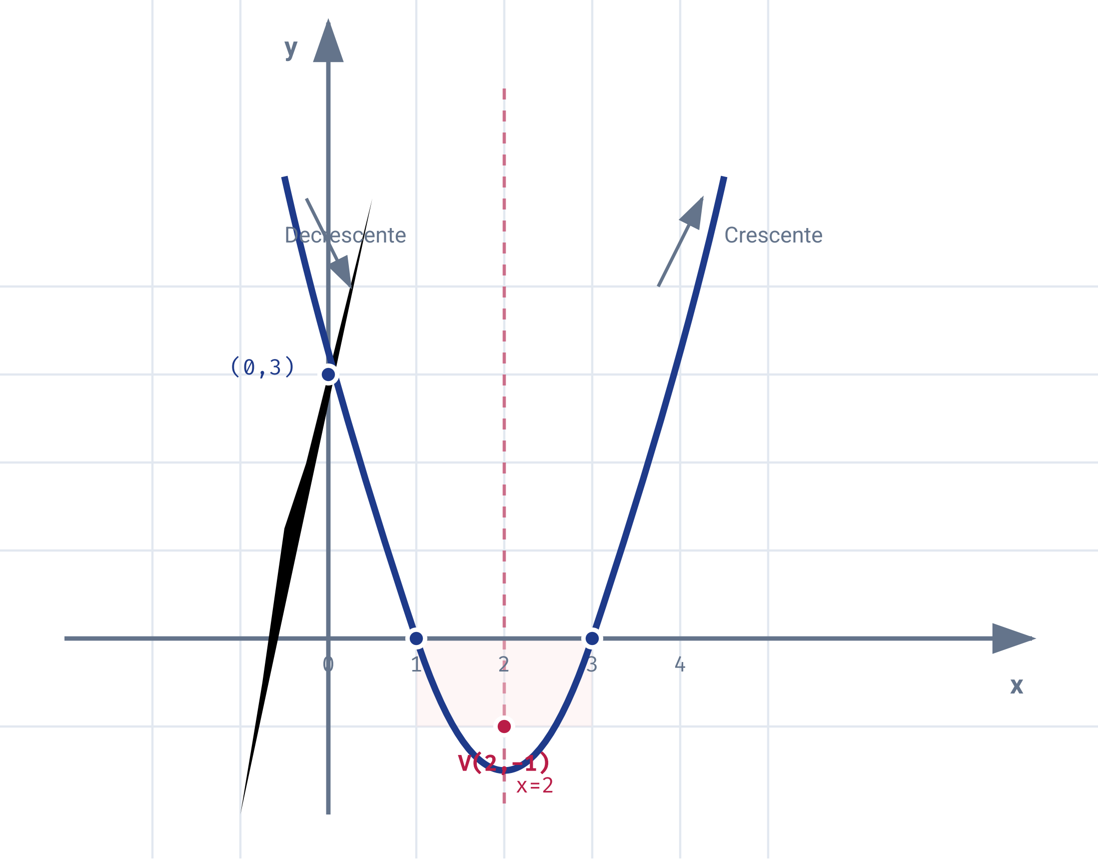
3. STUDIO QUALITATIVO

Dominio/Cod. D: $\mathbb{R}$, C: $[-1, +\infty)$

Segno ⊕ $x < 1 \lor x > 3$, ⊖ $1 < x < 3$

Monotonia ↘ $(-\infty, 2)$, ↗ $(2, +\infty)$

GRAFICO E SEGNO



La parabola è l'unica conica che può rappresentare una funzione y=f(x).

Funzioni Potenza x^n

Confronto Pari vs Dispari

U N Pari (es. x^2, x^4)

SIMMETRIA ASIALE

DOMINIO / CODOMINIO

$\mathbb{R} \to [0, +\infty)$

PARITÀ

Pari: $f(-x) = f(x)$

MONOTONIA

↘ $(-\infty, 0)$ ↗ $(0, +\infty)$

PUNTI NOTEVOLI

Minimo assoluto in $x=0$

N Dispari (es. x^3, x^5)

SIMMETRIA CENTRALE

DOMINIO / CODOMINIO

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PARITÀ

Dispari: $f(-x) = -f(x)$

MONOTONIA

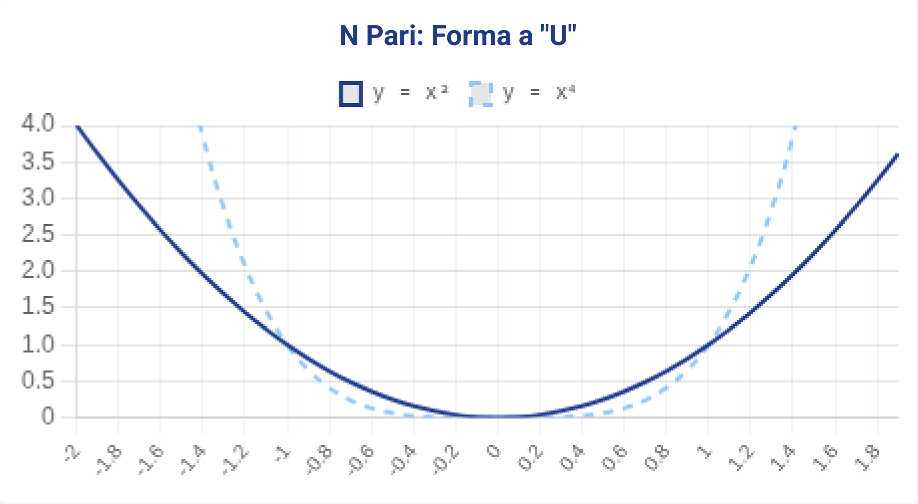
Crescente su tutto $\mathbb{R}$

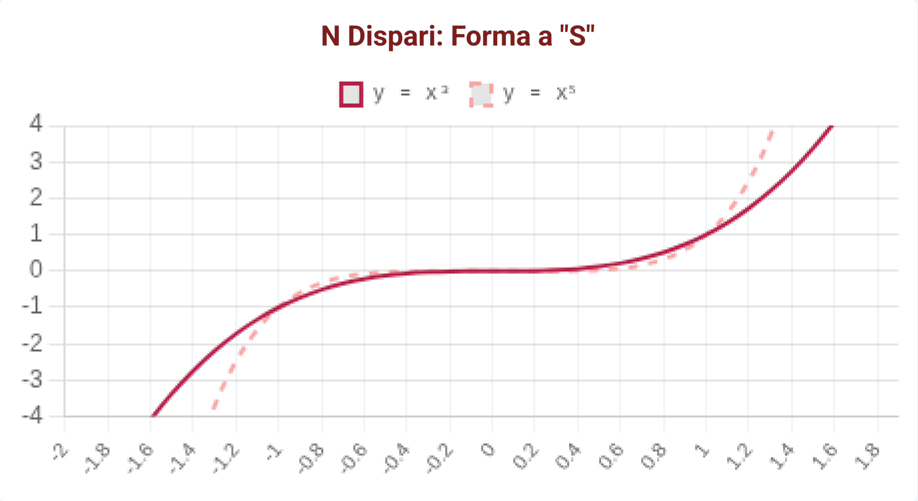
PUNTI NOTEVOLI

Flesso in $(0,0)$

NOTA SULLA CRESCITA

Per $|x| > 1$, la crescita è più rapida per n maggiore. Per $|x| < 1$, la curva si "appiattisce" di più verso l'asse x al crescere di n.





Funzioni Radice $x^{(1/n)}$

Proprietà e Grafici

Indice Pari (es. $f(x) = \sqrt{x}$)

N PARI

- **Dominio:** $[0, +\infty)$
- **Codominio:** $[0, +\infty)$
- **Monotonia:** Strettamente crescente
- **Concavità:** Verso il basso (concava)
- **Punti notevoli:** (0,0), (1,1)
- **Derivata:** $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$
- **In x=0:** Non derivabile (tangente verticale)

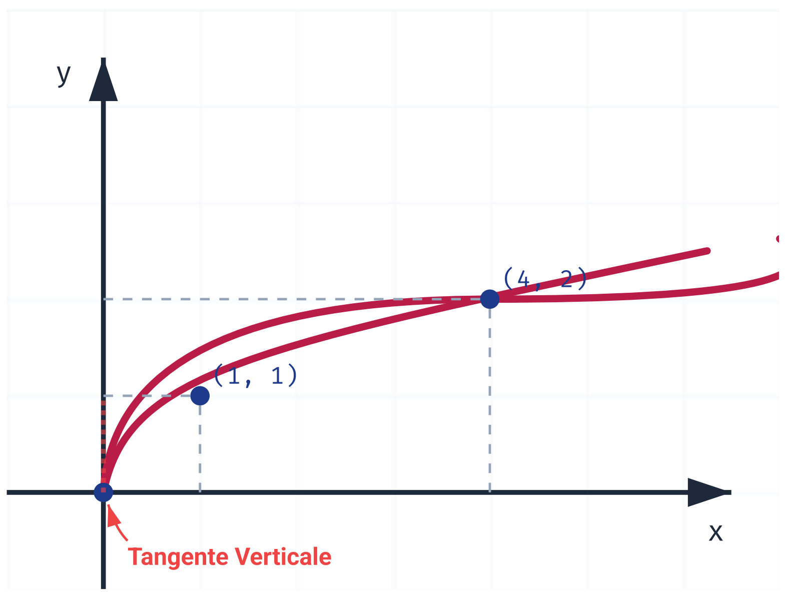
Indice Dispari (es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$)

N DISPARI

- **Dominio:** $\mathbb{R}$ $(-\infty, +\infty)$
- **Codominio:** $\mathbb{R}$
- **Simmetria:** Dispari (simm. rispetto origine)
- **Derivata:** $f'(x) = 1/(3x^{(2/3)})$
- **In x=0:** Non derivabile (flesso a tangente vert.)

Studio rapido di $f(x) = \sqrt{x}$:
La funzione parte dall'origine con pendenza infinita (verticale) e cresce sempre più lentamente. Passa per (1,1) e (4,2). La tangente in x=0 è l'asse y.

GRAFICO FUNZIONE RADICE QUADRATA



OSSERVAZIONE IMPORTANTE
La crescita della funzione radice rallenta progressivamente ma non si ferma mai. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Nota: La funzione $\sqrt{x}$ è l'inversa di x^2 limitata a $[0, +\infty)$.

Funzione Valore Assoluto

Grafico a "V" e Non Derivabilità

Definizione e Proprietà

BASE

$$f(x) = |x| = \{ x \text{ se } x \geq 0 \; ; \; -x \text{ se } x < 0 \}$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Codominio: $[0, +\infty)$

Parità: PARI (Simmetria asse y)

Zeri: $x = 0$ (Vertice)

Monotonia: ↘ $(-\infty, 0)$ ↗ $(0, +\infty)$

Continuità: Continua ovunque

Derivabilità (Punto Angoloso)

ATTENZIONE

La funzione **NON è derivabile in x = 0**. Il grafico presenta un "angolo".

$$f'(x) = \{ 1 \text{ se } x > 0 \; ; \; -1 \text{ se } x < 0 \}$$

Limite destro (1) ≠ Limite sinistro (-1) della derivata in 0.

Esempio: Traslazione

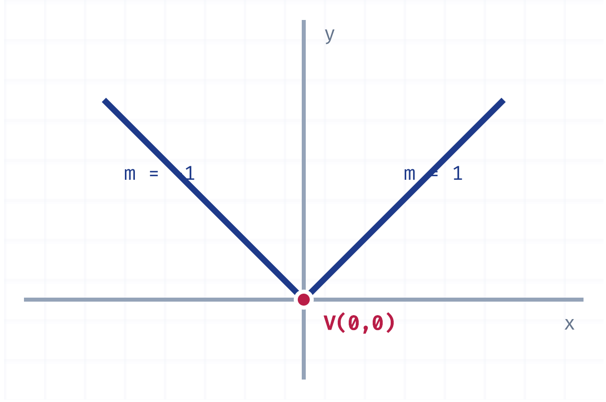
APPLICAZIONE

Studio di g(x) = |x - 2|

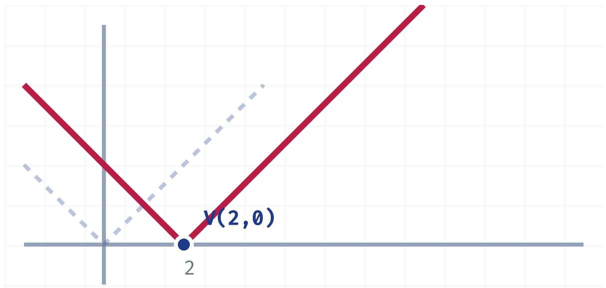
$$g(x) = \{ x-2 \text{ se } x \geq 2 \; ; \; 2-x \text{ se } x < 2 \}$$

Vertice in V(2, 0). Positiva ovunque tranne in x=2.

GRAFICO F(X) = |X|



TRASLAZIONE G(X) = |X - 2|



Il valore assoluto rende positivi i tratti negativi del grafico "ribaltandoli" rispetto all'asse x.

Funzione Esponenziale $f(x) = a^x$

$a > 0,\ a \neq 1$

i Proprietà Generali

BASE

- **Dominio:** ℝ(tutti i reali)
- **Codominio:** $(0,\ +\infty)$(solo positivi)
- **Intersezione:** Passa sempre per **$(0,\ 1)$**poiché $a^0 = 1$
- **Caratteristiche:** Continua, Derivabile, Iniettiva, Invertibile

Caso $a > 1$ (es. e^x)

Crescente su tutto ℝ

$\lim(x \to +\infty) = +\infty$ (diverge)
$\lim(x \to -\infty) = 0^+$ (asintoto y=0)

Caso $0 < a < 1$ (es. $(½)^x$)

Decrescente su tutto ℝ

$\lim(x \to +\infty) = 0^+$ (asintoto y=0)
$\lim(x \to -\infty) = +\infty$ (diverge)

Calcolo e Derivate

FORMULE

ALGEBRA POTENZE

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

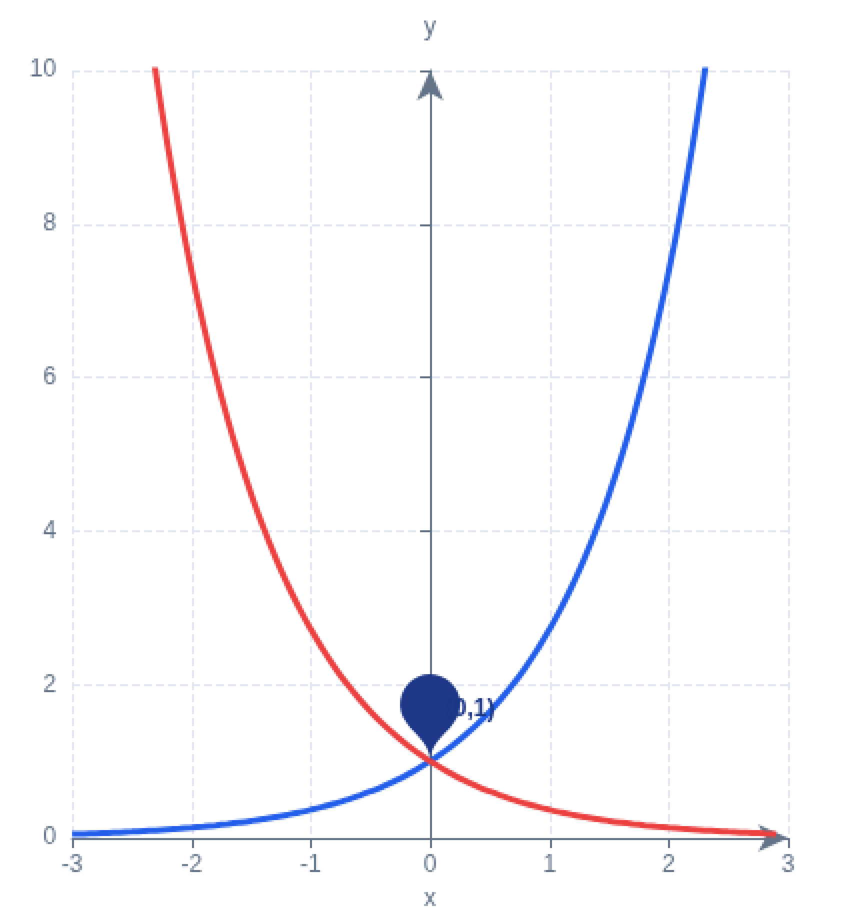
DERIVATE FONDAMENTALI

$D(e^x) = e^x$

$D(a^x) = a^x \cdot \ln(a)$

CONFRONTO GRAFICO

● $y = e^x$ ● $y = e^{-x}$



L'asse x (y=0) è asintoto orizzontale per entrambe.

Funzione Logaritmo: $f(x) = \log_a(x)$

Inversa dell'esponenziale

Proprietà Generali

BASE

Dominio	$(0, +\infty)$	Codominio	$\mathbb{R}$
Punto fisso	$(1, 0)$	Asintoto	Vert. $x = 0^+$
Caratteristiche	Iniettiva, Suriettiva, Inversa di a^x		

Caso $a > 1$ (es. ln x)

- Funzione **Crescente**
- $\lim_{x \to 0^+} = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$

Caso $0 < a < 1$

- Funzione **Decrescente**
- $\lim_{x \to 0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} = -\infty$

Algebra dei Logaritmi

$\log(xy) = \log x + \log y$	$\log(x/y) = \log x - \log y$
$\log(x^r) = r \cdot \log x$	$\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$

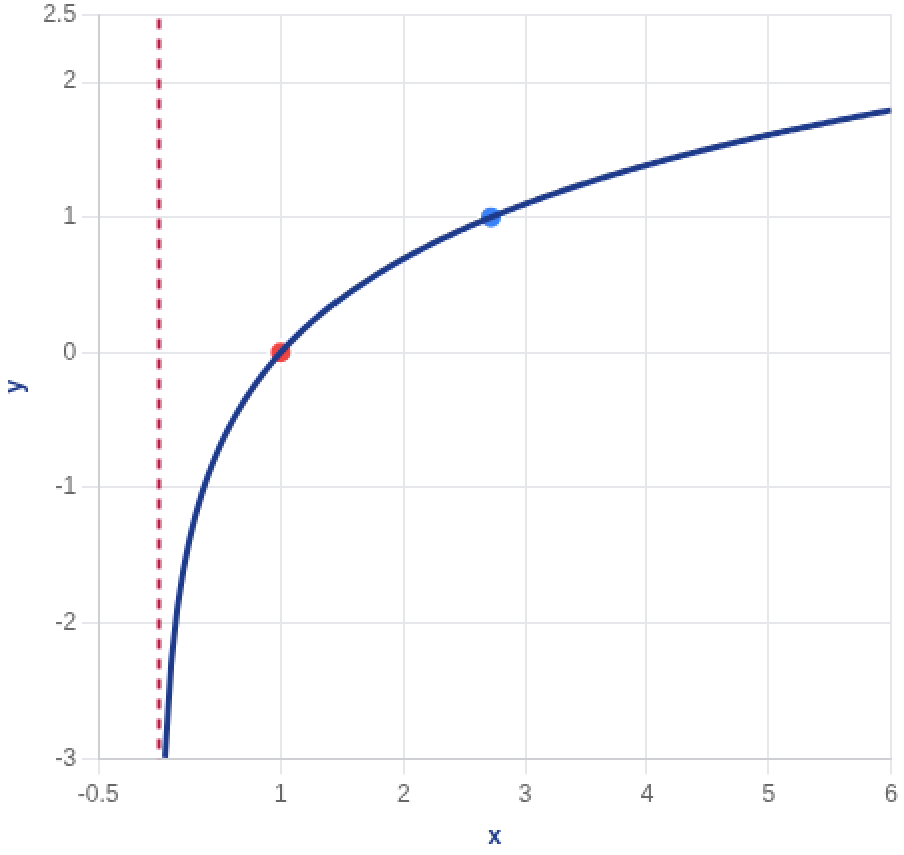
Derivata

Fondamentale per lo studio di funzione

$$(\ln x)' = 1/x$$

$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$$

Grafico di f(x) = ln(x) (Base e > 1)



Punto notevole (1, 0)   Punto notevole (e, 1)

Crescita lenta ma illimitata verso +∞

Esponenziali e Logaritmi

Legami, Equazioni e Disequazioni

Relazioni Fondamentali

RELAZIONI INVERSE

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$$

$$\log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

EQUAZIONI

$$a^x = b \iff x = \log_a b \quad (b > 0)$$

$$\log_a x = k \iff x = a^k$$

DISEQUAZIONI

Se $a > 1$

PRESERVA

$$a^x > a^y \iff x > y$$

$$\log_a x > \log_a y \iff x > y$$

Se $0 < a < 1$

INVERTE

$$a^x > a^y \iff x < y$$

$$\log_a x > \log_a y \iff x < y$$

Le proprietà dei logaritmi semplificano notevolmente i calcoli

Esempi Svolti

Equazione Esponenziale

$e^{2x} = 5$ → $2x = \ln 5$ → $\boxed{x = \frac{\ln 5}{2}}$

Equazione Logaritmica (Definita per $x > 1$)

$\log_3(x - 1) = 2$ → $x - 1 = 3^2 = 9$ → $\boxed{x = 10}$

Disequazione **Base $2 > 1$ (Preserva)**

$2^x > 8$ → $2^x > 2^3$ → $\boxed{x > 3}$

Strategia: Per le equazioni, cercare di portare entrambi i membri alla stessa base. Per le disequazioni, controllare sempre se la base è maggiore o minore di 1.

