

Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso Integrato di Scienza e Tecnica delle Costruzioni

Modulo di **Tecnica delle Costruzioni**

A.A. 2025-2026
2° semestre

CFU 8

Docente

Marco Zucca

I COEFFICIENTI DI FLESSIBILITA' E RIGIDEZZA



POLITECNICO

MILANO 1863

Scuola Master Fratelli Pesenti

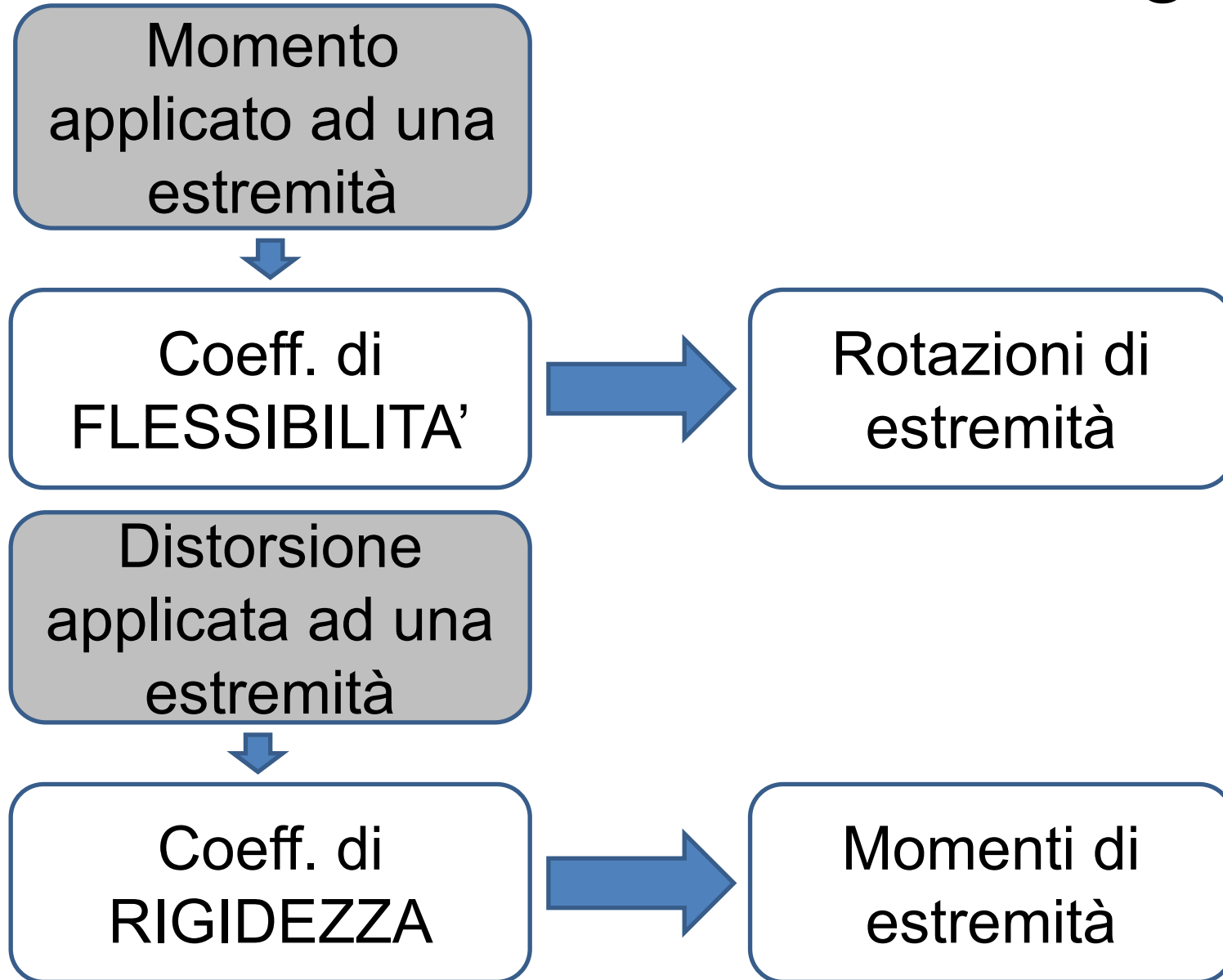


Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E ARCHITETTURA

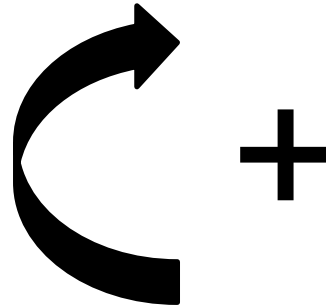
Coefficienti di flessibilità e rigidezza



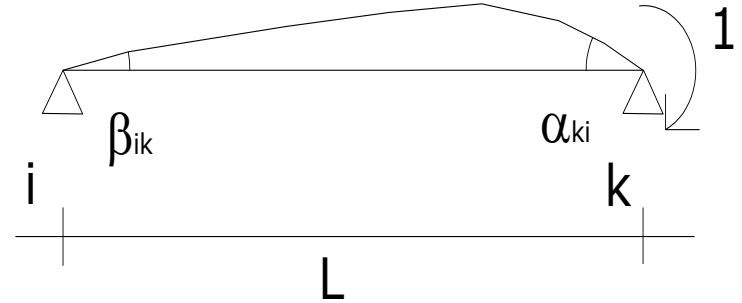
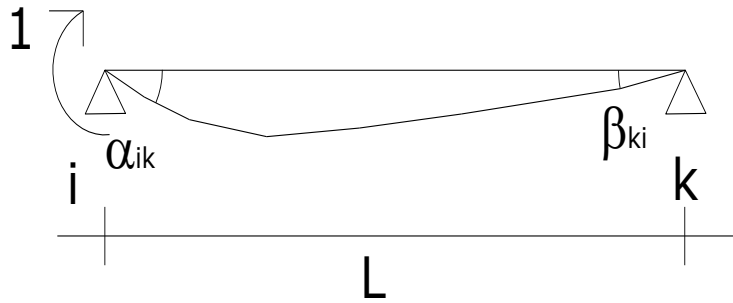
Convenzione dei segni