Seno e Coseno

Proprietà e Grafici

IDENTITÀ FONDAMENTALE $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Funzione Seno (sin x)

DISPARI

Dominio: ℝ
Codominio: $[-1, 1]$
Periodo: 2π
Simmetria: $\sin(-x) = -\sin(x)$
Derivata: $(\sin x)' = \cos x$
Zeri: $x = k\pi$

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin x	0	1/2	√2/2	√3/2	1

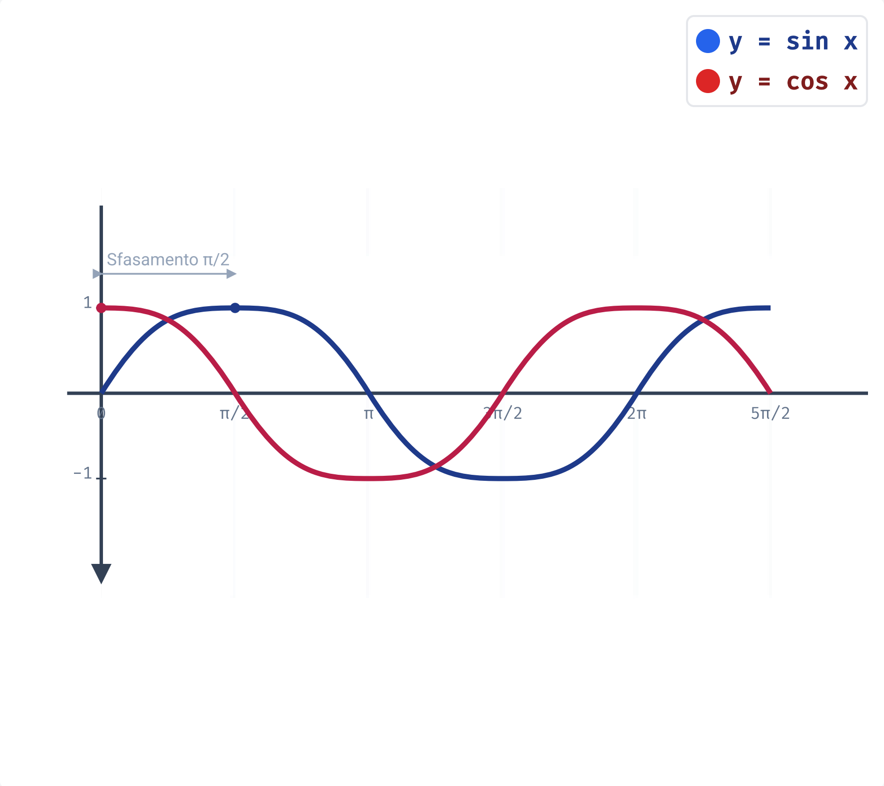
Funzione Coseno (cos x)

PARI

Dominio: ℝ
Codominio: $[-1, 1]$
Periodo: 2π
Simmetria: $\cos(-x) = \cos(x)$
Derivata: $(\cos x)' = -\sin x$
Zeri: $x = \pi/2 + k\pi$

Max: $x = 2k\pi$ **Min:** $x = \pi + 2k\pi$

CONFRONTO GRAFICO



Seno: Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine), parte da 0.

Coseno: Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y), parte da 1 (massimo).

Nota: Entrambe le funzioni sono continue, derivabili su tutto ℝ e limitate tra -1 e 1.

Funzione Tangente: $\tan(x)$

Proprietà e Grafico

Definizione e Dominio

FONDAMENTALI

DEFINIZIONE

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

CODOMINIO

$\mathbb{R}$ (tutti i reali)

DOMINIO

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Esclude punti dove cos(x) = 0

Proprietà Geometriche

ANALISI

- **Periodicità:** $T = \pi$ (si ripete ogni 180°)
- **Parità:** Dispari $\tan(-x) = -\tan x$ (simmetria rispetto all'origine)
- **Asintoti Verticali:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- **Monotonia:** Crescente in ogni intervallo del dominio

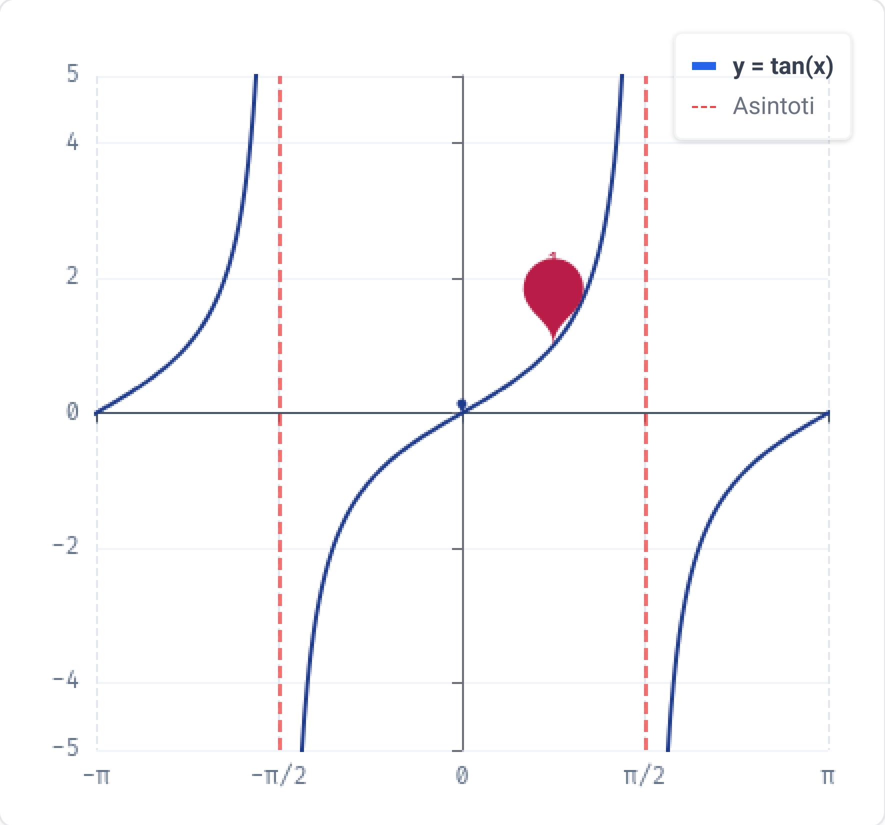
Derivata e Valori Notevoli

DERIVATA PRIMA

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

VALORI CHIAVE

$\tan(0)=0$ $\tan(\frac{\pi}{4})=1$ $\tan(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$



Osservazione

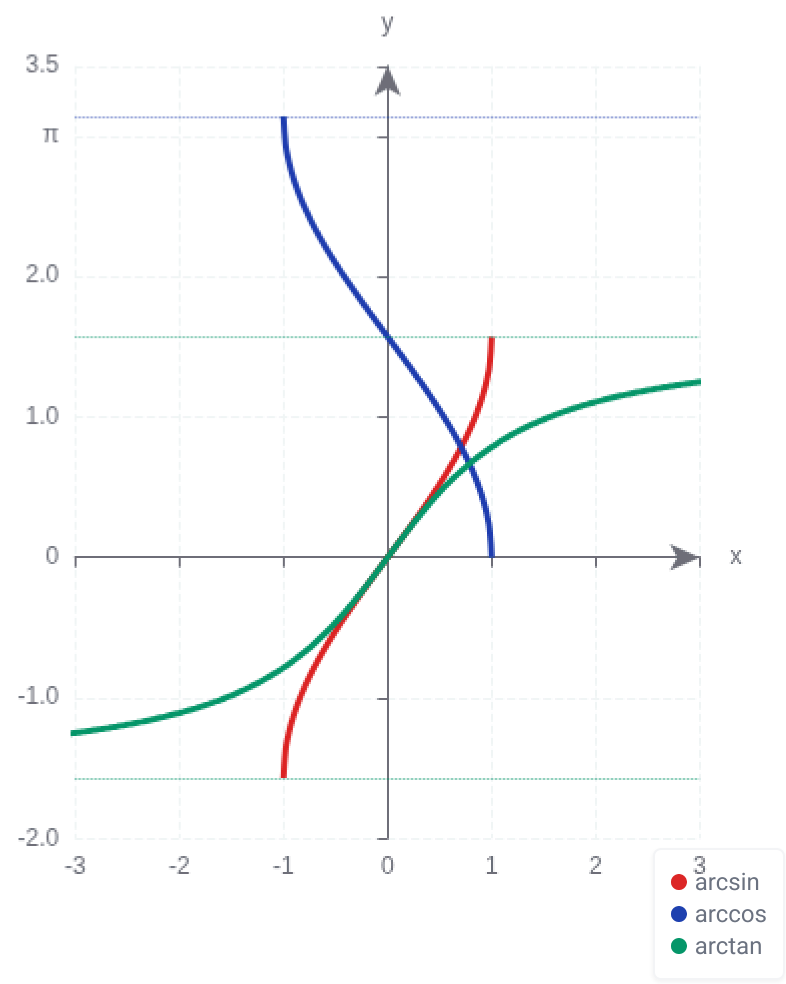
A differenza di seno e coseno, la tangente non è limitata. Tende a $+\infty$ avvicinandosi a $\pi/2$ da sinistra e a $-\infty$ da destra.

Esercizio: Studiare il segno di $\tan(2x)$ nell'intervallo [0, π].

Funzioni Inverse Trigonometriche

Arcsin, Arccos, Arctan

FUNZIONE	DOM / CODOM	PROPRIETÀ	DERIVATA
$\sin^{-1}$ **arcsin(x)** Inversa del seno	D: $[-1, 1]$ C: $[-\pi/2, \pi/2]$	DISPARI CRESCENTE Passa per (0,0) $\lim_{x\to\pm1} = \pm\pi/2$	$1/\sqrt{(1-x^2)}$
$\cos^{-1}$ **arccos(x)** Inversa del coseno	D: $[-1, 1]$ C: $[0, \pi]$	NÉ PARI/DISPARI DECRESCENTE arccos(1)=0, arccos(-1)=π	$-1/\sqrt{(1-x^2)}$
$\tan^{-1}$ **arctan(x)** Inversa della tangente	D: $\mathbb{R}$ C: $(-\pi/2, \pi/2)$	DISPARI CRESCENTE Asintoti: $y = \pm\pi/2$	$1/(1+x^2)$



Nota: Le funzioni inverse sono definite restringendo il dominio delle funzioni trigonometriche originali.

Esercizi Svolti: Domini e Grafici

Riepilogo Pratico

E1: Dominio Funzione Irrazionale Fratta

DOMINIO

$f(x) = \sqrt{(x-1)} / (x^2-4)$

- **Numeratore (Radice):** $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
- **Denominatore:** $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$
- **Combinazione:** Intersezione tra $[1, +\infty)$ e $x \neq 2$ (nota: -2 è già escluso).

Risultato: D = [1, +∞) \ {2}

E2: Grafico con Traslazione

GRAFICO

$g(x) = |x - 2|$

- Funzione base: $y = |x|$ (forma a V con vertice in 0,0).
- Trasformazione: $f(x-k)$ con $k=2 \Rightarrow$ Traslazione orizzontale a **destra** di 2.
- Nuovo vertice: $V(2, 0)$.
- Pendenza rami: $m = \pm 1$.

E3: Studio del Segno

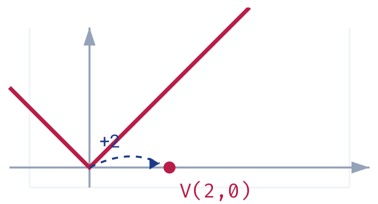
SEGNO

$h(x) = (x-1)(x+2)^2e^x$

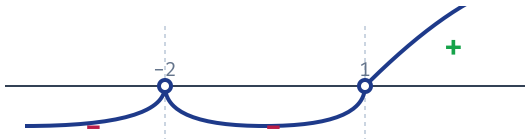
- **Fattori sempre positivi:** $e^x > 0$ sempre; $(x+2)^2 \geq 0$ (nullo in -2).
- **Fattore determinante:** Il segno dipende solo da $(x-1)$.

VISUALIZZAZIONE DOMINIO E1

GRAFICO G(X) = |X - 2|



SCHEMA DEL SEGNO H(X)



Dominio di una Funzione

Strategie e Metodi

Funzioni Fratte

REGOLA

Il denominatore deve essere diverso da zero per evitare divisioni impossibili.

Esempio: $f(x) = 1/(x-2) \rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Radici di Indice Pari

REGOLA

Il radicando deve essere maggiore o uguale a zero (nei numeri reali).

Esempio: $f(x) = \sqrt{(3-x)} \rightarrow 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$

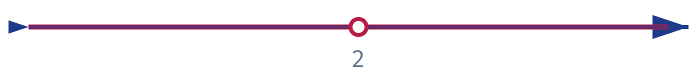
Logaritmi

REGOLA

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo.

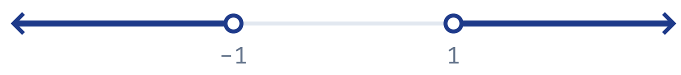
Esempio: $f(x) = \ln(x^2-1) \rightarrow x^2 - 1 > 0$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$



RAPPRESENTAZIONE GRAFICA $D = (-\infty, 3]$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA $X < -1 \vee X > 1$



Nota: Nelle funzioni composte, bisogna mettere a sistema tutte le condizioni di esistenza.

Simmetria e Periodicità

Funzioni Pari

- Definizione algebrica: $f(-x) = f(x)$ per ogni x nel dominio.
- Interpretazione geometrica: il grafico è simmetrico rispetto all'**asse y** (asse delle ordinate).
- Il semipiano destro è l'immagine speculare del sinistro.
- **Esempi notevoli:**
  - $y = x^2$ *(Parabola)*
  - $y = \cos(x)$
  - $y = |x|$

Funzioni Dispari

- Definizione algebrica: $f(-x) = -f(x)$ per ogni x nel dominio.
- Interpretazione geometrica: il grafico è simmetrico rispetto all'**origine O(0,0)**.
- Corrisponde a una rotazione di 180° attorno all'origine.
- **Esempi notevoli:**
  - $y = x^3$
  - $y = \sin(x)$
  - $y = \tan(x)$

Periodicità e Test

- **Periodicità:** $f(x+T) = f(x)$ dove T è il periodo minimo positivo.
- Il grafico si ripete identico a intervalli di ampiezza T.
- **Test rapidi:** Sostituire -x a x nell'espressione analitica.
- **Conseguenze grafiche:** Permette di studiare la funzione solo in $[0, +\infty)$ o in un periodo, per poi estendere il grafico.

Intersezioni e Studio del Segno

Intersezioni Assi

- **Asse Y:** Si calcola il valore `f(0)` (se 0 ∈ Dominio). Esiste al più una sola intersezione.
- **Asse X (Zeri):** Si risolve l'equazione `f(x) = 0`.
- I punti trovati sono "ancoraggi" fondamentali per il disegno del grafico.
- Attenzione alla molteplicità delle radici (intersezione vs tangenza).

Studio Disequazione

- Impostare la disequazione `f(x) > 0`.
- Determinare gli intervalli di positività (+) e negatività (-).
- Considerare sempre il **Dominio** della funzione nell'analisi.
- Identificare eventuali punti di discontinuità che spezzano gli intervalli.

Grafico & Tabella

- **Tabella dei segni:** Sintetizza zeri, discontinuità e segno in modo visivo.
- **Cancellazione regioni:** Se $f(x) > 0$, si oscura la parte sotto l'asse x.
- **Visualizzazione:** Se $f(x) < 0$, la curva passa sotto l'asse x (si oscura sopra).
- Verifica di coerenza con i limiti e le intersezioni trovate.

Limiti: Definizioni e Proprietà

Definizione di Limite (ε-δ)

lim f(x) = L

Si dice che $f(x)$ tende a L per $x \to x_0$ se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{Dom}(f),$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limiti Destro e Sinistro

Limite Destro ($x \to x_0^+$)

Avvicinamento da valori $x > x_0$.

Limite Sinistro ($x \to x_0^-$)

Avvicinamento da valori $x < x_0$.

Il limite esiste se e solo se lim destro e sinistro coincidono.

Teorema dei "Due Carabinieri"

Confronto

Date tre funzioni $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ in un intorno di x_0:

Se $\lim g(x) = \lim h(x) = L$ $\Rightarrow \lim f(x) = L$

Algebra dei Limiti

- + **Somma:** $\lim (f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
- × **Prodotto:** $\lim (f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
- ÷ **Quoziente:** $\lim (f / g) = \lim f / \lim g$ ($\lim g \neq 0$)

⚠️ Attenzione alle forme indeterminate (es. ∞-∞, 0/0, ∞/∞)

Proprietà Fondamentali

- **Unicità del Limite**
  Se il limite esiste, è unico.
- **Permanenza del Segno**
  Se $\lim f(x) = L \neq 0$, $f(x)$ ha lo stesso segno di L in un intorno di x_0.
- **Limitatezza Locale**
  Se f ha limite finito, è limitata in un intorno di x_0.

Concetto ε-δ

δ

Continuità e Discontinuità

Concetto di Continuità

- Definizione Puntuale:

  Una funzione \(f \) è continua in \(x_0 \) se:
  $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Il limite sinistro e il limite destro coincidono con il valore della funzione.
- **Continuità su intervallo:** La funzione è continua in ogni punto dell'intervallo (grafico tracciabile senza staccare la penna).

Tipi di Discontinuità

- **Eliminabile (III Specie)**
  Il limite finito esiste, ma è diverso da \(f(x_0) \) oppure \(f \) non è definita nel punto.
- **Prima Specie (A salto)**
  Esistono finiti i limiti destro e sinistro, ma sono diversi tra loro.
- **Seconda Specie (Essenziale)**
  Almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) non esiste o è infinito.

Teoremi Fondamentali

- **Teorema di Weierstrass**
  Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato [a,b] ammette massimo e minimo assoluti.
- **Teorema di Bolzano (degli Zeri)**
  Se \(f \) è continua in [a,b] e \(f(a) \cdot f(b) < 0 \), esiste almeno un punto \(c \) dove \(f(c) = 0 \).
- **Teorema dei Valori Intermedi**
  Una funzione continua assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.

Tecniche di Calcolo dei Limiti

Limiti Notevoli e Strategie Risolutive

Limiti Notevoli Fondamentali

GONIOMETRICO

x → 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Base per tutti i limiti trigonometrici.

DEFINIZIONE DI 'E'

x → ∞ / x → 0

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

LOG & EXP

x → 0

$$\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Strategie di Risoluzione

Teorema di De L'Hôpital

Per forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Gerarchia degli Infiniti

Confronto per $x \to +\infty$:

$$\ln x \ll x^\alpha \ll a^x \ll x^x$$
$$(\alpha > 0, a > 1)$$

Manipolazione Algebrica

Razionalizzazione:

Per forme $\infty - \infty$ o $0/0$ con radici, usare il coniugato $(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})$.

Fattorizzazione:

Raccogliere i termini di grado massimo o semplificare polinomi.

Sostituzioni ed Equivalenze

- Cambio di variabile per semplificare il limite
- Sostituzione infinitesimi (Principio di sostituzione)
- $\sin f(x) \sim f(x)$ se $f(x) \to 0$

Nota: Le equivalenze asintotiche (o-piccolo) sono valide solo all'interno di prodotti o quozienti, non nelle somme algebriche dove i termini si cancellano.

Questi limiti sono strumenti essenziali per lo studio del comportamento asintotico delle funzioni.

Derivata: Concetti Base

Definizioni e Significato

Definizione di Derivata

$f'(x_0)$

La derivata di una funzione f in un punto x_0 è il limite del rapporto incrementale per l'incremento che tende a zero.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} [\, f(x_0+h) - f(x_0)\,] / h$$

Proprietà Fondamentali

Derivabilità ⇒ Continuità

Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0. Il viceversa non vale (es. |x| in 0).

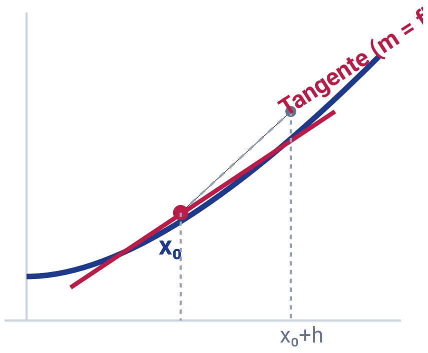
Regola della Catena

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivata Funzione Inversa

$(f^{-1})'(y_0) = 1 / f'(x_0)$ *con* $y_0 = f(x_0)$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Coefficiente Angolare (m)

La derivata $f'(x_0)$ rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico nel punto x_0.

Significato Fisico

Se f(t) è la posizione al tempo t, f'(t) è la **velocità istantanea** v(t).

Il concetto di derivata è centrale nell'analisi matematica e nelle applicazioni ingegneristiche.

Regole di Derivazione e Teoremi

Formulario Essenziale

Derivate Elementari

Potenza $(x^n)' = nx^{n-1}$

Esp. $(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$

Log. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Sin/Cos $(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

Tan/Arctan $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Nota: *$|x|$ non è derivabile in $x = 0$.*

Algebra delle Derivate

PRODOTTO (LEIBNIZ)

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

QUOZIENTE

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

REGOLA DELLA CATENA (FUNZIONI COMPOSTE) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Teoremi e Sviluppi

Teorema di De L'Hôpital

Per forme indeterminate $0/0$ o ∞/∞

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Formula di Taylor (Linearizzazione)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Approssimazione locale di ordine 2.

La conoscenza a memoria delle derivate elementari è prerequisito per l'esame.

Procedura Completa

Roadmap analitica step-by-step

1 Dominio e Simmetrie

Determinare il campo di esistenza (C.E.) e verificare eventuali proprietà di parità.

`f(-x) = ±f(x)?` `f(x+T) = f(x)?`

2 Intersezioni e Segno

Trovare i punti di intersezione con gli assi e studiare la positività della funzione.

`f(x) ≥ 0` `f(x) = 0`

3 Limiti e Asintoti

Calcolare i limiti agli estremi del dominio per individuare asintoti verticali, orizzontali o obliqui.

$x \to x_0$ $x \to \pm\infty$

4 Monotonia (Derivata I)

Studiare il segno della derivata prima per trovare intervalli di crescenza e punti di estremo.

`f'(x) > 0 ↗` `Max/Min`

5 Concavità (Derivata II)

Analizzare la derivata seconda per determinare concavità, convessità e punti di flesso.

`f''(x) > 0 ∪` `Flessi`

6 Grafico Finale

Unire tutte le informazioni raccolte per tracciare il grafico qualitativo della funzione.

`Plot y=f(x)`

Esempio Guida: $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Procedimento e Grafico

1. Dominio, Segno & Limiti

ANALISI

Dominio: $D = \mathbb{R}$ (continua ovunque)

Segno: $f(x) > 0$ per $x > 0$, passa per $O(0,0)$

Limiti: lim_{x→-∞} f(x) = -∞
lim_{x→+∞} f(x) = 0^+ (Asintoto y=0)

2. Derivata Prima & Monotonia

MAX/MIN

f'(x): $e^{-x}(1 - x)$

Crescenza: $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

Punto di Massimo Assoluto: $M(1, 1/e) \approx (1, 0.37)$

3. Derivata Seconda & Convessità

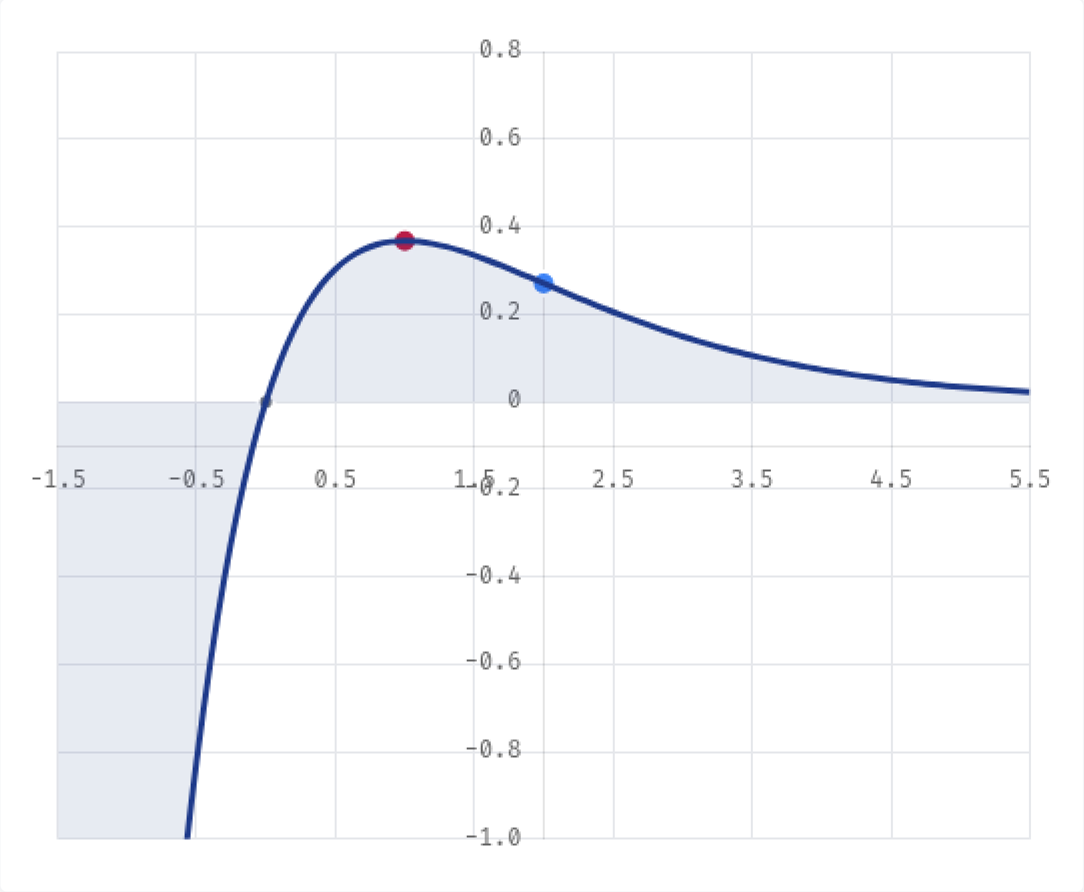
FLESSI

f''(x): $e^{-x}(x - 2)$

Segno: Concava ∩ per $x < 2$, Convessa ∪ per $x > 2$

Punto di Flesso: $F(2, 2/e^2) \approx (2, 0.27)$

GRAFICO QUALITATIVO



Massimo (1, 1/e)
Flesso (2, 2/e²)
Asintoto y=0

Concetti e Tecniche

Concetti Fondamentali

- **Integrale di Riemann:** Definizione come limite di somme (area del sottografico).
- **Proprietà di Linearità:** $\int(af+bg) = a\int f + b\int g$.
- **Additività:** Rispetto all'intervallo di integrazione.
- **Teorema Fondamentale:** Legame derivata-integrale. Se $F' = f$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Tecniche di Integrazione

- **Sostituzione:** Metodo della funzione composta $\int f(g(x))g'(x)dx$.
- **Integrazione per Parti:** Formula derivata dal prodotto $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.
- **Funzioni Razionali:** Decomposizione in fratti semplici (metodo A, B, C...).
- Integrazione di funzioni trigonometriche e irrazionali standard.

Integrali Impropri

- **Intervalli Illimitati:** Definizione di convergenza su $[a, +\infty)$.
- **Funzioni Illimitate:** Integrazione vicino ad asintoti verticali.
- **Criteri di Convergenza:** Confronto e confronto asintotico per serie e integrali.
- Calcolo di aree per regioni geometriche illimitate.

PROGRAMMA DEL CORSO

Sintesi Capitoli 7-10

Analisi Matematica I

Equazioni Differenziali

- **1° Ordine Separabili:**
  Forma $dy/dx = g(x)h(y)$.
- **1° Ordine Lineari:**
  Forma $y' + a(x)y = b(x)$.
- **Problema di Cauchy:**
  Soluzione unica con condizione iniziale.
- **2° Ordine Coeff. Costanti:**
  Forma $ay'' + by' + cy = 0$.

Funzioni Più Variabili

- Limiti e continuità in $\mathbb{R}^2$.
- **Derivate Parziali:**
  Rispetto a x ($\partial f/\partial x$) e y ($\partial f/\partial y$).
- **Gradiente:**
  Vettore ∇f (direzione massima crescita).
- **Teorema di Schwarz:**
  Simmetria $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$.

Ottimizzazione e Integrali

- **Estremi Liberi:**
  Punti con $\nabla f = 0$ e test Hessiana.
- **Integrali Multipli:**
  Integrali doppi ($\iint$) e tripli ($\iiint$).
- **Teorema di Fubini:**
  Riduzione a integrali iterati.
- **Applicazioni:**
  Calcolo di volumi e aree di superfici.

Primitive Fondamentali

Definizioni e Proprietà

PRIMITIVA

Una funzione $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ se:

$$F'(x) = f(x)$$

Integrale indefinito:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

LINEARITÀ

$$\int (af(x) + bg(x))dx$$
$$= a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Vale per ogni costante $a, b \in \mathbb{R}$.

Integrali Elementari

POTENZA

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

per $n \neq -1$

LOGARITMO

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

ESPONENZIALE E

$$\int e^x dx = e^x + C$$

ESPONENZIALE A

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

SENO

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

COSENO

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

DERIVATA DELLA TANGENTE

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad | \quad \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + C$$

Ricorda sempre di aggiungere la costante di integrazione $+C$ per gli integrali indefiniti.

Metodo di Sostituzione

Cambio di Variabile

TEOREMA

Se $u = g(x)$ è una funzione derivabile la cui immagine è un intervallo I e f è continua su I:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Procedura Operativa

ALGORITMO

1. **Scegliere u = g(x)**: Cerca una funzione interna la cui derivata sia presente come fattore nell'integrando.
2. **Calcolare du**: Trova $du = g'(x)dx$.
3. **Esprimere in u**: Sostituisci tutte le occorrenze di x con u.
4. **Cambiare estremi** (opzionale per definiti): Se $a \le x \le b$, allora $g(a) \le u \le g(b)$.
5. **Integrare e Risostituire**: Trova la primitiva in u e torna alla variabile x.

ESEMPIO 1: FUNZIONE RAZIONALE

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

SOSTITUZIONE:

$u = 1 + x^2$ $\quad du = 2x\,dx$

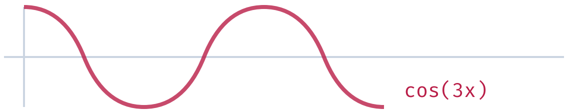
$$\int 1/u\,du = \ln|u| + C$$

RISOSTITUZIONE: $\ln(1+x^2) + C$

ESEMPIO 2: COMPRESSIONE D'ONDA

$$\int \cos(3x)\,dx$$

u=3x, du=3dx



1/3 fattore scala $\quad 1/3 \sin(3x) + C$

Nota: Il differenziale dx non è solo un simbolo, ma parte integrante del calcolo.

Integrazione per Parti

Tecniche e Strategie

Formula Fondamentale

DEFINIZIONE

Deriva dalla regola di derivazione del prodotto: $(uv)' = u'v + uv'$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Strategia LIATE

PRIORITÀ SCELTA "U"

ORDINE DI PRIORITÀ (DALL'ALTO)

- **L** Logaritmi (ln x)
- **I** Inverse Trig (arctan x)
- **A** Algebriche (x^2, 3x)
- **T** Trigonometriche (sin x)
- **E** Esponenziali (e^x)

*"Scegliamo come **u** la funzione che appare prima nell'elenco LIATE, e il resto come **dv**."*

ESEMPIO BASE

$\int x\, e^x\, dx \rightarrow$ $u = x,\ dv = e^x dx$; $du = dx,\ v = e^x$ $= x\,e^x - e^x + C$

METODO TABULARE

Ottimo per integrazioni ripetute (es. polimomio × esponenziale/seno)

Esempio: $\int x^2 e^x\, dx$

+/-	Derivata (u)	Integrale (dv)
+	x^2	e^x
-	$2x$	e^x
+	2	e^x
-	0	e^x

Risultato (somma dei prodotti diagonali)

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Funzioni Razionali e Frazioni Parziali

Schemi di Decomposizione

LINEARI DISTINTI

$(x - r_1)(x - r_2)$

$$\frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \dots$$

Per ogni fattore del denominatore.

LINEARI RIPETUTI

$(x - r)^k$

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$$

Una frazione per ogni potenza da 1 a k.

QUADRATICI IRRID.

$\Delta < 0$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Numeratore di primo grado per denominatore di secondo.

Strategia ed Esempio Guida

1. Verifica Grado (Propria vs Impropria)

Se $\deg(\text{Num}) \geq \deg(\text{Den})$, eseguire prima la **divisione polinomiale**.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Esempio Risolto: Fattori Lineari Distinti

L'Integrale:

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x-2}\,dx$$

1. Fattorizzazione:

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

2. Impostazione:

$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}$

3. Calcolo Coefficienti:

$A(x+2) + B(x-1) = 3x + 5$

$\texttt{Per}\ \ x = 1 \implies 3A = 8 \implies A = 8/3$

$\texttt{Per}\ \ x = -2 \implies -3B = -1 \implies B = 1/3$

4. Integrazione:

$\frac{8}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$

La decomposizione semplifica l'integranda in termini elementari facilmente integrabili.

Integrali Impropri

Definizioni e Criteri di Convergenza

Tipo I: Intervallo Infinito

Illimitato

Integrale su un dominio non limitato [a, +∞).

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge → +\infty

Tipo II: Integrando Illimitato

Asintoto

f(x) ha un asintoto verticale in un estremo (es. in a).

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge → 2

Convergenza Fondamentale (p-test)

All'infinito [1, +∞)

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$

Converge se p > 1

Diverge se p ≤ 1

In zero (0, 1]

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$

Converge se p < 1

Diverge se p ≥ 1

Criteri del Confronto

CONFRONTO SEMPLICE

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$:
$\int g$ conv. $\Rightarrow \int f$ conv.
$\int f$ div. $\Rightarrow \int g$ div.

CONFRONTO ASINTOTICO

Se $f(x) \sim \frac{C}{x^p}$ (cioè $\lim \frac{f(x)}{1/x^p} = L \neq 0$):
L'integrale si comporta come $\int \frac{1}{x^p}dx$.

Questi concetti sono fondamentali per lo studio delle serie numeriche.

Equazioni Differenziali: Nozioni Base

Ordine e Definizione

ODE

Un'equazione che lega la variabile indipendente x, la funzione incognita $y(x)$ e le sue derivate y', ..., $y^{(n)}$. L'**ordine** è la derivata più alta presente.

```
Ex: y'' + 3y' + 2y = 0 (Ordine 2)
```

Soluzioni e Problema di Cauchy

Soluzione Generale: Famiglia di funzioni dipendente da n costanti arbitrarie (c_1, ..., c_n).

Soluzione Particolare: Si ottiene fissando le costanti tramite condizioni iniziali.

Problema di Cauchy (IVP):

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0 \quad \text{// Condizione Iniziale}$$

Teorema di Esistenza e Unicità

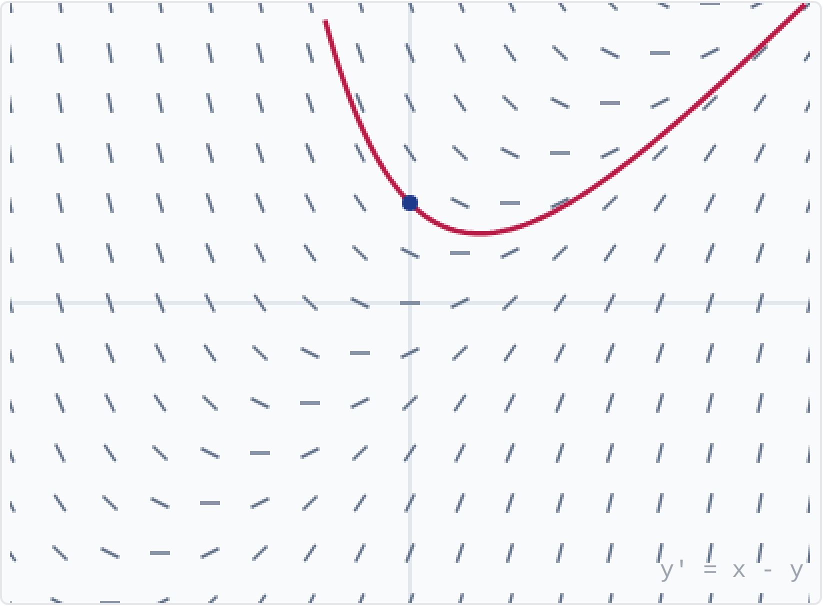
Picard-Lindelöf

Dato il problema di Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

- Se $f(x, y)$ è continua in un intorno di (x_0, y_0)
- E se f è **Lipschitziana** rispetto a y (derivata parziale limitata)

⇒ **Esiste un'unica soluzione locale $y(x)$ definita in un intervallo I contenente x_0.**

CAMPO DI DIREZIONE (SLOPE FIELD)



Interpretazione Geometrica: L'equazione $y' = f(x, y)$ assegna una pendenza a ogni punto del piano.

Le curve integrali (soluzioni) "fluiscono" seguendo questi segmenti tangenti. Il Teorema di unicità implica che le curve non si intersecano mai.

Concetto Chiave

La **Soluzione Generale** descrive l'intera famiglia di curve.
La **Condizione Iniziale** "seleziona" l'unica curva che passa per il punto (x_0, y_0).

Equazioni a Variabili Separabili

Metodo Risolutivo ed Esempio

Metodo di Separazione

PROCEDURA

Portare l'equazione nella forma standard e separare le variabili ai lati opposti dell'uguale.

1. Forma base: $y' = g(x) \cdot h(y)$
2. Separazione: $dy / h(y) = g(x)\, dx$
3. Integrazione: $\int (1/h(y))\, dy = \int g(x)\, dx$

Esempio Pratico

CALCOLO

Equazione: $y' = xy$

Integro: $\int dy/y = \int x\, dx \rightarrow \ln|y| = x^2/2 + C$

Generale: $y = K \cdot e^{(x^2/2)}$ (dove $K = \pm e^c$)

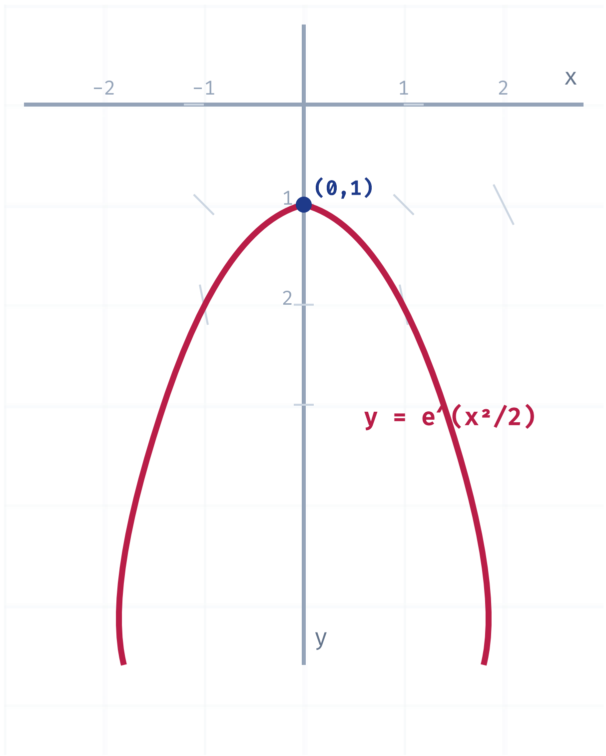
Problema di Cauchy

SOLUZIONE UNICA

Condizione: $y(0) = 1 \rightarrow 1 = K \cdot e^0 \Rightarrow K=1$

Soluzione Finale: $y = e^{(x^2/2)}$

CAMPO DIREZIONALE E SOLUZIONE



Le linee grigie indicano la pendenza (y' = xy)

Lineari del Primo Ordine

Metodo del Fattore Integrante

1 Forma Normale

Scrivere l'equazione nella forma standard isolando la derivata prima.

$$y' + a(x)y = b(x)$$

2 Fattore Integrante

Calcolare il fattore integrante $\mu(x)$ basato sul coefficiente di y.

$$\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$$

3 Formula Risolutiva

Applicare la formula generale per trovare la famiglia di soluzioni.

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x)\,dx + C \right]$$

ESEMPIO GUIDATO

Risolvere l'equazione:

$$y' - 2y = e^x$$

A. Identificazione coefficienti e calcolo $\mu(x)$

$a(x) = -2 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$

B. Applicazione formula risolutiva

$y = \frac{1}{e^{-2x}} \left[\int e^{-2x} \cdot e^x\,dx + C \right]$

C. Integrazione e semplificazione

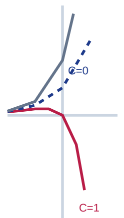
$y = e^{2x} \left[\int e^{-x}\,dx + C \right]$

$y = e^{2x} \left[-e^{-x} + C \right]$

SOLUZIONE GENERALE

$$y = C e^{2x} - e^x$$

Curve Integrali



Equazioni del Secondo Ordine

Omogenee: Radici Reali

Forma: `ay'' + by' + cy = 0`

Equazione caratteristica:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Caso 1: Δ > 0 (Radici distinte)

Due radici reali $r_1 \neq r_2$

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

Caso 2: Δ = 0 (Radice doppia)

Una radice reale $r_1 = r_2 = r$

$$y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$$

Omogenee: Radici Complesse

Se $\Delta < 0$, le soluzioni sono complesse coniugate:

$$r = \alpha \pm i\beta$$

Soluzione Generale

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos \beta x + C_2\sin \beta x)$$

α determina la crescita o il decadimento (smorzamento).

β determina la frequenza di oscillazione.

Non Omogenee

Forma: `ay'' + by' + cy = f(x)`

Struttura della Soluzione

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

y_h: soluzione omogenea associata
y_p: soluzione particolare

Metodi Risolutivi

- Coefficienti Indeterminati (per f(x) polinomi, exp, sin/cos)
- Variazione delle Costanti (metodo generale)

Domini, Curve di Livello e Superfici

Domini in $\mathbb{R}^2$

- **Rettangoli:** Prodotti cartesiani di intervalli $[a,b] \times [c,d]$.
- **Dischi e Corone:** Definiti da distanze dall'origine (es. $x^2+y^2 \le R^2$).
- **Regioni semplici:**
  - Tipo I (y-semplici): y compresa tra due funzioni di x.
  - Tipo II (x-semplici): x compresa tra due funzioni di y.

Curve di Livello

- **Definizione:** L'insieme dei punti (x,y) tali che $f(x,y) = k$ per una costante k.
- **Significato:** Rappresentano linee di quota costante (come nelle carte topografiche).
- **Proprietà:** Più le curve sono vicine, più la superficie è ripida.
- Utili per visualizzare funzioni 3D su un piano 2D.

Grafici e Superfici

- **Superficie 3D:** Grafico dell'equazione $z = f(x,y)$ nello spazio.
- **Lettura Mappe:** Relazione tra densità delle isoipse e pendenza della superficie.
- **Esempi Notevoli:**
  - Paraboloide: $z = x^2 + y^2$ (ciotola).
  - Cono: $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ (imbuto).

Limiti e Continuità in R^2

Concetti e Controesempi

Definizione di Limite

CONCETTO CHIAVE

Il limite esiste se e solo se la funzione si avvicina allo stesso valore **L** indipendentemente dal percorso scelto per avvicinarsi a (x_0, y_0).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Test dei Percorsi (Non Esistenza)

TEOREMA

Se troviamo due curve diverse (es. rette, parabole) lungo le quali la funzione tende a limiti diversi, allora **il limite non esiste**.

$L_1 \neq L_2$ → LIMITE NON ESISTE

CASO 1: IL LIMITE ESISTE

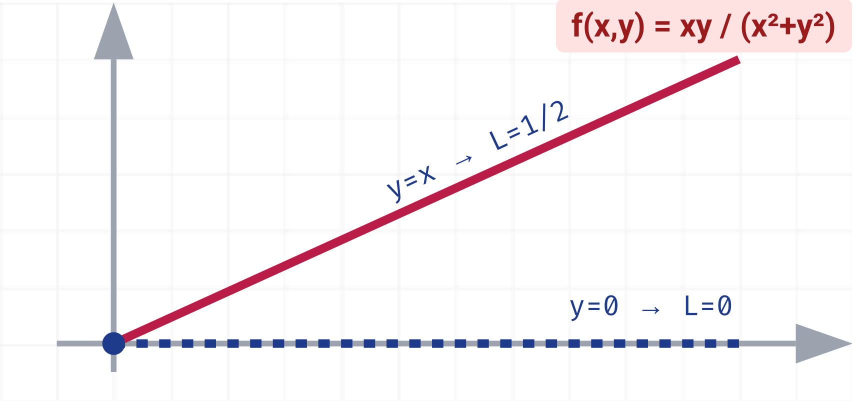
$$f(x,y) = x^2y / (x^2+y^2)$$

Passando a coordinate polari ($x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$):

$$|f(\rho,\theta)| = |\rho^2\cos^2\theta \cdot \rho\sin\theta| / \rho^2$$
$$= |\rho \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\theta| \leq \rho$$

Poiché $\rho \to 0$, il limite è **0**.

CASO 2: IL LIMITE NON ESISTE



Valori diversi ⇒ Limite DNE

Nota: *In R^2, avvicinarsi lungo infinite rette non basta a garantire l'esistenza del limite (servono parabole, etc).*

Derivate Parziali e Gradiente

Derivate Parziali

$\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$

Limite del rapporto incrementale rispetto a una variabile, tenendo le altre costanti.

Rispetto a x:

$$\partial f/\partial x(a,b) = \lim_{h\to 0} [f(a+h, b) - f(a, b)] / h$$

Interp. geometrica: pendenza della tangente alla curva ottenuta intersecando la superficie z=f(x,y) con il piano y=b.

Il Gradiente (Nabla)

∇f

Vettore composto dalle derivate parziali prime calcolate in un punto.

$$\nabla f(x,y) = (\partial f/\partial x , \partial f/\partial y) = (f_x , f_y)$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI:

- È ortogonale alle curve di livello f(x,y) = k nel punto.
- Indica la direzione di **massima crescita** della funzione.
- Il modulo $|\nabla f|$ rappresenta la pendenza massima.

Differenziabilità vs Continuità

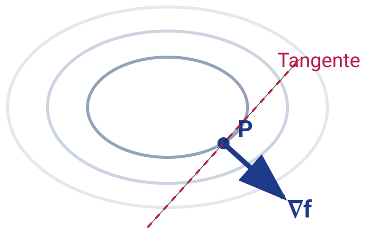
La differenziabilità in un punto implica la continuità, ma l'esistenza delle sole derivate parziali **non** garantisce la continuità.

Matrice Jacobiana

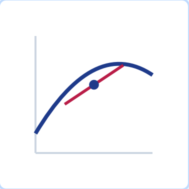
Per F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vettoriale:

$$J_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL GRADIENTE



Il gradiente in P è perpendicolare alla curva di livello passante per P.



Taglio con piano y=const

La derivata parziale rispetto a x è la pendenza della retta tangente alla curva ottenuta "affettando" la superficie con un piano parallelo all'asse x.