ROTAZIONI E MOMENTI

POSITIVI SE ORARI



I coefficienti di flessibilità

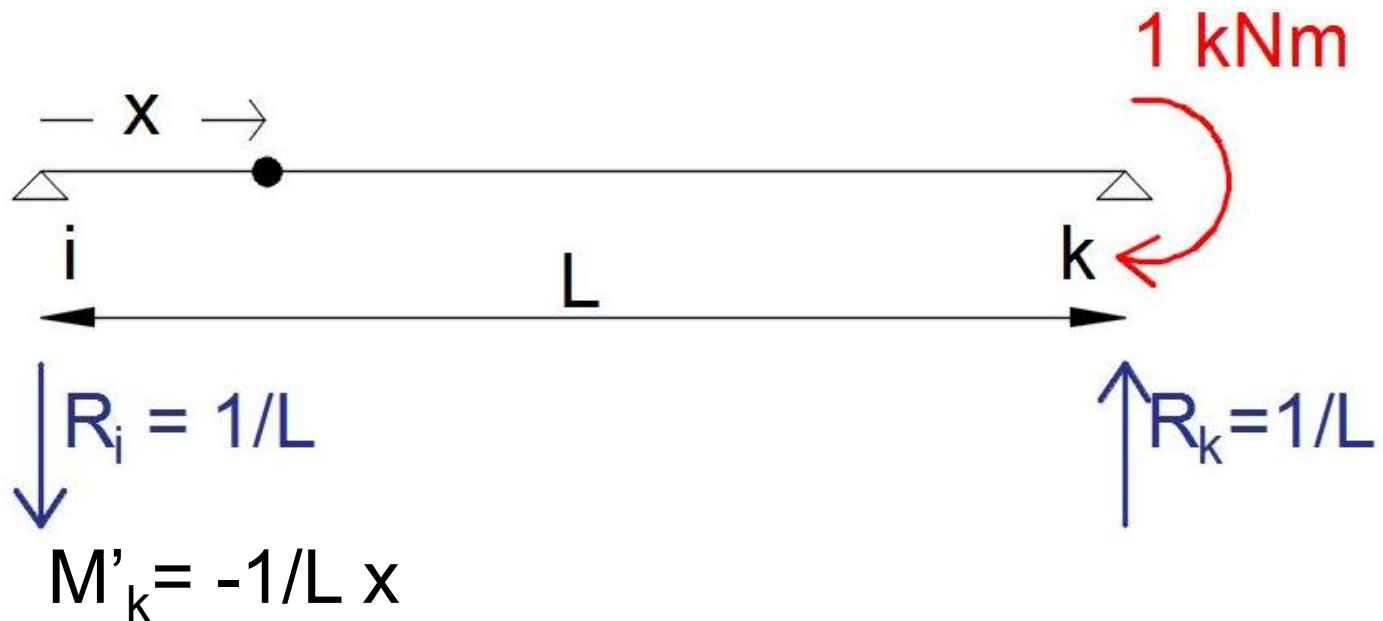
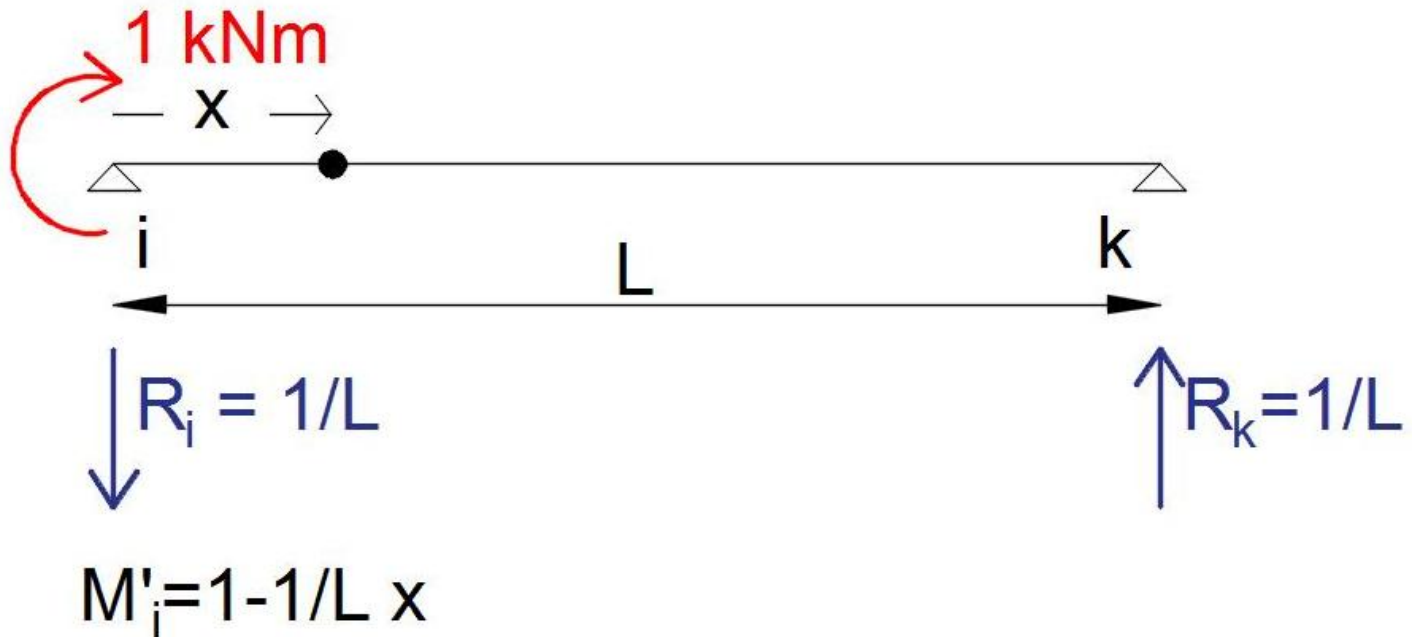