Derivate Direzionali e Chain Rule

Derivata Direzionale

- Misura la variazione di f lungo una specifica direzione $\mathbf{u}$.
- Definizione tramite gradiente: $D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$
- Condizione fondamentale: il vettore direzione deve essere unitario, ovvero $|\mathbf{u}| = 1$.
- Generalizza il concetto di derivata parziale (dove $\mathbf{u}$ è un versore coordinato).

Analisi della Crescita

- **Massima Crescita:** Avviene lungo la direzione e verso del gradiente ∇f.
- **Tasso Massimo:** Il valore della pendenza massima è pari al modulo $|\nabla f|$.
- **Massima Decrescita:** Avviene nella direzione opposta al gradiente $-\nabla f$.
- **Variazione Nulla:** Lungo le direzioni ortogonali al gradiente (tangenti alle curve di livello).

Regola della Catena

- Estensione per funzioni composte multivariabili $h = f \circ g$.
- Se $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, allora: $D(f \circ g) = Df(g) \cdot Dg$
- Interpretazione come prodotto tra matrice Jacobiana di g e gradiente di f.
- **Applicazione:** Calcolo della derivata di funzioni composte lungo curve parametriche $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Piano Tangente e Differenziabilità

Definizioni e Teoremi

Equazione del Piano Tangente

Approssimazione Lineare

Il piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto (a,b) è la migliore approssimazione lineare della superficie in quel punto.

$$z \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Dove f_x e f_y sono le derivate parziali calcolate in (a,b).

Differenziabilità

Definizione Formale

Una funzione è differenziabile in (a,b) se ammette una "buona" approssimazione lineare, ovvero se l'errore tende a zero più velocemente della distanza.

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h) - f(a) - \nabla f(a)\cdot h] / \|h\| = 0$$

Implicazioni fondamentali:

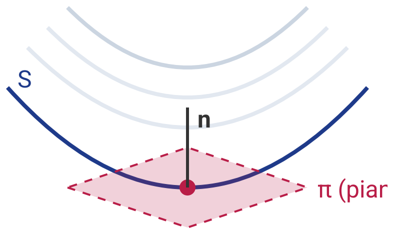
- Differenziabilità ⇒ Continuità (il viceversa è falso!)
- Differenziabilità ⇒ Esistenza di tutte le derivate direzionali

Teorema di Schwarz (Clairaut)

Derivate Miste

Stabilisce quando l'ordine di derivazione è ininfluente.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Il piano tangente "tocca" la superficie nel punto P e contiene tutte le rette tangenti alle curve sulla superficie passanti per P.

RELAZIONI LOGICHE

C¹ (Derivate continue)

↓

Differenziabilità

↗ ↘

Ottimizzazione Libera

Punti Critici (Stazionari)

$\nabla f = 0$

Un punto $P_0(x_0, y_0)$ è critico per $f(x, y)$ se il gradiente è nullo oppure non esiste.

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow \text{Piano tangente orizzontale}$$

Matrice Hessiana e Determinante

H(x,y)

Matrice delle derivate seconde parziali:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Determinante Hessiano (D):

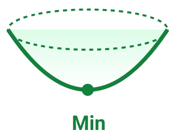
$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

(Teorema di Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$)

Classificazione dei Punti Critici

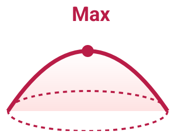
TEST DELLE DERIVATE SECONDE

Minimo Locale	$D > 0$	$f_{xx} > 0$
Massimo Locale	$D > 0$	$f_{xx} < 0$
Punto di Sella	$D < 0$	f_{xx} irrilevante
Inconclusivo	$D = 0$	Servono altri metodi



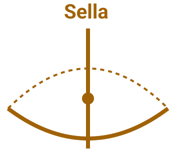
Minimo Locale

Concavità verso l'alto in tutte le direzioni. (Ciotola)



Massimo Locale

Concavità verso il basso in tutte le direzioni. (Collina)



Punto di Sella

Minimo in una direzione, massimo in un'altra. (Pringles)

Esempio: Classificazione con Hessiana

Analisi punti critici

1. Funzione e Gradiente

START

$f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$

$\nabla f = (3x^2 - 3, 2y)$

2. Punti Critici ($\nabla f = 0$)

SOLVE

Risolvendo il sistema:

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ $2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Punti: A(1, 0) e B(-1, 0)

3. Matrice Hessiana

MATRIX

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Analisi A(1, 0)

$H(1,0) = \mathrm{diag}(6, 2)$

$\det(H) = 12 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$

MINIMO LOCALE (z = -2)

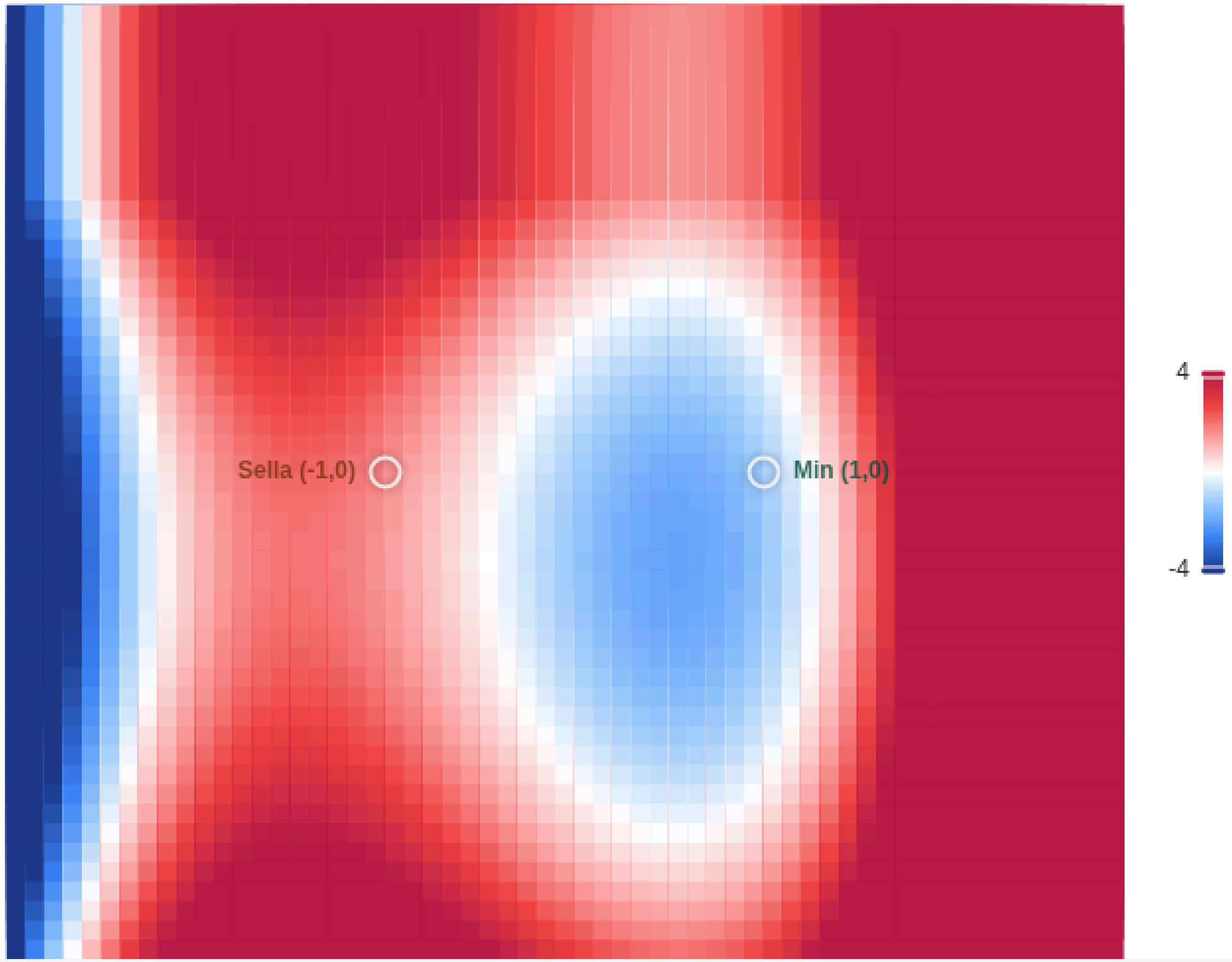
Analisi B(-1, 0)

$H(-1,0) = \mathrm{diag}(-6, 2)$

$\det(H) = -12 < 0$

PUNTO DI SELLA (z = 2)

CURVE DI LIVELLO E PUNTI CRITICI



Minimo Locale (1, 0)
Le curve di livello si chiudono attorno a questo punto (valle).

Punto di Sella (-1, 0)
Le curve di livello si incrociano (forma a sella).

Ottimizzazione Vincolata

Il Metodo dei Moltiplicatori

TEORIA

Per trovare gli estremi di $f(x,y)$ soggetti al vincolo $g(x,y)=c$, cerchiamo i punti dove i gradienti sono paralleli.

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange

Esempio Pratico

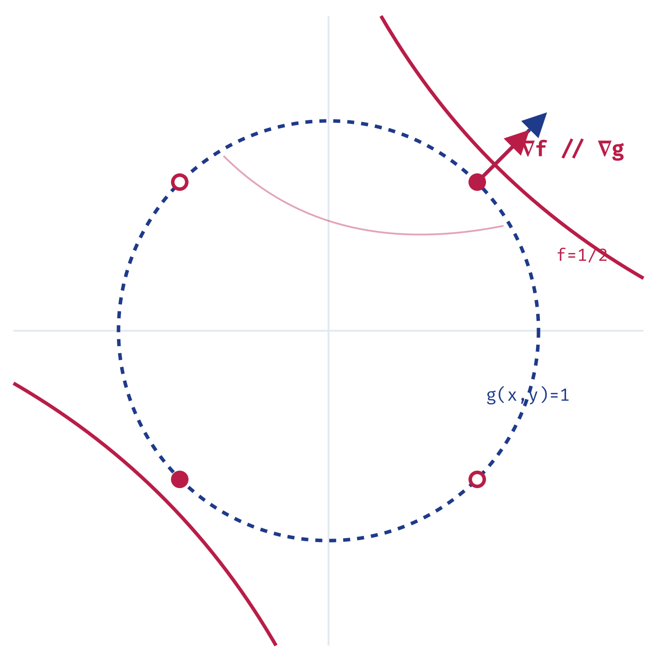
ESERCIZIO

Massimizzare $f(x,y) = xy$ sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$

1. Calcolo Gradienti:
   $\nabla f = (y, x)$ $\nabla g = (2x, 2y)$
2. Sistema Lagrange:
   I) $y = 2\lambda x$
   II) $x = 2\lambda y$
   III) $x^2 + y^2 = 1$
3. Risoluzione:
   Sostituendo I in II: $x = 4\lambda^2 x \Rightarrow \lambda=\pm 1/2 \Rightarrow y=\pm x$
   Punti critici: $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$

Max $f = 1/2$ | Min $f = -1/2$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Interpretazione:
Il punto di massimo si trova dove la curva di livello della funzione obiettivo (iperbole rossa) è tangente al vincolo (cerchio blu). In questo punto i gradienti sono collineari.

Integrali Doppi su Rettangoli

Integrale Doppio su Rettangolo

Definizione

Dato un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, l'integrale doppio di una funzione positiva $f(x,y)$ rappresenta il **volume** del solido sotteso dalla superficie $z = f(x,y)$ sopra R.

$$\iint_R f(x,y)\, dA$$

Teorema di Fubini

Teorema Fondamentale

Se f è continua su R, l'integrale doppio può essere calcolato come **integrali iterati** (uno dopo l'altro). L'ordine di integrazione è **intercambiabile**.

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx$$

$$=$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy$$

Esempio Guidato

Calcolare l'integrale su $R = [0,1] \times [0,2]$ della funzione $f(x,y) = x + y$.

```
// Impostazione integrale iterato
I = ∫₀¹ ( ∫₀² (x + y) dy ) dx

// 1. Integrazione interna (rispetto a y)
∫₀² (x + y) dy = [xy + y²/2]₀²
  = (x(2) + 4/2) - (0)
  = 2x + 2

// 2. Integrazione esterna (rispetto a x)
I = ∫₀¹ (2x + 2) dx
  = [x² + 2x]₀¹
  = (1² + 2(1)) - 0
  = 3
```

DOMINIO DI INTEGRAZIONE R

Domini Generali e Coordinate Polari

Cambiamento di Variabili e Jacobiani

Coordinate Polari

CAMBIO VARIABILE

$\mathbb{R}^2 \to (r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Utile per domini circolari o simmetrici.

JACOBIANO FONDAMENTALE

!

$$J = r$$

$$dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Non dimenticare di moltiplicare per r!

FORMULA GENERALE

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D'} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Domini e Applicazioni

Dominio Semplice (y)

y compresa tra due funzioni di x

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

Dominio Semplice (x)

x compresa tra due funzioni di y

$$\int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

Esempio: Area Disco Unitario

Calcolo area cerchio raggio 1 usando coordinate polari:

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

TABELLA RIASSUNTIVA JACOBIANI

Polari	Cilindriche	Sferiche
$\mathbf{r}$	$\mathbf{r}$	$\rho^2\sin\phi$

Il cambiamento di variabili semplifica drasticamente integrali su domini curvi.

Integrali Tripli e Coordinate

Definizione e Cilindriche

- **Integrale Triplo:** $\iiint_E f(x,y,z)\, dV$. Se $f(x,y,z) \equiv 1$, l'integrale calcola il **Volume** del solido E.
- **Coordinate Cilindriche** (r, θ, z):
  $x = r \cos \theta$
  $y = r \sin \theta$
  $z = z$
- **Jacobiano:** $J = r$
  Elemento di volume: $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$

Coordinate Sferiche

- Utili per domini con simmetria sferica. Coordinate (ρ, φ, θ) dove ρ è la distanza dall'origine e φ l'angolo con l'asse z.
- **Trasformazione:**
  $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$
  $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$
  $z = \rho \cos \varphi$
- **Jacobiano:** $J = \rho^2 \sin \varphi$
  Elemento di volume: $dV = \rho^2 \sin \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

Esempio: Volume Sfera

- **Problema:** Calcolare il volume di una sfera di raggio R.
- **Estremi di integrazione:**
  $\rho \in [0, R], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$
- **Calcolo:**
  $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^2\, d\rho$
  $= 2\pi \cdot [-\cos \varphi]_0^{\pi} \cdot [\rho^3/3]_0^R$
  $= 2\pi \cdot (1 - (-1)) \cdot (R^3/3)$
- **Risultato: $V = (4/3)\, \pi R^3$**

Funzioni Composte – Esempi Guidati

Metodo e Calcolo Domini

Procedura Generale

Per determinare il dominio di $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: 1. Determinare il dominio di $g(x)$. 2. Imporre che i valori $g(x)$ soddisfino le condizioni di esistenza di f. 3. Risolvere il sistema delle condizioni.

Esempio 1: Radice e Polinomio

CALCOLO

Funzioni Componenti

$f(x) = \sqrt{1-x}$

$g(x) = x^2-4x$

Composizione (f∘g)(x)

$h(x) = \sqrt{1 - (x^2-4x)}$

$= \sqrt{1 - x^2 + 4x}$

Condizione Dominio

$1 - x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 \leq 0$

Radici: $x = 2 \pm \sqrt{5}$. Soluzione: $[2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}]$

Esempio 2: Logaritmo e Seno

CALCOLO

Funzioni Componenti

$f(x) = \ln(x)$

$g(x) = 1 + \sin(x)$

Composizione (f∘g)(x)

$h(x) = \ln(1 + \sin(x))$

Condizione Dominio

Argomento $> 0 \Rightarrow 1 + \sin(x) > 0 \Rightarrow \sin(x) > -1$

Vero sempre tranne quando $\sin(x) = -1$. $x \neq 3/2\pi + 2k\pi$

SCHEMA CONCETTUALE

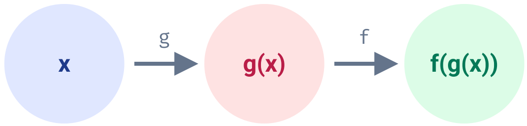


GRAFICO ES. 1: SEGNO DI 1 - X² + 4X

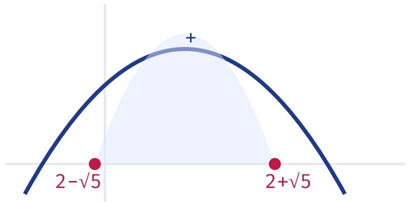
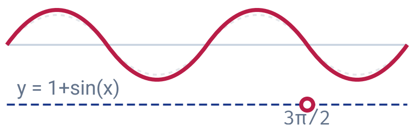


GRAFICO ES. 2: 1 + SIN(X) > 0



Funzioni Inverse: Metodo ed Esercizi

Metodi Algebrici e Grafici

Procedura Algebrica

METODO

- Scrivere l'equazione come $y = f(x)$.
- Scambiare le variabili: $x \leftrightarrow y$.
- Risolvere l'equazione per y.
- La nuova espressione è $y = f^{-1}(x)$.

Esempio 1: Funzione Lineare

ESERCIZIO

FUNZIONE DATA

$f(x) = 3x - 2$

PASSAGGI

$y = 3x - 2 \rightarrow x = 3y - 2$

$3y = x + 2 \rightarrow y = (x+2)/3$

Risultato: $f^{-1}(x) = (x + 2) / 3$ Dominio: $\mathbb{R}$

Esempio 2: Dominio Ristretto

ESERCIZIO

FUNZIONE DATA

$f(x) = x^2,\ x \in [0, +\infty)$

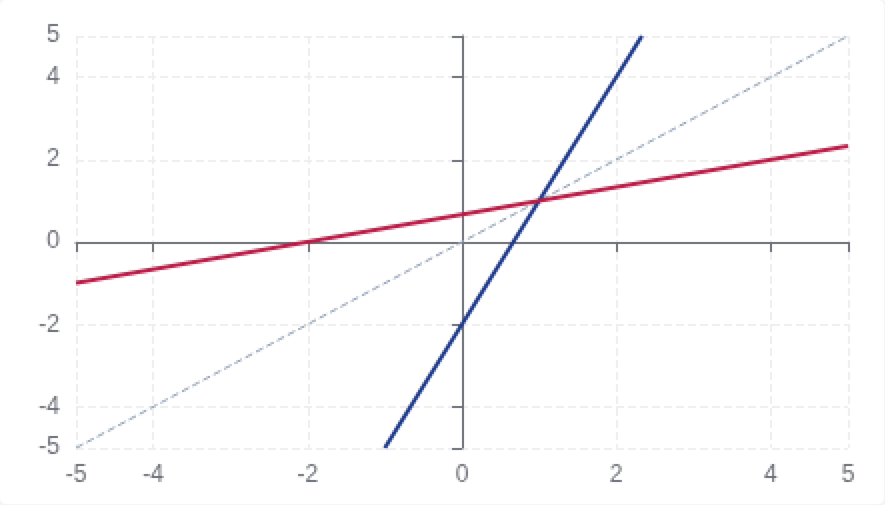
PASSAGGI

$y = x^2 \rightarrow x = y^2$

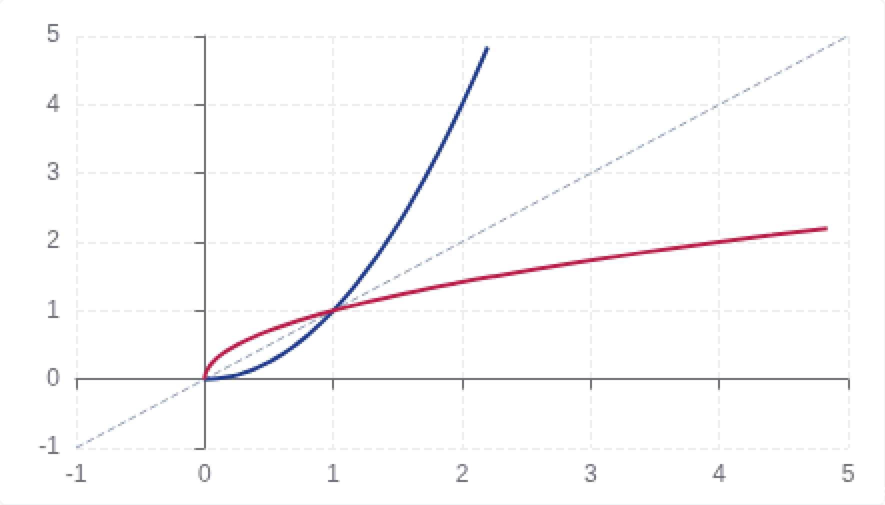
$y = \pm\sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x}$ (poiché $y \geq 0$)

Risultato: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ Dominio f^{-1}: $[0, +\infty)$

SIMMETRIA RISPETTO A Y = X (ESEMPIO 1)



INVERSA DELLA PARABOLA (ESEMPIO 2)



Monotonia e Invertibilità

Teoremi e Applicazioni

Criterio della Monotonia

Teorema

Se la derivata $f'(x)$ mantiene segno costante (strettamente positivo o negativo) su un intervallo I:

- La funzione f è strettamente monotona su I.
- La funzione è iniettiva, quindi **invertibile** su I.
- Esiste la funzione inversa f^{-1} definita sull'immagine $f(I)$.

Test della Linea Orizzontale

Una funzione è invertibile se e solo se ogni retta orizzontale $y = k$ interseca il grafico della funzione **al massimo una volta**. Se interseca più volte, la funzione non è iniettiva.

Esempio Applicativo

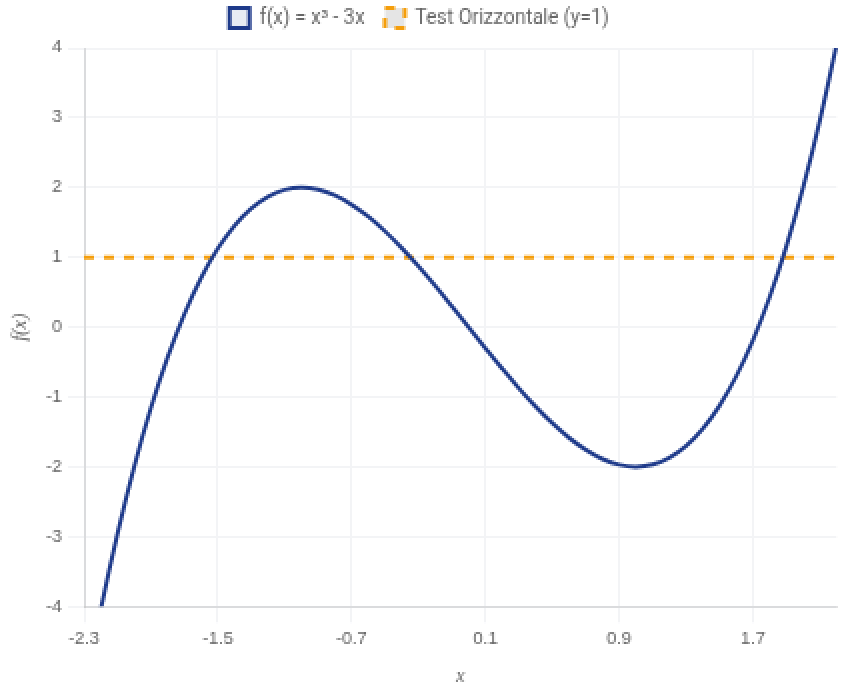
Funzione: $f(x) = x^3 - 3x$

Derivata: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

CRESCENTE ($f' > 0$)
$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

DECRESCENTE ($f' < 0$)
$(-1, 1)$

ANALISI GRAFICA



⚠ **Nota Invertibilità:**
Globalmente su $\mathbb{R}$, la funzione **non** è invertibile (vedi linea tratteggiata arancione che interseca 3 volte).
È invertibile se ristretta a intervalli di monotonia, es. $[-1, 1]$.

ℹ La monotonia è condizione sufficiente ma non necessaria per l'invertibilità (es. funzioni discontinue).

Limiti forma 0/0 con fattorizzazioni

1 Semplificazione Algebrica

STRATEGIA

Fattorizzare numeratore e denominatore per eliminare il termine che causa l'indeterminazione.

$$\lim_{(x\to1)} (x^2-1)/(x-1) = \lim \cancel{(x-1)}(x+1)/\cancel{(x-1)}$$
$$= \lim_{(x\to1)} (x+1) = 2$$

2 Limite Notevole

FONDAMENTALE

Limite fondamentale trigonometrico per forme 0/0.

$$\lim_{(x\to0)} \sin(x)/x = 1$$

Non risolvibile con metodi algebrici elementari, dimostrato tramite Teorema del Confronto.

GRAFICO Y = X + 1 (BUCO IN X=1)

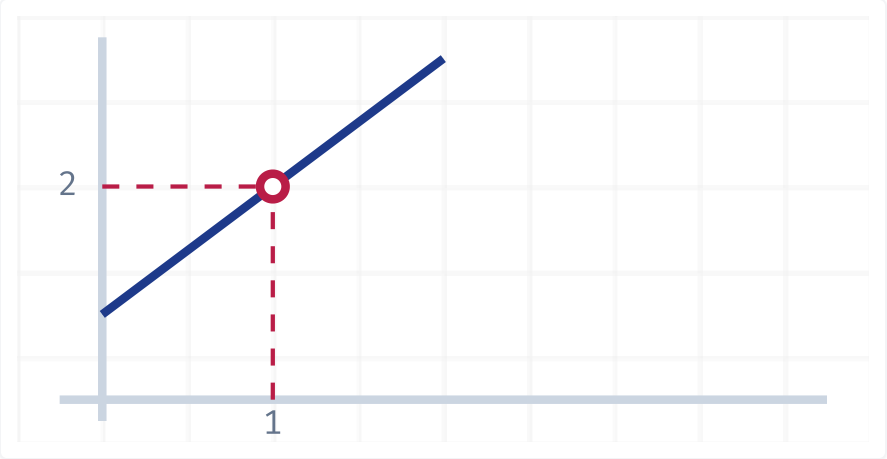


GRAFICO Y = SIN(X)/X (BUCO IN X=0)

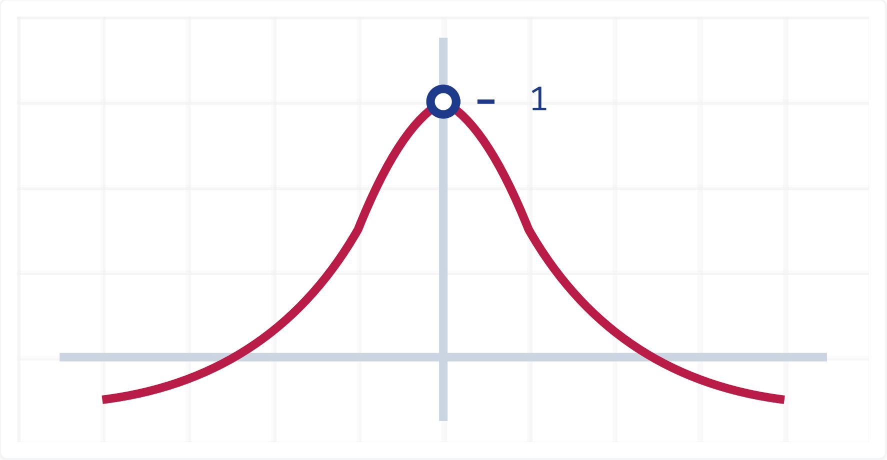


GRAFICO VICINO A X=2 (BUCO IN Y=4)

Limiti forma ∞/∞ con De L'Hôpital

Applicazioni e Gerarchie

Teorema di De L'Hôpital

IPOTESI

Applicabile se `lim f(x)/g(x)` si presenta nelle forme indeterminate **0/0** oppure **∞/∞** e le derivate esistono.

Esempio 1: Gerarchia Logaritmo vs Potenza

∞/∞

$\lim_{x\to\infty} \ln x / x \xrightarrow{[H]} \lim (1/x) / 1 = \mathbf{0}$

Il denominatore (x) cresce più velocemente del numeratore (ln x).

Esempio 2: Gerarchia Esponenziale vs Potenza

∞/∞ iterato

$\lim_{x\to\infty} e^x / x^3 \to [H] \to \lim e^x / 3x^2$

$\to [H] \to \lim e^x / 6x \to [H] \to \lim e^x / 6 = \infty$

La crescita esponenziale domina su qualsiasi potenza polinomiale.

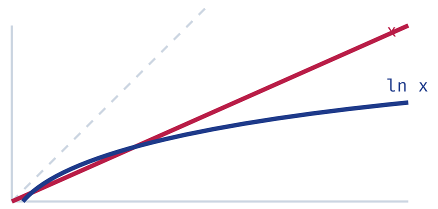
Esempio 3: Forma 0 · ∞

Trasformazione

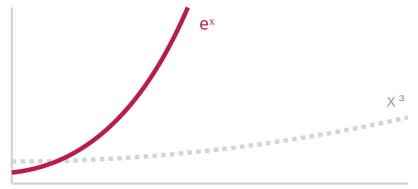
$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim \ln x / (1/x) \quad (\infty/\infty)$

$\xrightarrow{[H]} \lim (1/x) / (-1/x^2) = \lim (-x) = \mathbf{0}$

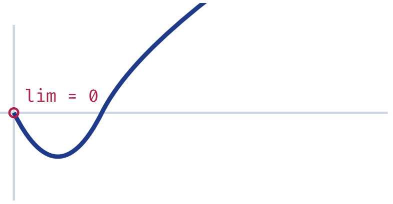
CONFRONTO LN(X) VS X



DOMINIO ESPONENZIALE



COMPORTAMENTO X LN(X) IN 0



Nota: È possibile applicare il teorema più volte consecutivamente se la forma indeterminata persiste.

Limiti con Razionalizzazione

Eliminazione Forme 0/0 con Radicali

Strategia: Moltiplicare per il Coniugato

Quando si ha una forma indeterminata **0/0** coinvolgente radici quadrate, moltiplicare numeratore e denominatore per il fattore coniugato $(\sqrt{A} + B)$ sfrutta l'identità $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ per eliminare la radice.

1 Limite Fondamentale Radicale

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+x)} - 1}{x} = 0/0$$

$$\to \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{(1+x)} + 1}{\sqrt{(1+x)} + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{(1+x)} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{(1+x)} + 1)}$$

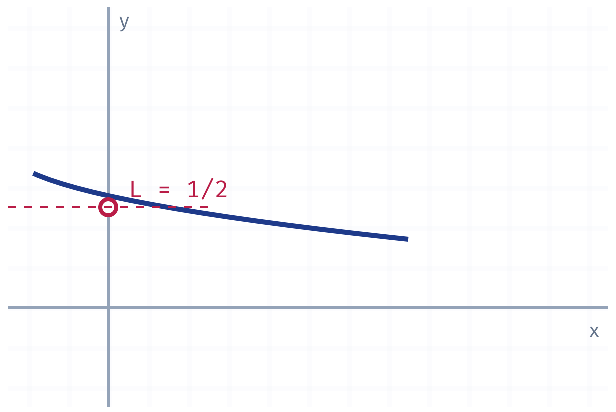
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(1+x)} + 1} = \frac{1}{2}$$

2 Variante Traslata

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(x+4)} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{(x+4)} + 2)} = \frac{1}{4}$$

ANALISI GRAFICA ESEMPIO 1



La funzione presenta una discontinuità eliminabile in x=0. Il limite esiste e vale 1/2.

Nota Bene

Questa tecnica è fondamentale quando si incontra una differenza di radicali che tende a zero. Funziona trasformando l'indeterminazione da irrazionale a razionale, permettendo la semplificazione del fattore **x** che causa lo zero al denominatore.

Gerarchia degli Infiniti e Sostituzioni

Confronti asintotici e cambi di variabile

Gerarchia di Crescita

Per $x \to +\infty$, le funzioni elementari seguono un ordine preciso di velocità di divergenza.

$$\ln x \ll x^\alpha \ll a^x \ll x! \ll x^x$$

$$(\alpha > 0) \quad (a > 1)$$

La notazione $\ll$ indica che il rapporto tende a 0.

Conseguenze (Limiti Notevoli)

POTENZA VS ESPONENZIALE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad (\forall k, a > 1)$$

L'esponenziale "vince" sempre sulla potenza.

LOGARITMO VS POTENZA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\forall \alpha > 0)$$

Il logaritmo è l'infinito più "lento".

Tecniche di Sostituzione

Il cambio di variabile permette di ricondurre limiti complessi a limiti notevoli noti.

SCOPO	SOSTITUZIONE	ESEMPIO RAPIDO
Limiti all'infinito	$t = \frac{1}{x}$ $x \to \infty \implies t \to 0^+$	$\lim_{x \to \infty} x \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
Semplificazione Argomento	$t = f(x)$ Adatta al limite notevole	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ Pongo $t = 3x$: $\lim_{t \to 0} 3\frac{\ln(1+t)}{t} = 3$
Eliminazione Radici	$t = \sqrt[n]{x}$ $x = t^n$	$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ Pongo $t = \sqrt{x}$: $\lim_{t \to 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \frac{1}{2}$
Traslazione	$t = x - x_0$ $x \to x_0 \implies t \to 0$	$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ Pongo $t = x - 1$: $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

Consiglio Operativo: Se un limite si presenta nella forma $x \to \infty$, spesso la sostituzione $t = 1/x$ permette di utilizzare i limiti notevoli studiati per $t \to 0$.

Derivate Funzioni Composte

Regola della Catena (Chain Rule)

Formula Generale

TEOREMA

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della funzione esterna valutata nell'interna × derivata della funzione interna.

Esempio 1: Logaritmo composto

COMPLESSO

$y = \ln(1 + \sin(x^2))$

$y' = 1/(1+\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

Esempio 2: Esponenziale

TIPICO

$y = e^{(3x^2)}$

$y' = e^{(3x^2)} \cdot 6x$

Esempio 3: Potenza di funzione

STANDARD

$y = (x^2 + 1)^{10}$

$y' = 10(x^2 + 1)^9 \cdot 2x = 20x(x^2 + 1)^9$

STRUTTURA "A CIPOLLA"

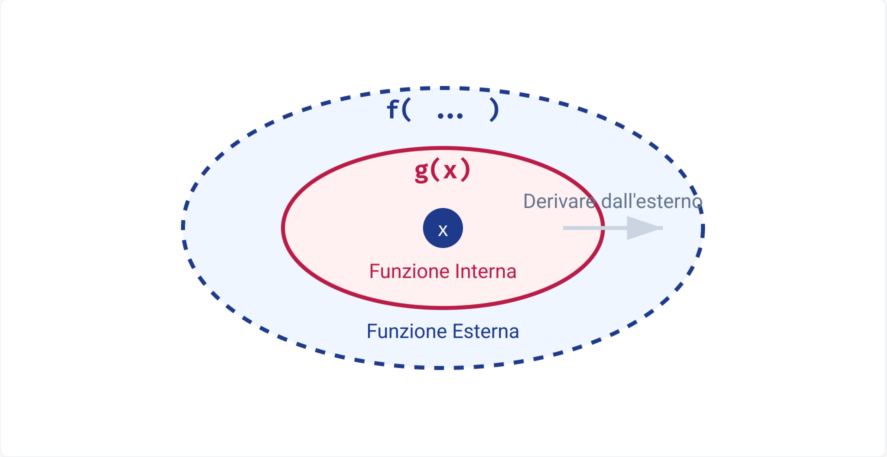
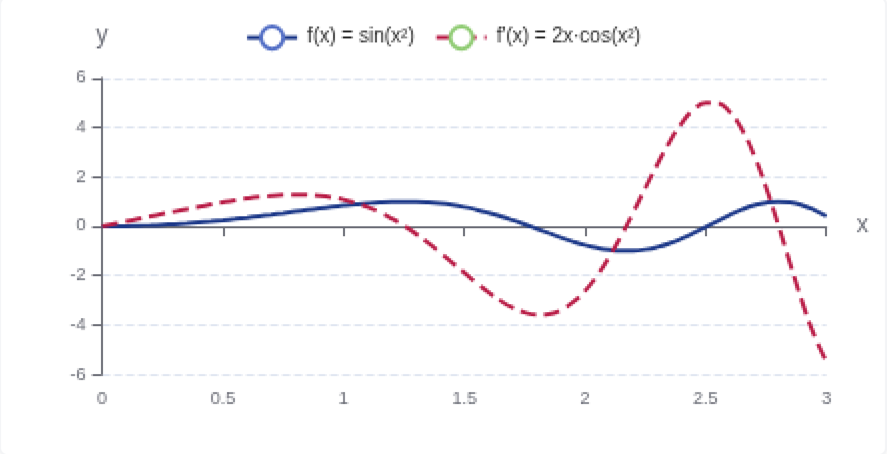


GRAFICO ESEMPIO: Y = SIN(X²) VS Y'



Regola mnemonica: "Sbucciare la cipolla" derivando uno strato alla volta dall'esterno verso l'interno.

Derivate implicite

Metodi per curve

Metodo di Derivazione

PROCEDURA

Se y non è isolata ($f(x,y)=0$), deriviamo entrambi i membri rispetto a x, trattando y come funzione di x ($y=y(x)$) e applicando la regola della catena: $\frac{d}{dx}[y^n] = n y^{n-1} \cdot y'$. Infine risolviamo per y'.

Esempio 1: Cerchio

GEOMETRICO

Equazione: $x^2 + y^2 = 1$

Derivo rispetto a x:

$2x + 2y \cdot y' = 0$

Risultato: $y' = -x/y$ *(pendenza tangente)*

Esempio 2: Trascendente

ANALITICO

Equazione: $e^{(xy)} = x - x^2 y$

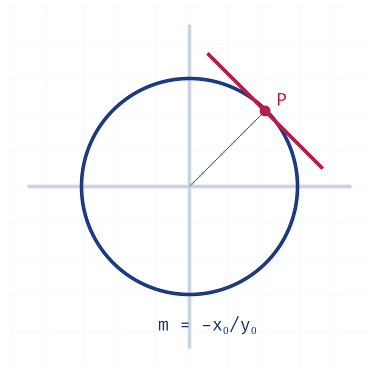
Derivazione (Prodotto + Catena):

$e^{(xy)} \cdot (y + xy') = 1 - (2xy + x^2 y')$

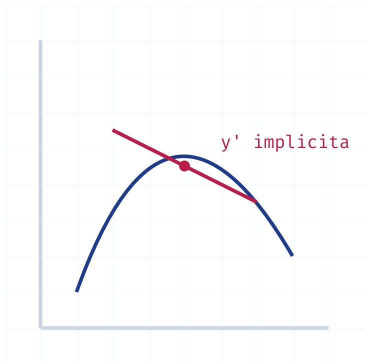
Isoliamo y':

$y' = (1 - 2xy - y \cdot e^{(xy)}) / (x^2 + x \cdot e^{(xy)})$

TANGENTE AL CERCHIO $P(X_0, Y_0)$



TANGENTE A CURVA IMPLICITA



Ottimizzazione in ℝ

Problema del Rettangolo Massimo

1. Funzione Obiettivo

MODELLIZZAZIONE

Massimizzare l'area di un rettangolo sotto la parabola $y = 6 - x^2$ nel primo quadrante.

Area A(x): $A(x) = \text{base} \cdot \text{altezza} = x \cdot (6 - x^2)$

Dominio: $x \in [0, \sqrt{6}]$ *(poiché y ≥ 0)*

2. Derivata e Punti Critici

CALCOLO

Funzione: $A(x) = 6x - x^3$

$A'(x) = 6 - 3x^2$ | Poniamo = 0 $3x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Consideriamo solo $x = \sqrt{2}$ poiché $x > 0$.

3. Verifica e Soluzione

CONCLUSIONE

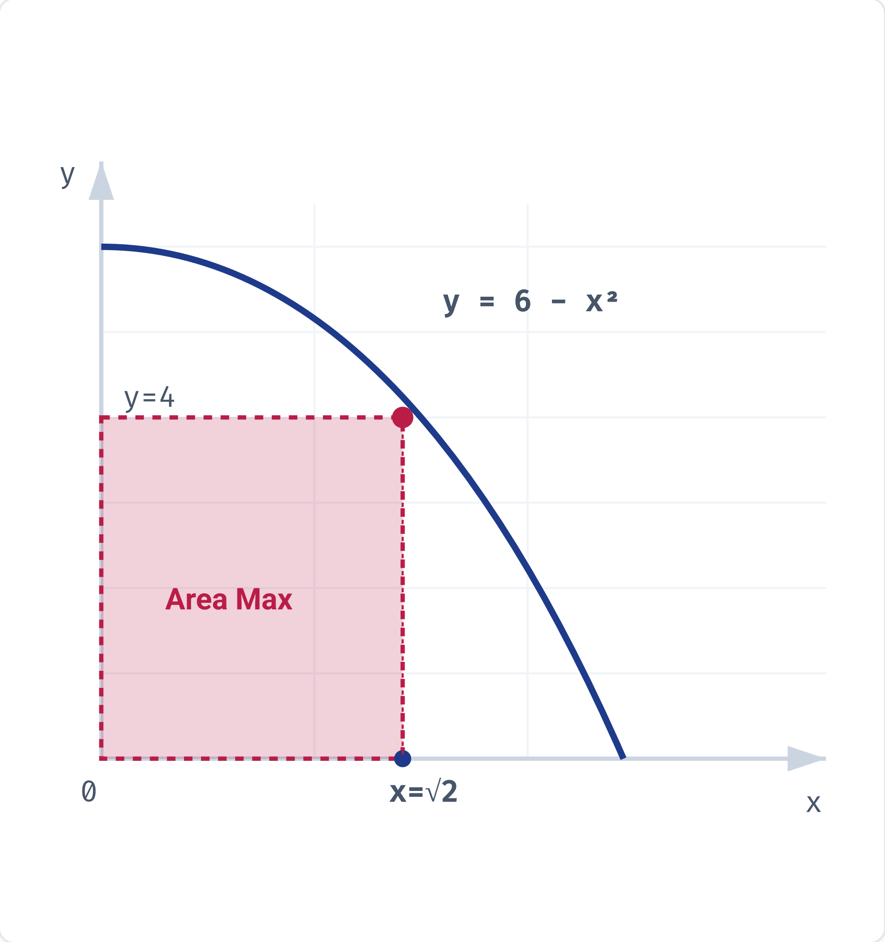
Test Derivata II: $A''(x) = -6x$

Valutazione: $A''(\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$ MASSIMO

Valore Area Massima:

$$A(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Nota: Il rettangolo ottimale ha base $\sqrt{2} \approx 1.41$ e altezza 4. L'area massima è esattamente $4\sqrt{2}$ unità quadrate.

CAPITOLO 5

Teoremi di Rolle e Lagrange

Applicazioni del Calcolo Differenziale

Teorema di Rolle

Ipotesi:

- f continua in $[a, b]$
- f derivabile in (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Tesi:

> Esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:
>
> $$f'(c) = 0$$

Geometricamente: esiste una tangente orizzontale.

```
Esempio Applicativo
f(x) = x² - 1 su [-1, 1]
1. Continua e derivabile su R
2. f(-1) = 0, f(1) = 0 ⇒ f(-1)=f(1)
3. f '(x) = 2x
⇒ 2c = 0 ⇒ c = 0 ∈ (-1, 1)
```

Teorema di Lagrange (MVT)

Ipotesi:

- f continua in $[a, b]$
- f derivabile in (a, b)

Tesi:

> Esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:
>
> $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geometricamente: tangente parallela alla secante.

```
Esempio Applicativo
f(x) = ln x su [1, e]
Secante: (ln e - ln 1)/(e - 1) = 1/(e-1)
Derivata: f '(c) = 1/c
⇒ 1/c = 1/(e-1) ⇒ c = e - 1
```

Sostituzioni Trigonometriche

Metodi ed Esempi

Forme Fondamentali

STRATEGIA

Radicale	Sostituzione	Identità utile
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Integrali Immediati

ESEMPIO 1 & 2

$\int dx / \sqrt{1-x^2}$

Pongo $x = \sin \theta$, $dx = \cos \theta \, d\theta$

$= \int (\cos \theta \, d\theta) / \cos \theta = \int d\theta = \theta + C = \arcsin x + C$

$\int dx / (x^2+1)$

Pongo $x = \tan \theta$, $dx = \sec^2\theta \, d\theta$

$= \int (\sec^2\theta \, d\theta) / \sec^2\theta = \int d\theta = \theta + C = \arctan x + C$

Esempio 3: Applicazione

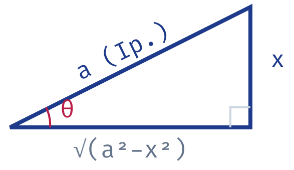
CALCOLO

$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx$

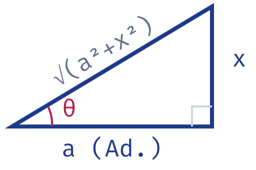
Sostituzione: $x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta \, d\theta$

$= \int \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} \cdot 2 \cos \theta \, d\theta = \int 2 \cos \theta \cdot 2 \cos \theta \, d\theta$

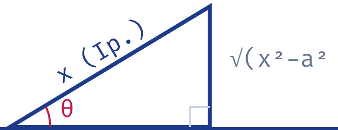
CASO SENO: X = A SIN Θ



CASO TANGENTE: X = A TAN Θ



CASO SECANTE: X = A SEC Θ



Funzioni Razionali e Frazioni Parziali

Procedura Generale

METODO

1. **Divisione:** Se grado num ≥ grado den, eseguire divisione polinomiale.
2. **Fattorizzazione:** Scomporre il denominatore in fattori irriducibili.
3. **Decomposizione:** Scrivere come somma di frazioni parziali (A, B, C...).
4. **Integrazione:** Integrare i termini semplici (solitamente logaritmi o arctan).