$$\alpha_{ik} = \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{E \cdot J}$$

$$\beta_{ki} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{E \cdot J}$$

$$\alpha_{ik} = \int_s M'_i \cdot d\varphi'_i = \int_0^L M'_i \cdot \frac{M'_i}{EJ} \cdot dx = \int_0^L \frac{M_i'^2}{EJ} \cdot dx$$

$$\beta_{ki} = \int_s M'_k \cdot d\varphi'_i = \int_0^L M'_k \cdot \frac{M'_i}{EJ} \cdot dx = \int_0^L \frac{M'_i \cdot M'_k}{EJ} \cdot dx$$



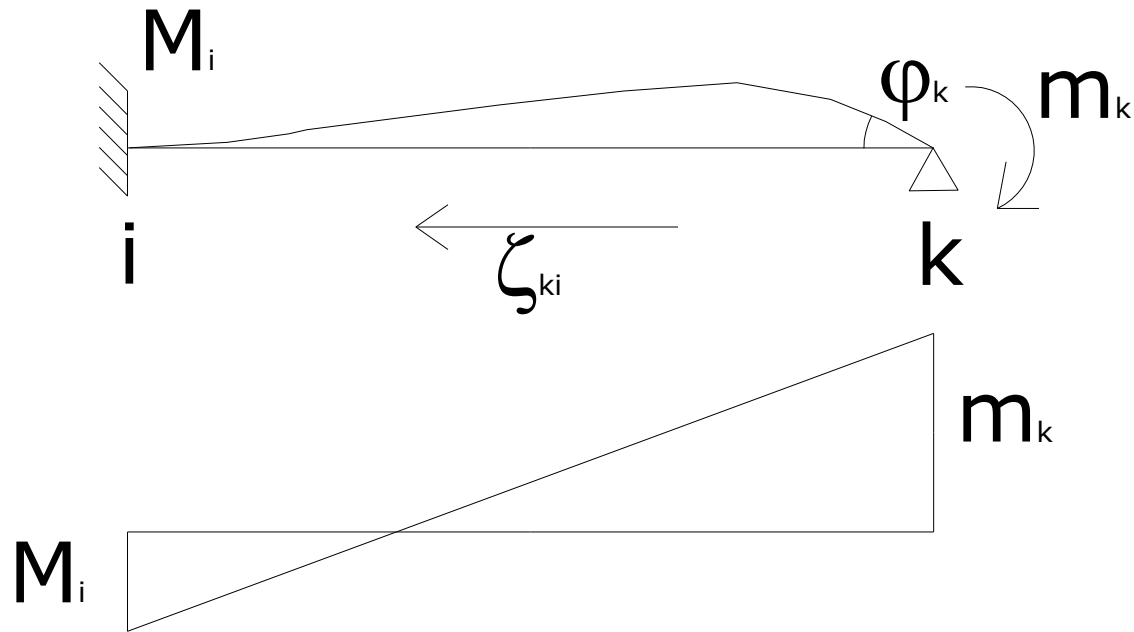
Si definisce:

- α_{ik} la **rotazione del nodo i** per effetto di una coppia unitaria positiva applicata al medesimo estremo i;
- β_{ki} la **rotazione del nodo k** per effetto di una coppia unitaria positiva applicata all'estremo i.

$$\alpha_{ik} = \int_0^L \frac{m'_i{}^2}{EJ} dx = \int_0^L \frac{\left(1 - \frac{1}{L}x\right)^2}{EJ} dx = \frac{1}{3} \frac{L}{EJ}$$

$$\beta_{ki} = \int_0^L \frac{m'_i \cdot m'_k}{EJ} dx = \int_0^L \frac{\left(1 - \frac{1}{L}x\right) \cdot \left(-\frac{1}{L}x\right)}{EJ} dx = -\frac{1}{6} \frac{L}{EJ}$$