Esempio Completo

ESERCIZIO

INTEGRALE:

$$\int (2x + 3) / (x^2 + x - 2)\, dx$$

1. Fattorizzazione: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

2. Impostazione sistema:

$$(2x + 3)/((x - 1)(x + 2)) = A/(x - 1) + B/(x + 2)$$
$$2x + 3 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

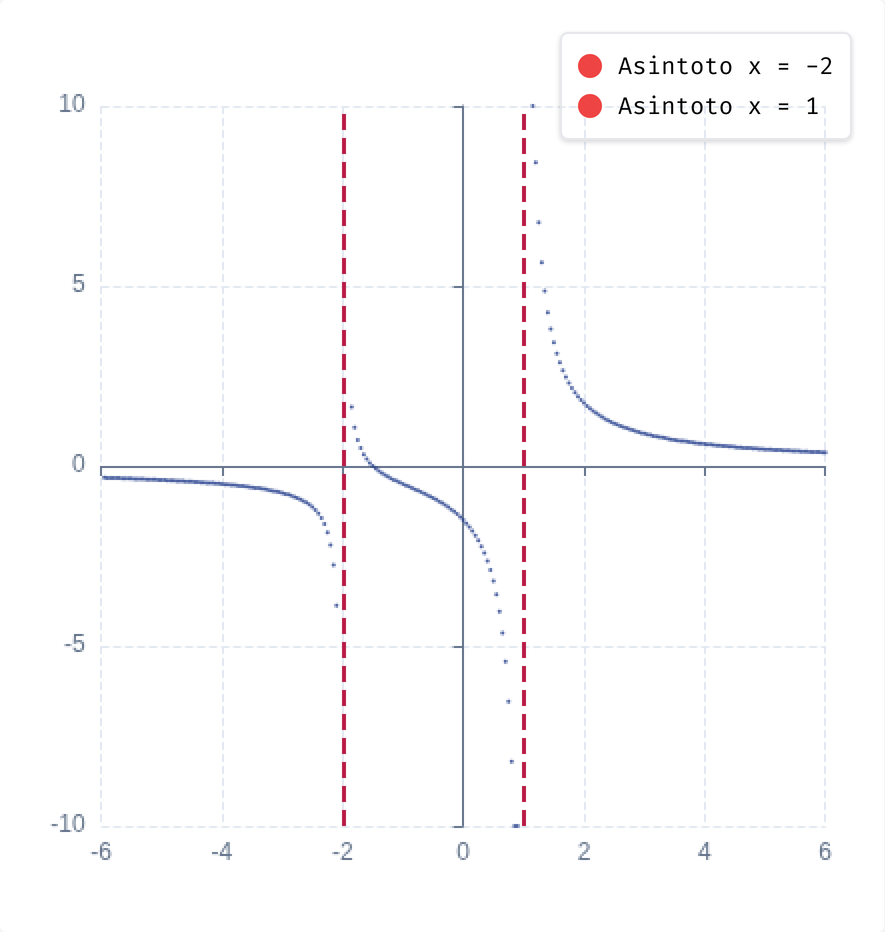
3. Calcolo costanti:

- Per $x = 1$: $5 = 3A \Rightarrow$ **$A = 5/3$**
- Per $x = -2$: $-1 = -3B \Rightarrow$ **$B = 1/3$**

SOLUZIONE:

$$(5/3)\ln|x - 1| + (1/3)\ln|x + 2| + C$$

VISUALIZZAZIONE INTEGRANDA



Nota: Se il denominatore ha fattori quadratici irriducibili (es. x^2+1), la decomposizione sarà del tipo $(Ax+B)/(x^2+1)$, portando spesso ad arcotangenti.

Calcolo Aree tra Curve

Formula Generale

DEFINIZIONE

L'area **A** della regione compresa tra i grafici di due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

Procedura Operativa

METODO

1. **Trovare le intersezioni:** Risolvere f(x) = g(x) per determinare gli estremi di integrazione a e b.
2. **Determinare l'ordine:** Capire quale funzione è "sopra" (maggiore) nell'intervallo.
3. **Integrare:** Calcolare l'integrale definito della differenza (superiore - inferiore).

Esempio Guidato

DATI

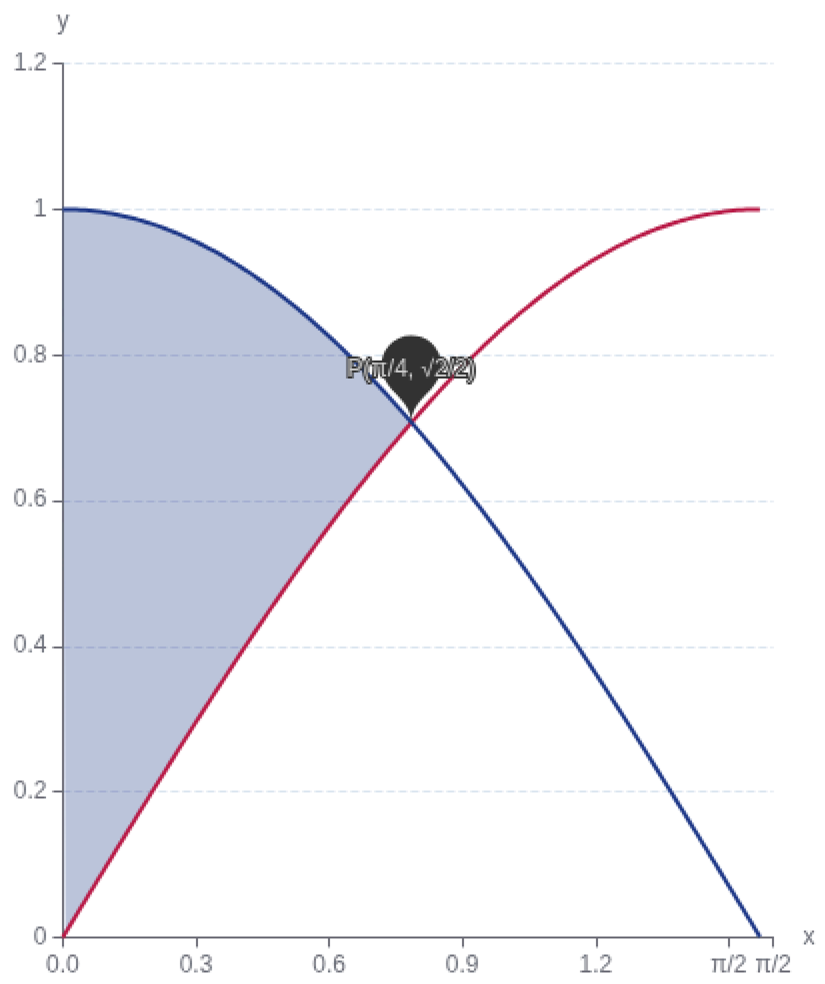
$y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$
Intervallo: $[0, \pi/4]$

ANALISI

Intersezione: $\sin(x)=\cos(x) \Rightarrow x=\pi/4$
Su $[0, \pi/4]$: $\cos(x) \geq \sin(x)$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx$$
$$= [\sin x - (-\cos x)]_0^{\pi/4} = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4}$$

Visualizzazione Grafica



Volumi di Solidi di Rotazione

Metodo dei Dischi

ROTAZIONE ASSE X

Si somma l'area dei dischi perpendicolari all'asse di rotazione.

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$$

Metodo dei Gusci

ROTAZIONE ASSE Y

Si somma il volume dei gusci cilindrici concentrici.

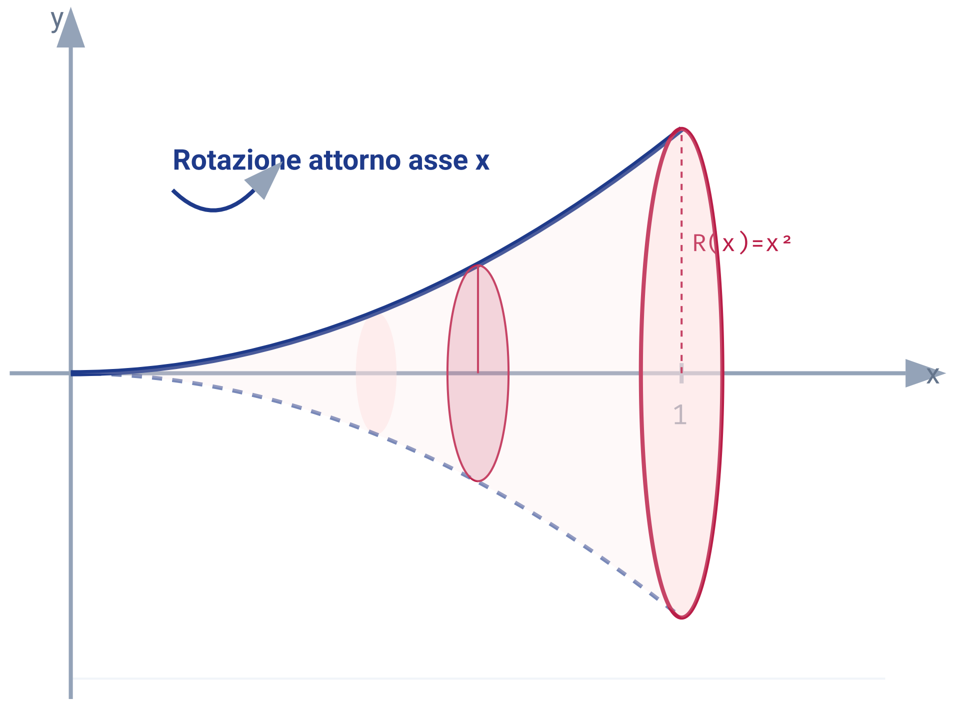
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot h(x) \, dx$$

ESEMPIO GUIDATO

Problema: Ruotare $y = x^2$ su $[0, 1]$ attorno all'asse x.

1. Imposta Integrale:	$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx$
2. Semplifica:	$V = \pi \int_0^1 x^4 \, dx$
3. Primitiva:	$V = \pi \left[x^5/5 \right]_0^1$
4. Risultato:	$V = \pi/5$

VISUALIZZAZIONE DEL SOLIDO



Il solido generato è simile a una tromba o un imbuto curvo.

Derivate Parziali: Esercizio Completo

Calcolo e Visualizzazione del Gradiente

1. Calcolo Derivate Parziali

ANALISI

Data la funzione: $f(x,y) = x^2y + e^{xy}$

RISPETTO A X: $f_x = 2xy + y \cdot e^{xy}$ *(y è costante)*

RISPETTO A Y: $f_y = x^2 + x \cdot e^{xy}$ *(x è costante)*

2. Valutazione nel punto P(1, 1)

CALCOLO

Componente x:

$f_x(1,1) = 2(1)(1) + 1 \cdot e^{1 \cdot 1}$

$= 2 + e$

Componente y:

$f_y(1,1) = 1^2 + 1 \cdot e^{1 \cdot 1}$

$= 1 + e$

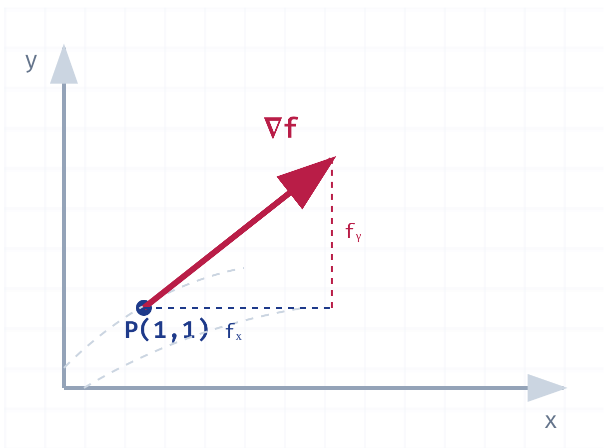
3. Vettore Gradiente

RISULTATO

$$\nabla f(1,1) = (2+e,\ 1+e) \approx (4.72,\ 3.72)$$

Il gradiente indica la direzione di **massima crescita** della funzione.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA (PIANO XY)



MODULO (INTENSITÀ CRESCITA)

$|\nabla f| = \sqrt{[(f_x)^2 + (f_y)^2]}$

$= \sqrt{[(2+e)^2 + (1+e)^2]}$

≈ 6.01

Piano Tangente: Esempio Numerico

Calcolo e Visualizzazione

1. Dati del Problema

INPUT

Funzione:

$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

Punto:

$P_0(1, 1)$

2. Valore nel Punto

CALCOLO

$f(1,1) = 1^2 + 2(1)(1) + 1^2 \rightarrow 4$

3. Derivate Parziali e Gradiente

DERIVAZIONE

Rispetto a x

$f_x = 2x + 2y$

Valutata in (1,1)

$f_x(1,1) = 4$

Rispetto a y

$f_y = 2x + 2y$

Valutata in (1,1)

$f_y(1,1) = 4$

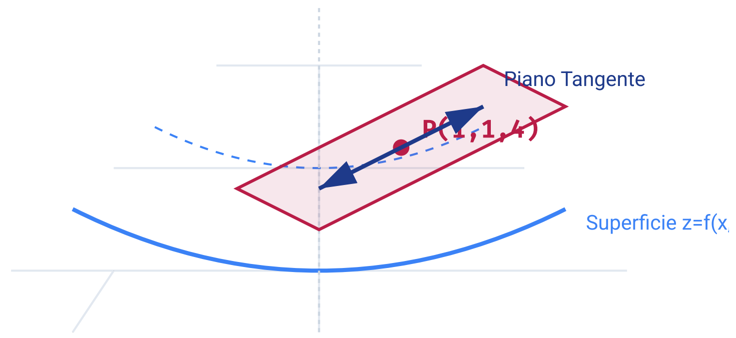
EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE

$z \approx f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$

$z = 4 + 4(x - 1) + 4(y - 1)$

$$z = 4x + 4y - 4$$

VISUALIZZAZIONE 3D CONCETTUALE



Significato Geometrico:

- Il piano tangente approssima linearmente la superficie vicino al punto P.
- I coefficienti 4 e 4 rappresentano le pendenze lungo gli assi x e y.

Ottimizzazione Libera: Secondo Esempio

Analisi con Matrice Hessiana

1. Punti Critici

CALCOLO ∇F

Funzione:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$

Gradiente ∇f = (0,0):

$\partial x: 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\partial y: 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

Punto Critico

P(2, 1)

2. Matrice Hessiana

ANALISI H

Derivate Seconde:

$f_{xx} = 2$	$f_{xy} = 0$
$f_{yx} = 0$	$f_{yy} = 2$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Classificazione

RISULTATO

Autovalori $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2 > 0$ (oppure $\det(H)=4>0$, $f_{xx}>0$) → **Definita Positiva**.

MINIMO LOCALE

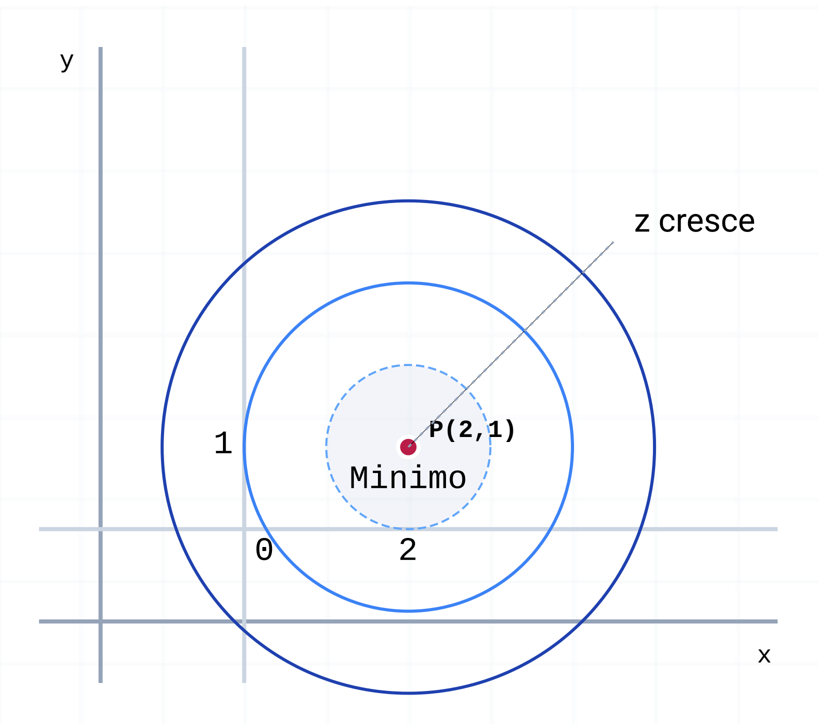
È anche minimo assoluto (paraboloide convesso)

Valore Minimo f(2,1):

-5

CURVE DI LIVELLO (ISOIPSE)

$z = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 5$



INTERPRETAZIONE 3D

La superficie è un **Paraboloide Ellittico** rivolto verso l'alto con vertice in (2, 1, -5).

Ottimizzazione Vincolata (2 Vincoli)

Moltiplicatori di Lagrange

Problema e Sistema di Lagrange

IMPOSTAZIONE

Massimizzare $f = x + y$ soggetta a due vincoli:

g_1 (cerchio): $x^2 + y^2 = 1$

g_2 (retta): $x - y = 0$

Condizione vettoriale: $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$(1, 1) = \lambda(2x, 2y) + \mu(1, -1)$$

Risoluzione del Sistema

CALCOLO

Sistema Algebrico:

I) $1 = 2\lambda x + \mu$
II) $1 = 2\lambda y - \mu$
III) $x^2 + y^2 = 1$
IV) $x = y$

→

Passaggi Chiave:

Dalla IV: sostituisco $x=y$ nella III.
$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1$
$x = \pm 1/\sqrt{2}$

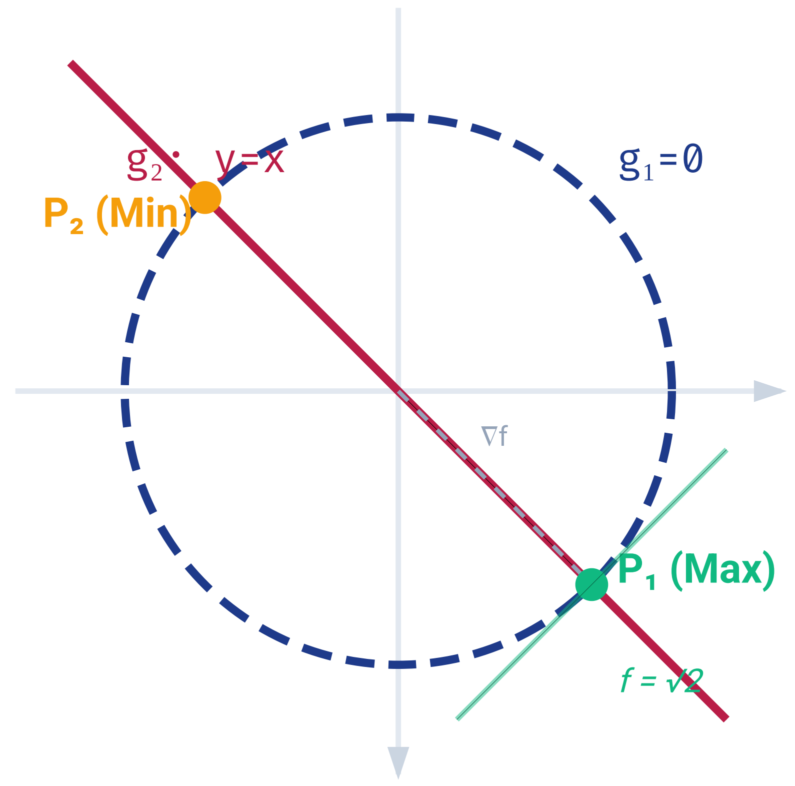
Valutazione Estremi

RISULTATO

Punto P_1 $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
$f = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$
MASSIMO

Punto P_2 $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$
$f = -2/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
MINIMO

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Nota Metodologica:
L'intersezione tra i vincoli riduce il dominio a due soli punti ammissibili. In questo caso, i moltiplicatori di Lagrange confermano semplicemente i valori della funzione obiettivo su questi punti di intersezione geometrica.

Coordinate Polari e Baricentro

Trasformazione Polare

METODO

Passaggio da coordinate cartesiane (x, y) a polari (r, θ):

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ $\qquad$ $dA = r\,dr\,d\theta$

Il fattore r è lo Jacobiano della trasformazione.

Esempio: Area Settore

CALCOLO

Dominio D: settore unitario con $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$

$$A = \iint_D 1\,dA = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^1 r\,dr$$

$$= [\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot [r^2/2]_0^1 = (\pi/2)\cdot(1/2) = \pi/4$$

Baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$

DEFINIZIONE

Coordinate medie pesate sull'area A:

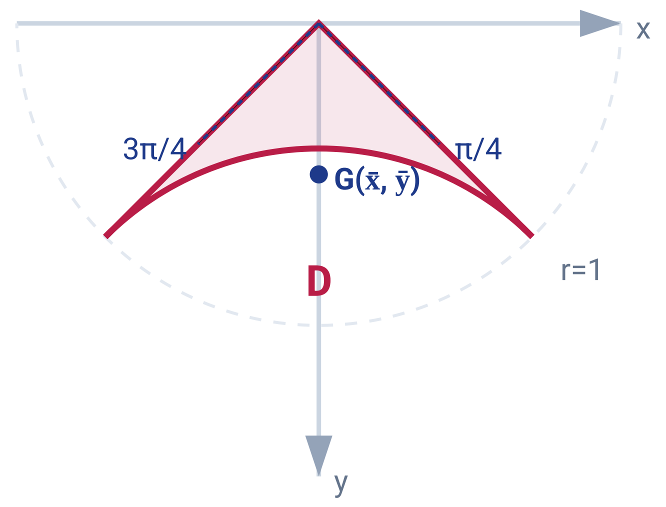
$\bar{x} = (1/A)\iint_D x\,dA = 0$

(Simmetria asse y)

$\bar{y} = (1/A)\iint_D y\,dA$

(Da calcolare)

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DOMINIO D



Nota sul Jacobiano

Non dimenticare mai il fattore **r** nell'elemento d'area $dA = r\,dr\,d\theta$. Senza di esso, l'integrale dimensionale risulta errato (lunghezza invece di area).

Il baricentro cade sull'asse di simmetria del settore.

Dominio Funzione Composta

$f(x) = \ln(\sqrt{x^2-5x+6} - 1)$

PASSO 1: CONDIZIONE DEL RADICALE

Il radicando deve essere non negativo.

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$
$$(x - 2)(x - 3) \geq 0$$

Soluzione parziale S_1: $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

PASSO 2: CONDIZIONE DEL LOGARITMO

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo.

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} > 1$$

Poiché entrambi i membri sono positivi, eleviamo al quadrato:

$$x^2 - 5x + 6 > 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 > 0$$

Radici di $x^2-5x+5=0$: $x = (5 \pm \sqrt{5})/2$
$x_1 \approx 1.38$, $x_2 \approx 3.62$

Soluzione parziale S_2: $x \in (-\infty, (5-\sqrt{5})/2) \cup ((5+\sqrt{5})/2, +\infty)$

PASSO 3: INTERSEZIONE DEI VINCOLI

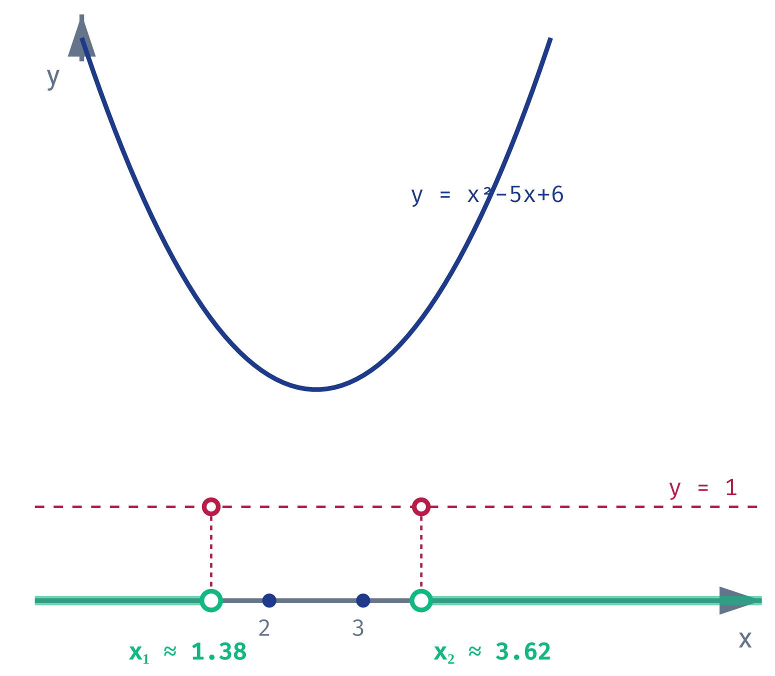
Il dominio D è l'intersezione $S_1 \cap S_2$.

Poiché $(5-\sqrt{5})/2 < 2$ e $(5+\sqrt{5})/2 > 3$, la condizione S_2 è più restrittiva di S_1. (Se il radicando è > 1, è automaticamente ≥ 0).

RISULTATO FINALE:

$$D = (-\infty, (5-\sqrt{5})/2) \cup ((5+\sqrt{5})/2, +\infty)$$

ANALISI GRAFICA DEI VINCOLI



Interpretazione Geometrica: Il dominio corrisponde agli intervalli sull'asse x dove la parabola (linea blu) si trova *strettamente sopra* la linea rossa tratteggiata (y=1).

Grafico con Trasformazioni

Analisi passo-passo

$y = -2|x-1| + 3$

Procedimento Passo-Passo

1 Funzione Base

Si parte da $g(x) = |x|$.

Grafico a "V" con vertice nell'origine (0,0).

2 Traslazione Orizzontale

Argomento $|x-1|$ implica spostamento a **destra** di 1 unità.

Nuovo vertice in (1,0).

3 Stiramento Verticale

Coefficiente $2|x-1|$ rende le "braccia" più ripide.

Pendenza m = ±2 (invece di ±1).

4 Riflessione

Segno negativo $-2|\ \dots\ |$ ribalta il grafico rispetto all'asse x.

La "V" diventa una "V rovesciata" (∩).

5 Traslazione Verticale (Finale)

Aggiunta costante +3 sposta tutto in **alto** di 3 unità.

Vertice finale: V(1, 3)

CALCOLO PUNTI NOTEVOLI

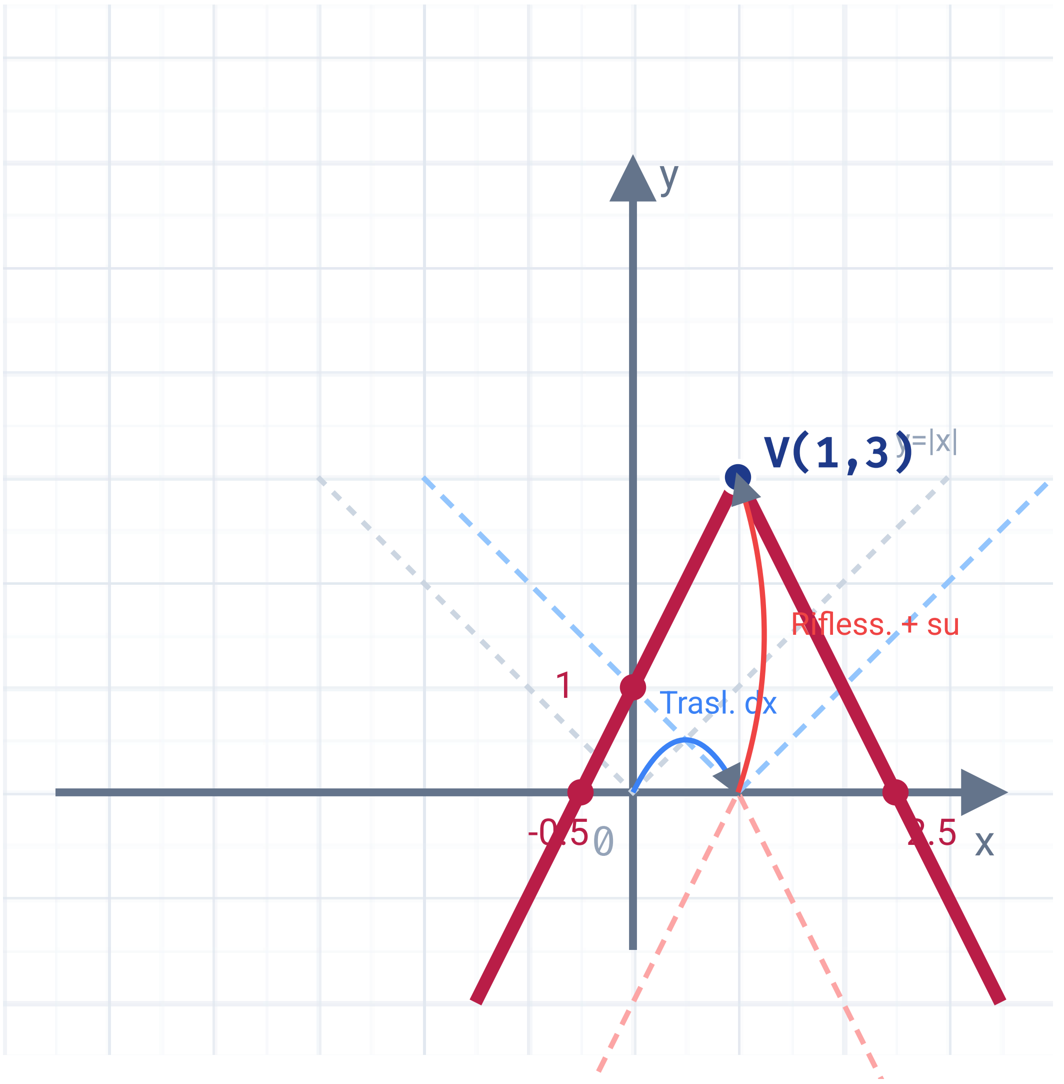
Zeri (Intersezioni asse x):

$-2|x-1| + 3 = 0$

Intercetta asse y:

Poni $x = 0$

VISUALIZZAZIONE GRAFICA



Studio Completo Funzione Razionale

$f(x) = {}^{x^2-4}/_{x-1}$

1

ANALISI PRELIMINARE

Dominio e Intersezioni

Denominatore non nullo e zeri del numeratore.

$D: x \neq 1$ | $f(0) = 4$ | $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

2

SEGNO

Studio del Segno

Analisi numeratore/denominatore.

$f(x) > 0: (-2, 1) \cup (2, +\infty)$

$f(x) < 0: (-\infty, -2) \cup (1, 2)$

3

LIMITI

Asintoti

Comportamento agli estremi e poli.

Vert: $x=1$ (lim $\pm\infty$)

Obl: $y=x+1$

da $(x^2-4)/(x-1) = x+1 - 3/(x-1)$

4

DERIVATA I

Monotonia

Segno della derivata prima.

$f'(x) = (x^2-2x+4)/(x-1)^2$

$\Delta < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Sempre Crescente

5

DERIVATA II

Concavità

Analisi della curvatura.

$f''(x) = 6/(x-1)^3$

$x < 1$: $\cap$ (Concava)

$x > 1$: $\cup$ (Convessa)

6

SINTESI

Grafico Finale

Unione delle informazioni.

- Passa per A(-2,0), B(2,0), C(0,4)
- Asintoto vert. x=1, obliquo y=x+1
- Crescente in tutto il dominio

Studio coerente: la funzione cresce sempre attraversando gli asintoti nei rami infiniti.

Limite con Sostituzioni Multiple

Metodi Analitici e Grafici

PROBLEMA: $\lim_{x \to 0^+} \ln(1+\sqrt{x}) / x$

PASSO 1: SOSTITUZIONE DI VARIABILE

Poniamo $t = \sqrt{x}$. Da cui segue che $x = t^2$.

Quando $x \to 0^+$, anche $t \to 0^+$.

$$\lim_{t \to 0^+} \ln(1+t) / t^2$$

METODO A: SVILUPPO DI TAYLOR

Sviluppiamo $\ln(1+t)$ per $t \to 0$:

$\ln(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$

Sostituendo nel limite:

$(t - t^2/2) / t^2 = \mathbf{1/t} - 1/2$

Poiché $1/t \to +\infty$, il limite diverge.

METODO B: DE L'HÔPITAL

Forma indeterminata $0/0$.

Deriviamo Num e Denom:

$D[\text{Num}] = 1/(1+t)$
$D[\text{Den}] = 2t$

Limite del rapporto:

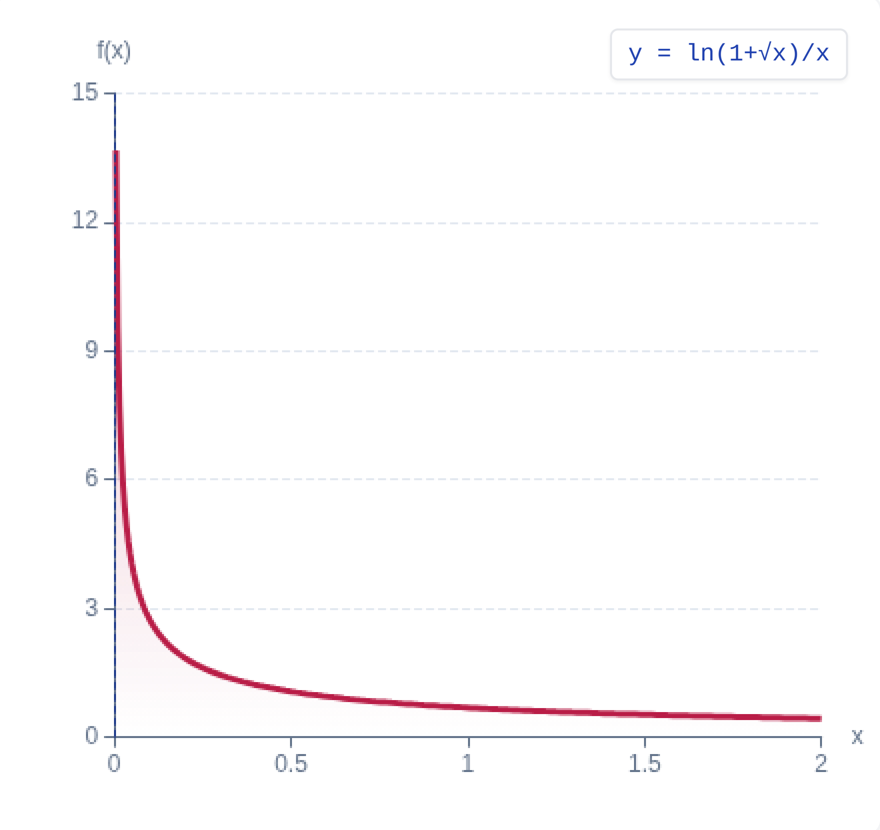
$$1 / [2t(1+t)] \to 1/0^+$$

RISULTATO FINALE

L'ordine di infinitesimo del denominatore è superiore.

$+\infty$

ANALISI COMPORTAMENTO ASINTOTICO



↑ Crescita Infinita: Vicino a $x=0$, il denominatore x va a zero molto più rapidamente del numeratore $\ln(1+\sqrt{x}) \approx \sqrt{x}$, causando un'esplosione verticale del valore della funzione.

Tip: La sostituzione $t=\sqrt{x}$ semplifica radicalmente lo studio degli ordini di infinitesimo.

Limite con De L'Hôpital Iterato

Calcolo di $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3}$

Procedimento Passo-Passo

PASSO 0: VERIFICA INIZIALE

Forma 0/0

$$\lim_{x \to 0} (e^x - 1 - x - x^2/2) = 1-1-0-0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

PASSO 1: PRIMA DERIVAZIONE

H1

Numeratore $N'(x)$

$$(e^x - 1 - x - x^2/2)' = e^x - 1 - x$$

Denominatore $D'(x)$

$$(x^3)' = 3x^2$$

Ancora forma 0/0

PASSO 2: SECONDA DERIVAZIONE

H2

Numeratore $N''(x)$

$$(e^x - 1 - x)' = e^x - 1$$

Denominatore $D''(x)$

$$(3x^2)' = 6x$$

Ancora forma 0/0

PASSO 3: TERZA DERIVAZIONE

H3

Numeratore $N'''(x)$

$$(e^x - 1)' = e^x$$

Denominatore $D'''(x)$

$$(6x)' = 6$$

Risultato e Verifica

VALUTAZIONE FINALE

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$$

Risultato: $1/6$

Verifica con Taylor

Sviluppo di e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Numeratore:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Confronto Tra Infiniti: Esercizio

$\lim_{x \to +\infty} (x \ln x) / e^{\sqrt{x}}$

1. ANALISI GERARCHIA DEGLI INFINITI

Sappiamo che per $x \to +\infty$, la gerarchia di crescita è:

$$\text{logaritmi} \ll \text{potenze (polinomi)} \ll \text{esponenziali}$$

Pertanto, il numeratore $x \ln x$ (crescita quasi polinomiale) dovrebbe crescere più lentamente del denominatore $e^{\sqrt{x}}$ (crescita esponenziale).

2. METODO DI SOSTITUZIONE

Per semplificare l'esponente, poniamo:

$$t = \sqrt{x} \rightarrow x = t^2 \quad \text{(se } x \to +\infty\text{, allora } t \to +\infty\text{)}$$

Il limite diventa:

$$\lim_{t \to +\infty} (t^2 \cdot \ln(t^2)) / e^t$$

3. RISOLUZIONE E CONCLUSIONE

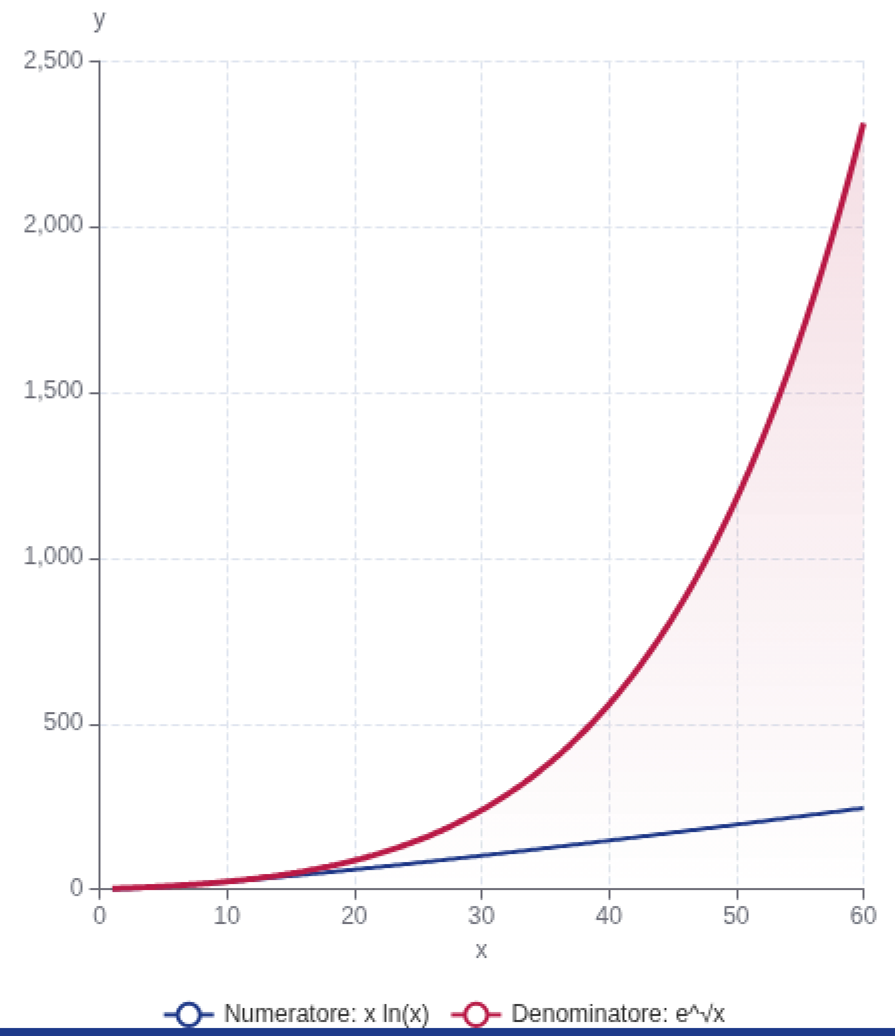
Usando le proprietà dei logaritmi $\ln(t^2) = 2 \ln t$:

$$= \lim_{t \to +\infty} (2t^2 \cdot \ln t) / e^t$$

Il numeratore è un prodotto **polinomio × logaritmo**, mentre il denominatore è un **esponenziale**.

- L'esponenziale e^t domina su qualsiasi potenza t^k e sui logaritmi.
- Applicando la gerarchia (o De L'Hôpital ripetutamente):

CONFRONTO GRAFICO: DOMINANZA ESPONENZIALE



Derivata Funzione Composta Nidificata

Regola della Catena e Prodotto

Funzione da derivare:

$$y = \sqrt{1 + e^{3x} \cdot \cos x}$$

PASSO 1: STRUTTURA ESTERNA

Identifichiamo la forma $y = u^{1/2}$ dove $u(x) = 1 + e^{3x} \cdot \cos x$.

$$y' = \tfrac{1}{2} \cdot u^{-1/2} \cdot u'(x) = 1 / (2\sqrt{u}) \cdot u'(x)$$

PASSO 2: DERIVATA INTERNA U'(X)

Calcoliamo la derivata dell'argomento usando la **regola del prodotto**:

$u = 1 + f \cdot g$ con $f = e^{3x}$, $g = \cos x$

$$u'(x) = 0 + (e^{3x})' \cdot \cos x + e^{3x} \cdot (\cos x)'$$
$$= (3e^{3x}) \cdot \cos x + e^{3x} \cdot (-\sin x)$$
$$= e^{3x}(3\cos x - \sin x)$$

RISULTATO FINALE

Combiniamo i risultati (regola catena):

$$y' = \frac{e^{3x}(3\cos x - \sin x)}{2\sqrt{1 + e^{3x}\cos x}}$$

SCHEMA DI DERIVAZIONE A CIPOLLA

Livello Esterno: Radice Quadrata

Funzione		Derivata
$\sqrt{\square}$	→	$1 / (2\sqrt{\square})$

Livello Medio: Somma

$1 + \text{Prodotto}$ → $0 + (\text{Prodotto})'$

Livello Interno: Prodotto & Esponenziale

$f = e^{3x}$	$f' = 3e^{3x}$
$g = \cos x$	$g' = -\sin x$

Regola Prodotto: f'g + fg'

$3e^{3x}\cos x - e^{3x}\sin x$

Consiglio: Quando derivi e^{3x}, non dimenticare la regola della catena interna: la derivata dell'esponente 3x è 3.

Esercizio: Derivazione Implicita

Curva: $x^2y + y^3 = 1$

1 Derivazione membro a membro rispetto a x

Applicare regola del prodotto per x^2y e regola della catena per y^3:

$$D(x^2y) = (x^2)'\cdot y + x^2\cdot(y)' = \mathbf{2xy + x^2y'}$$
$$D(y^3) = 3y^2\cdot(y)' = \mathbf{3y^2y'}$$
$$D(1) = 0$$

Equazione risultante:

$$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 0$$

2 Risoluzione per y'

Raccogliere i termini con y' a sinistra:

$$y'(x^2 + 3y^2) = -2xy$$

Isolare la derivata:

$$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$$

3 Calcolo pendenza nel punto P(0,1)

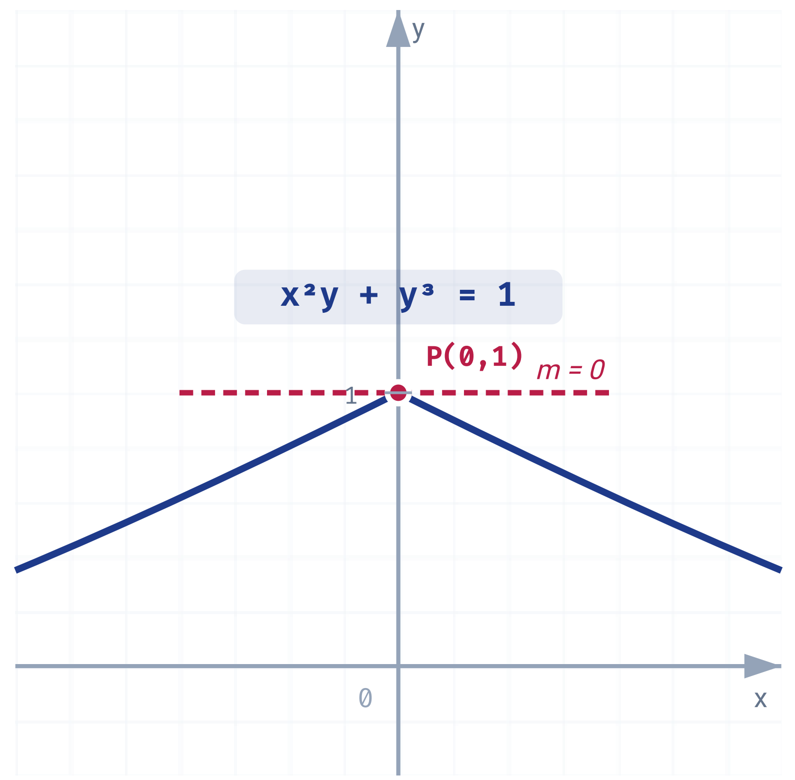
VERIFICA PUNTO

$0^2(1) + 1^3 = 0 + 1 = 1$ ✓

SOSTITUZIONE

$$y'(0,1) = \frac{-2(0)(1)}{0^2 + 3(1)^2} = 0$$

VISUALIZZAZIONE GRAFICA



ANALISI GEOMETRICA

La curva è simmetrica rispetto all'asse y (funzione pari rispetto a x). Il

Ottimizzazione Applicata

Minimizzare superficie a volume costante

1. MODELLIZZAZIONE DEL PROBLEMA

Variabili	r (raggio), h (altezza)
Vincolo Volume	$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = V / (\pi r^2)$
Funzione Obiettivo	$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2V/r$

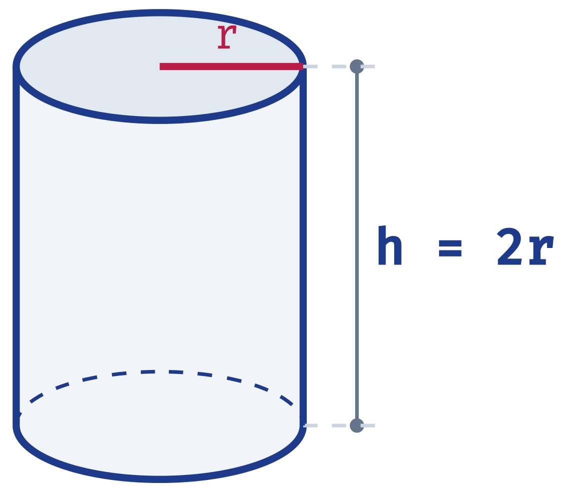
2. CALCOLO DERIVATA E PUNTI CRITICI

Derivata S'(r)	$S'(r) = 4\pi r - 2V/r^2$
Condizione stazionaria	$4\pi r - 2V/r^2 = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2V$
Raggio critico	$r^3 = V/(2\pi) \Rightarrow r = \sqrt[3]{V/2\pi}$

3. VERIFICA DEL MINIMO (DERIVATA SECONDA)

Calcolo S''(r)	$S''(r) = 4\pi + 4V/r^3$
Segno	$4\pi + 4V/r^3 > 0 \ (\forall\ r, V > 0) \Rightarrow$ Minimo

CONFIGURAZIONE OTTIMALE



FUNZIONE SUPERFICIE S(R)

Per Parti e Frazioni Parziali

A) INTEGRAZIONE PER PARTI (METODO TABULARE)

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 e^x \, dx$$

1. Si usa il metodo tabulare derivando ripetutamente il polinomio (x^2) finché si annulla e integrando l'esponenziale (e^x).
2. Moltiplicare i termini in diagonale alternando i segni (+, -, +).