Asta con incastro-cerniera



Se applico una coppia m_k nell'estremo k , in i si genera il momento iperstatico M_i , che per la **congruenza nel vincolo i** risulta:

$$\beta_{ik} m_k + \alpha_{ik} M_i = 0$$

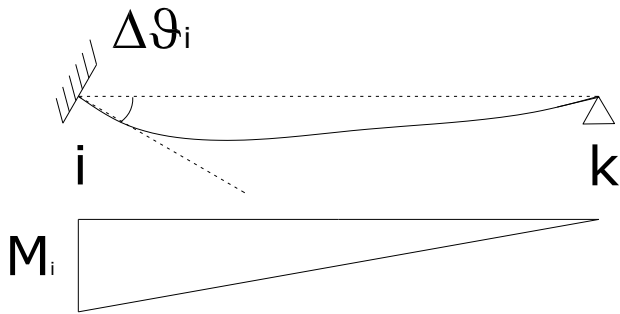
$$M_i = -(\beta_{ik} / \alpha_{ik}) m_k = -\zeta_{ik} m_k = 0.5 m_k$$

Asta con incastro-cerniera

Se imprimiamo all'estremo incastrato i una distorsione $\Delta\vartheta_i$ si ottiene

$$\Delta\vartheta_i = M_i \cdot \alpha_{ik} = M_i \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{EJ}$$

$$M_i = 3 \frac{EJ}{L} \cdot \Delta\vartheta_i = U_{ik} \cdot \Delta\vartheta_i$$



U_{ik} è il coefficiente di rigidezza



è il momento che si genera nell'estremo incastrato di un'asta incastrata e appoggiata quando nell'estremo incastrato è presente una rotazione oraria unitaria.

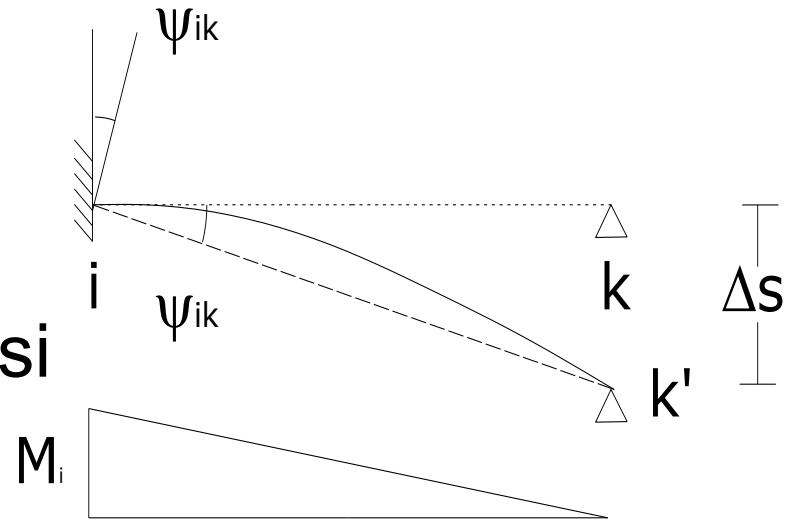
Asta con incastro-cerniera

Esaminiamo il caso in cui il vincolo cerniera k subisca un cedimento verticale Δs , che produce una rotazione rigida dell'asta ψ_{ik} .