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

B) FRAZIONI PARZIALI

Calcolare l'integrale razionale:

$$\int (2x + 1) / (x^2 - x - 2) \, dx$$

1. Fattorizzare denominatore: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
2. Decomposizione:
   $(2x+1)/[(x-2)(x+1)] = A/(x-2) + B/(x+1)$
3. Risolvere per A e B (Metodo dei residui):
   $x=2 \Rightarrow 5 = 3A \Rightarrow A = 5/3$
   $x=-1 \Rightarrow -1 = -3B \Rightarrow B = 1/3$

$$= (5/3)\ln|x - 2| + (1/3)\ln|x + 1| + C$$

SCHEMA METODO TABULARE

SEGNO	DERIVATA (U)	INTEGRALE (DV)
(+)	x^2	e^x
(-)	$2x$	e^x
(+)	2	e^x
(stop)	0	e^x

SCHEMA DECOMPOSIZIONE

$$\frac{2x + 1}{(x - 2)(x + 1)}$$

=

POLO X = 2	POLO X = -1
A = 5/3	**B = 1/3**
Termine: A/(x-2)	Termine: B/(x+1)

Integrali Doppi e Derivate Seconde

A) DERIVATE PARZIALI SECONDE

Funzione: $f(x,y) = x^2 y + e^{xy}$

Prime: $f_x = 2xy + ye^{xy}$, $f_y = x^2 + xe^{xy}$

Seconde: $f_{xx} = 2y + y^2 e^{xy}$, $f_{yy} = x^2 e^{xy}$

Miste: $f_{xy} = 2x + e^{xy}(1+xy)$

Teorema di Schwarz verificato: $f_{xy} = f_{yx}$

B) INTEGRALE DOPPIO SU TRIANGOLO D

Dominio D: $0 \le y \le x \le 1$. Integrale: $\iint_D (x+y)\,dA$

1. Impostazione (Domino semplice rispetto a y):

$$I = \int_0^1 \left[\int_y^1 (x+y)\,dx \right] dy$$

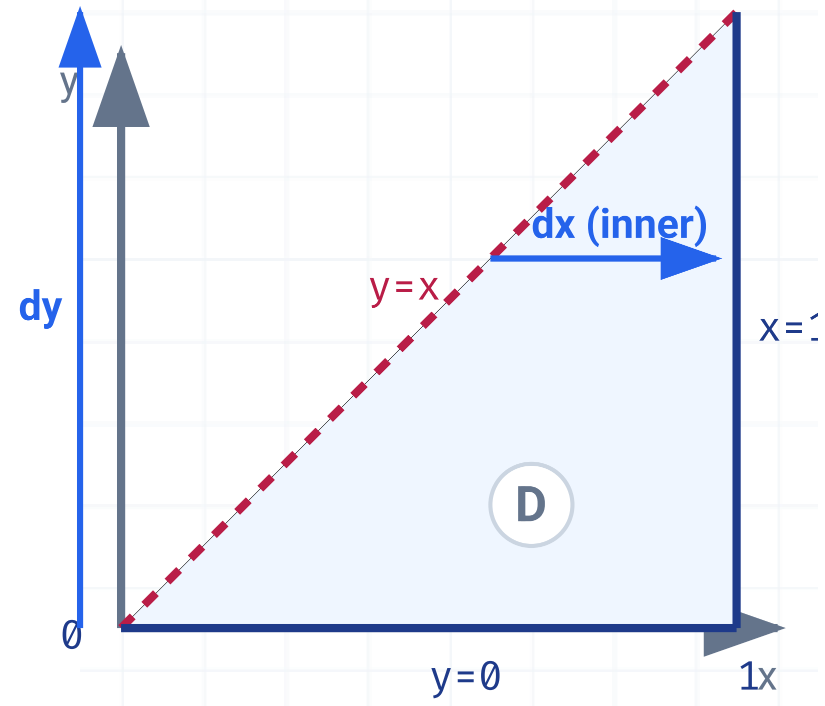
Interno: $\left[x^2/2 + yx \right]_{x=y}^{x=1} = (1/2+y) - (y^2/2+y^2) = 1/2 + y - 3y^2/2$

Esterno: $\int_0^1 (1/2 + y - 3y^2/2)\,dy = \left[y/2 + y^2/2 - y^3/2 \right]_0^1$

Risultato: $1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$

NOTA SOLIDI Volume Cono: $V = (1/3)\pi R^2 h$

DOMINIO D E SCHEMA INTEGRAZIONE



Strategia Integrazione:
Poiché l'integrale interno è in *dx*, fissiamo una quota *y* e integriamo orizzontalmente dalla retta $x=y$ fino alla retta verticale $x=1$. Successivamente integriamo in *dy* da 0 a 1.

Applicazione 1: Calcolo Volume Cupola

Architettura & Strutture

🏛 Problema Architettonico

Calcolare il volume esatto di una cupola emisferica (es. Pantheon di Roma, cupole geodetiche moderne) per stimare quantità di materiali, pesi strutturali e carichi su fondazioni.

Applicazione: Computo metrico, analisi carichi, dimensionamento strutture.

MODELLO MATEMATICO (COORD. SFERICHE)

DOMINIO D (EMISFERO)

$0 \le \rho \le R$

$0 \le \varphi \le \pi/2$ (latitudine)

$0 \le \theta \le 2\pi$ (longitudine)

VARIANTE CALOTTA

Per altezza $h < R$:

$V = \pi h^2(3R - h)/3$

CALCOLO INTEGRALE TRIPLO

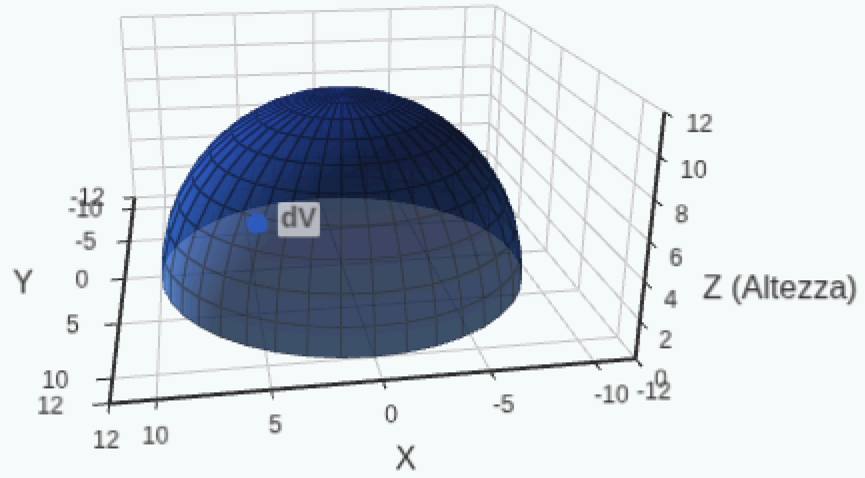
$$V = \iiint_D \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)\, d\varphi \cdot \int_0^R \rho^2\, d\rho$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos(\varphi)]_0^{\pi/2} \cdot [\rho^3/3]_0^R$$

$$V = (2\pi) \cdot (1) \cdot (R^3/3) = 2/3\, \pi R^3$$

R = Raggio Cupola



COORD. RADIALE	ZENITALE	AZIMUTALE
ρ (rho)	φ (phi)	θ (theta)

Il volume $2/3\, \pi R^3$ è esattamente la metà del volume di una sfera completa ($4/3\, \pi R^3$).

APPLICAZIONE 2: Carico Strutturale su Archi

Analisi Statica e Integrali

PROBLEMA INGEGNERISTICO

Calcolo della forza risultante e distribuzione del momento flettente su strutture ad arco (ponti, volte) soggette a carichi verticali distribuiti.

MODELLO GEOMETRICO

Arco Parabolico:

$y(x) = k \cdot x(L - x)$

su $0 \le x \le L$ con carico uniforme w [N/m]

FORMULAZIONE INTEGRALE

Forza Risultante Verticale $F = \int_0^L w\, dx = wL$

Carico lungo asse curvo $F_s = \int_0^L w \sqrt{(1+(y')^2)}\, dx$

Momento Flettente (Eulero-Bernoulli)

$$M''(x) = -w \Rightarrow M(x) = wLx/2 - wx^2/2$$

Ottenuto integrando due volte con condizioni al contorno M(0)=M(L)=0.

APPLICAZIONI PRATICHE

- Ponti ad arco
- Volte in muratura
- Armature

ANALISI STRUTTURALE 3D

Max Momento · Compressione · ↓ Carico w

L'integrale della curvatura determina la distribuzione degli sforzi interni.

APPLICAZIONE 3: Baricentro Strutture Complesse

Ingegneria Strutturale

PROBLEMA STRUTTURALE

Determinare il **centro di massa (baricentro)** di un pilastro a sezione variabile (conico) per l'analisi di stabilità e calcolo del ribaltamento.

MODELLO MATEMATICO

Geometria (Colonna Conica):

$$r(z) = r_0(1 - z/H) \quad \text{per} \quad 0 \leq z \leq H$$

Volume Totale:

$$V = \int_0^H \pi\, r(z)^2\, dz = \pi\, r_0^2\, H / 3$$

Coordinata Baricentro:

$$\bar{z} = (1/V) \int_0^H z \cdot \pi\, r(z)^2\, dz = H/4$$

*misurato dalla base maggiore

APPLICAZIONI INGEGNERISTICHE

- Verifica stabilità pilastri conici e torri
- Calcolo spinta sismica equivalente (massa concentrata)
- Progettazione fondazioni con carico eccentrico
- Analisi del ribaltamento di strutture snelle

VISUALIZZAZIONE 3D COLONNA E BARICENTRO

Baricentro G (z = H/4)
Volume Strutturale

Calcolo Volume Scavo Terreno

Problema di Cantiere e Topografia

PROBLEMA CANTIERE

Determinare il volume di terra da scavare (taglio) o riportare (riempimento) tra il terreno esistente $z_e(x,y)$ e la superficie di progetto $z_p(x,y)$ su un'area D.

SCAVO (Taglio)
$z_e > z_p$ ($V > 0$)

RIPORTO (Riempimento)
$z_e < z_p$ ($V < 0$)

MODELLO MATEMATICO

$$V = \iint_D [z_e(x,y) - z_p(x,y)]\, dA$$

Metodo pratico: Interpolazione da rilievo topografico (TIN/DTM) e integrazione numerica (metodo prismi).

ESEMPIO APPLICATIVO

Dati: Rettangolo D 50m × 30m

$z_e = 10 + 0.05x + 0.03y$ (Terreno)

$z_p = 11$ (Piano Progetto)

Obiettivo: Calcolare bilancio volumi

APPLICAZIONI PROFESSIONALI

- Computo metrico movimenti terra
- Bilancio scavo-riporto per ottimizzazione trasporti
- Pianificazione fasi cantiere e stima costi

VISUALIZZAZIONE 3D TERRENO E PROGETTO

- Scavo ($z_e > z_p$)
- Riporto ($z_e < z_p$)
- Terreno Esistente
- Piano Progetto

Il volume è l'integrale della differenza tra le due superfici

Area D: 1500 m²

Momento d'Inerzia e Sezioni

Resistenza alla flessione di travi

Formule Fondamentali

DEFINIZIONI INTEGRALI

Area

$$I_x = \iint_A y^2 dA, \quad I_y = \iint_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \iint_A xy \, dA$$

TEOREMA DI STEINER

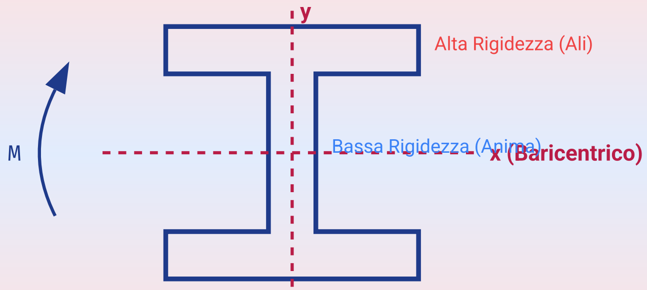
$$I = I_c + A \cdot d^2$$

Fondamentale per il metodo composito (sezioni I, T, L).

FORME NOTEVOLI

Rettangolo	$I_x = \frac{bh^3}{12}$
Cerchio	$I = \frac{\pi r^4}{4}$
Tubo Circ.	$I = \frac{\pi(R^4-r^4)}{4}$
Profilo I	*Composito (Anima + Ali)*

Analisi e Applicazioni



Verifica Tensioni

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_x}$$

La tensione massima si ha nei punti più distanti dall'asse neutro.

Metodo Composito

1. Scomporre la sezione complessa (I, T, L) in rettangoli semplici.
2. Calcolare I_c di ogni parte.
3. Traslare con Steiner $(+Ad^2)$.
4. Sommare i contributi.

Applicazioni Pratiche:

Ottimizzazione peso/resistenza (es. travi alveolari), verifica instabilità a carico di punta, analisi ponti e grattacieli.

Il momento d'inerzia è una misura geometrica della resistenza alla rotazione flettente.

Applicazione 6: Superficie Tetto Complesso

Architettura & Ingegneria Civile

PROBLEMA ARCHITETTONICO

Calcolo dell'area superficiale di coperture curve (paraboloidi, volte a botte, superfici free-form) fondamentale per il computo metrico dei materiali (tegole, guaine impermeabilizzanti, isolanti).

MODELLO MATEMATICO (INTEGRALE DI SUPERFICIE)

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2}\, dx\, dy$$

ESEMPIO 1: COPERTURA A PARABOLOIDE

Superficie $z = (x^2 + y^2) / R$ su base circolare $x^2 + y^2 \leq a^2$.

In coordinate polari, $\partial z/\partial r = 2r/R$:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \sqrt{1 + (2r/R)^2} \cdot r\, dr\, d\theta$$

Risoluzione con sostituzione $u = 1 + 4r^2/R^2$:

$$\mathbf{S = (\pi R/6) \cdot [(1 + (2a/R)^2)^{(3/2)} - 1]}$$

ESEMPIO 2: VOLTA A BOTTE

Cilindrica di raggio R, lunghezza L e angolo θ.

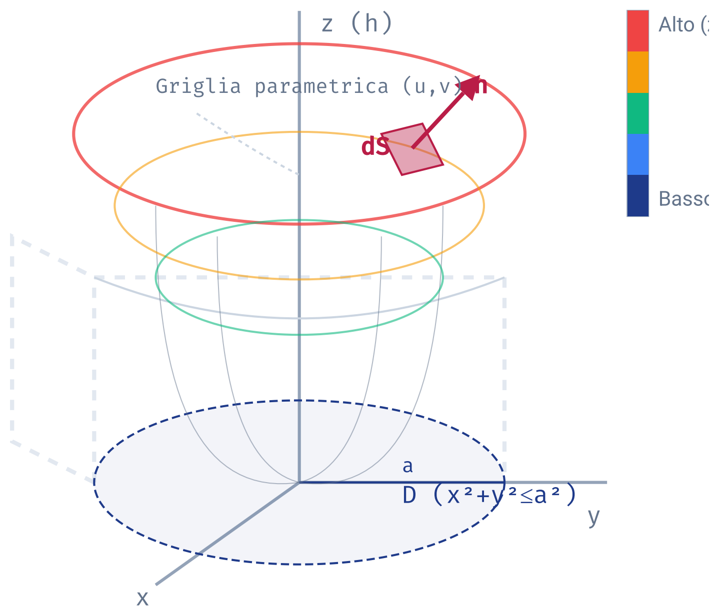
$$S = L \cdot R \cdot \theta$$

Sviluppo piano della superficie cilindrica.

APPLICAZIONI PRATICHE

- Preventivo costi rivestimenti
- Stima isolamento termico
- Verifica drenaggio acque
- Computo metrico appalti

VISUALIZZAZIONE 3D SUPERFICIE



Il patch **dS** rappresenta l'elemento infinitesimo di superficie. L'area totale è la somma di tutti i dS integrati sul dominio di base D.

APPLICAZIONE 7: FISICA TECNICA

Flusso Termico in Pareti Curve

Integrazione in Coordinate Cilindriche

Modello Matematico

INTEGRALE DI FLUSSO

Fourier

$$\dot{Q} = \iint_S -k \nabla T \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Flusso attraverso una superficie curva S.

CONDUZIONE RADIALE

Cilindro

Profilo Temperatura $T(r)$:

$$T(r) = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln(r_o/r_i)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

Flusso Totale $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi k L (T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)}$$

PARETE MULTISTRATO

Analogo Elettrico

R_{eq} = \sum \frac{\ln(r_{j+1}/r_j)}{2\pi

Analisi e Applicazioni

Il Problema Termico

Calcolare la dispersione termica attraverso pareti curve (tubazioni, serbatoi) per dimensionare correttamente lo spessore dell'isolante e prevenire condensa.

Ambiti di Applicazione

HVAC

Industria

Pressione Idrostatica su Dighe

Calcolo Integrale e Stabilità

LEGGE DI STEVINO

Pressione a profondità z:

$$p(z) = \rho g(h - z)$$

ρ (Acqua):	1000 kg/m³
g:	9.81 m/s²

FORZA TOTALE & INTEGRALE

Superficie curva generica:

$$F = \iint_S p(z)\cdot n \, dA$$

Parete piana verticale:

$$F = \rho g A \cdot h_c$$

h_c = profondità baricentro

ANALISI STABILITÀ & APPLICAZIONI

- **Centro di Spinta (z_{cp}):** Punto di applicazione della risultante. Per parete rettangolare verticale: $z_{cp} = (2/3)h$ dalla superficie.
- **Dighe a Gravità:** Il momento ribaltante è calcolato rispetto alla base usando F e il suo braccio (h/3 dal fondo).
- **Paratoie:** Dimensionamento dei meccanismi di sollevamento in base alla spinta idrostatica totale.

PARATOIA RETTANGOLARE

Larghezza **b = 5m**, Altezza **h = 4m**

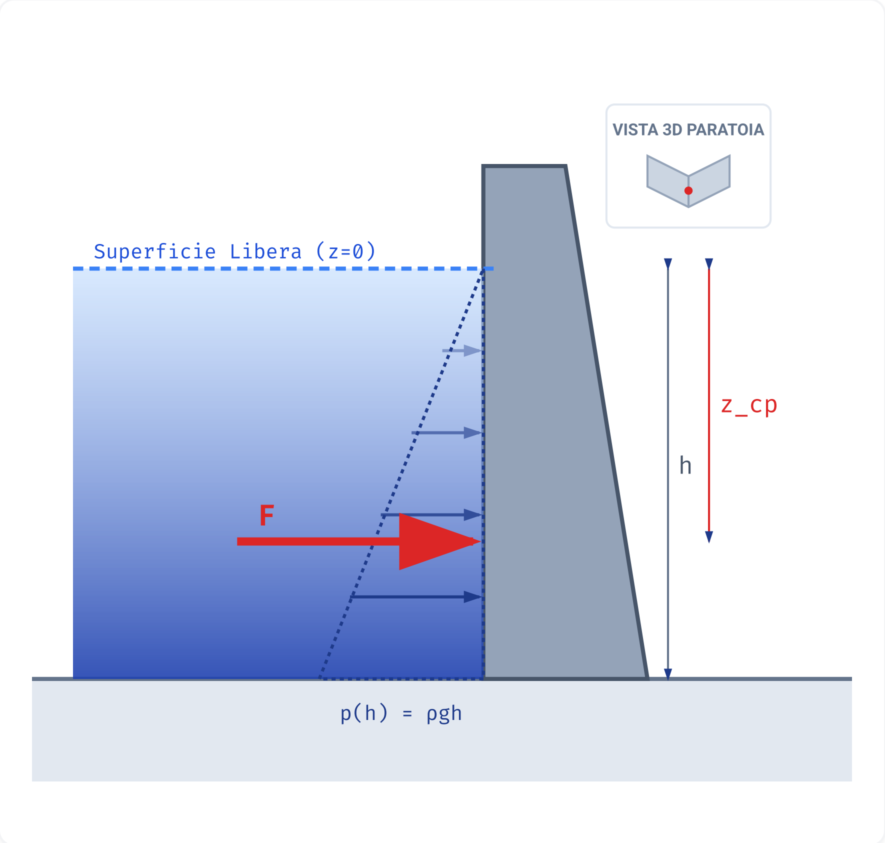
Spinta Totale:

ESEMPIO PRATICO

$z_{cp} = 2.67\text{m}$

dalla superficie (h/3 dal fondo)

MODELLO FISICO E DIAGRAMMA PRESSIONI



Il diagramma delle pressioni è **triangolare**. La forza risultante **F** passa per il baricentro del triangolo delle pressioni, situato a **2/3 della profondità**.

Il momento ribaltante aumenta col cubo dell'altezza dell'acqua ($M \propto h^3$).