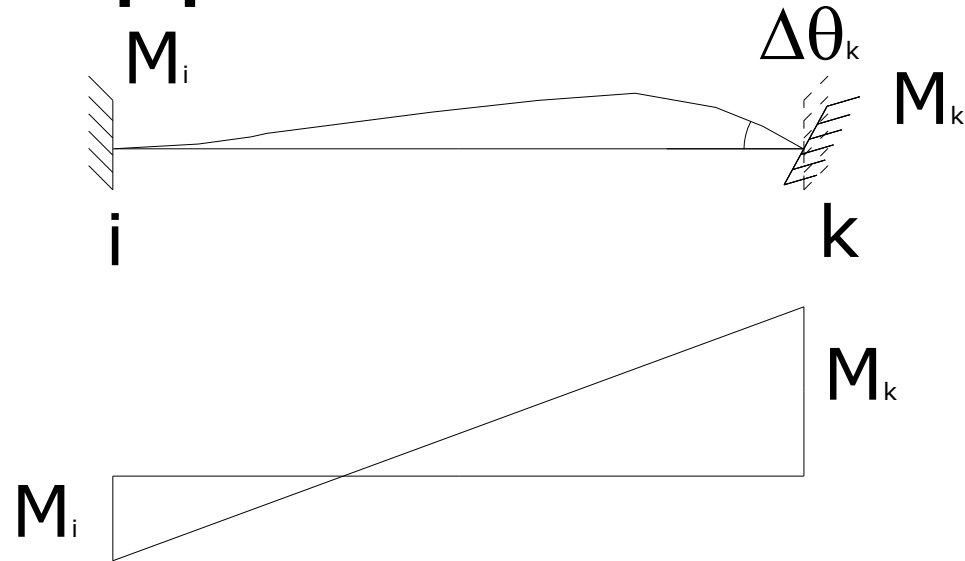
$$\psi_{ik} = \frac{\Delta s}{L}$$

Per la congruenza nel vincolo i si genera il momento:

$$M_i = -U_{ik} \cdot \psi_{ik} = -3 \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \psi_{ik}$$



Asta doppiamente incastrate



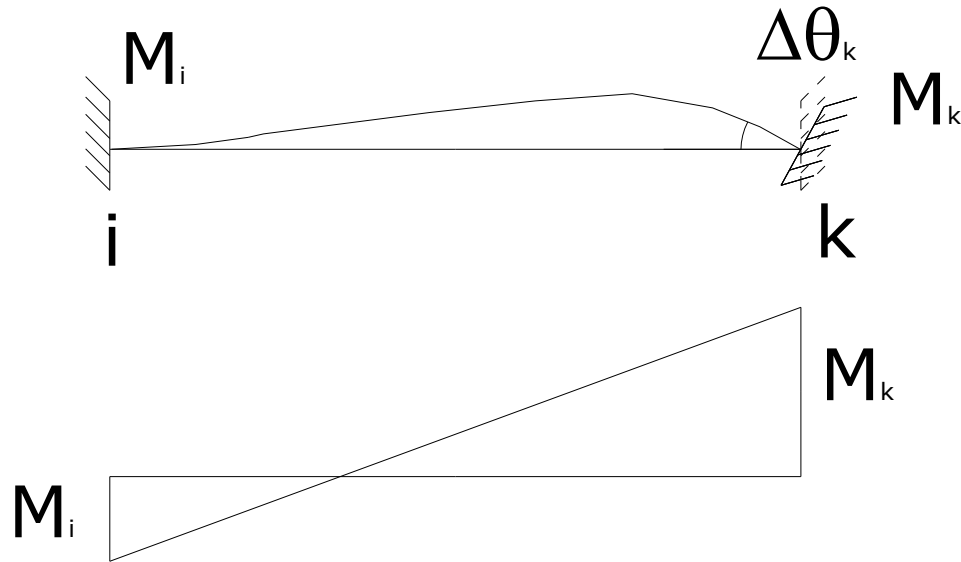
In k è applicata una distorsione $\Delta\vartheta_k$ e pertanto si generano alle estremità i momenti iperstatici M_i ed M_k .

Per la congruenza dei vincoli in i e in k possiamo scrivere:

$$M_i \cdot \alpha_{ik} + M_k \cdot \beta_{ik} = 0$$

$$M_k \cdot \alpha_{ki} + M_i \cdot \beta_{ki} = \Delta\vartheta_k$$

Asta doppiamente incastrate



$$M_i \cdot \alpha_{ik} + M_k \cdot \beta_{ik} = 0$$

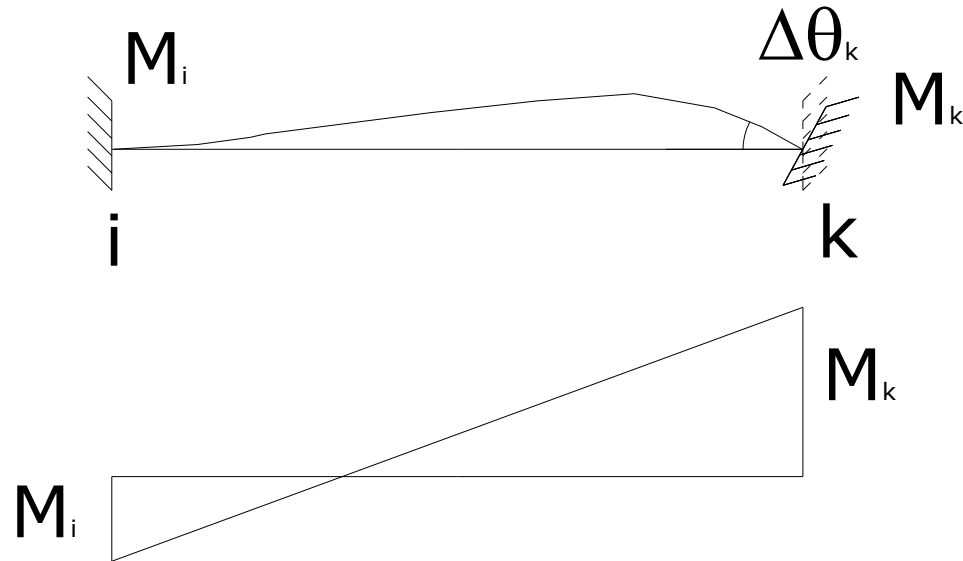
$$M_k \cdot \alpha_{ki} + M_i \cdot \beta_{ki} = \Delta\vartheta_k$$



$$M_i = -M_k \cdot \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \quad \rightarrow \quad M_k \cdot \alpha_{ki} + \left(-M_k \cdot \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \right) \cdot \beta_{ki} = \Delta\vartheta_k$$

$$M_k \left(\alpha_{ki} - \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \cdot \beta_{ki} \right) = M_k \left(\alpha_{ki} - \frac{\beta_{ik}^2}{\alpha_{ik}} \right) = \Delta\vartheta_k$$

Asta doppiamente incastrate

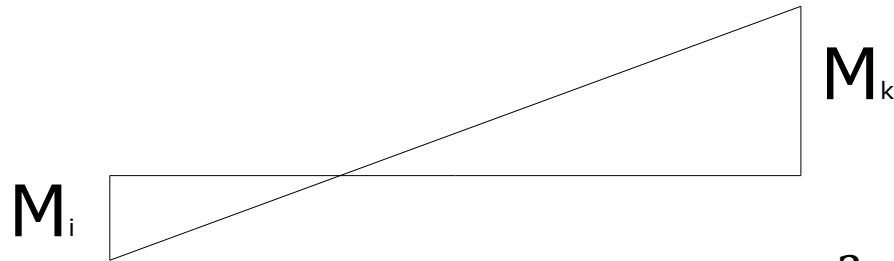
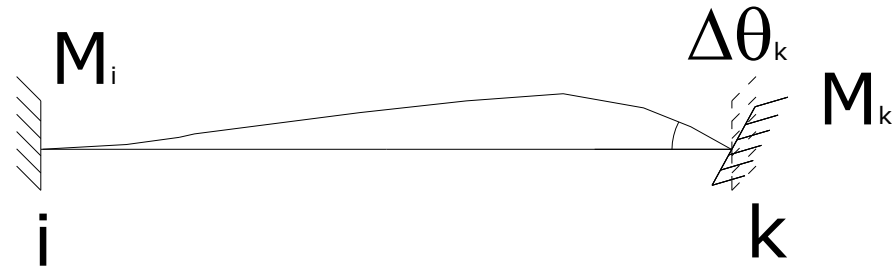


$$M_k \left(\alpha_{ki} - \frac{\beta_{ik}^2}{\alpha_{ik}} \right) = M_k \cdot \frac{1}{W_{ki}} = \Delta\vartheta_k$$

$$M_k = W_{ki} \cdot \Delta\vartheta_k$$

$$M_i = -M_k \cdot \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} = -W_{ki} \cdot \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \cdot \Delta\vartheta_k = V_{ik} \cdot \Delta\vartheta_k$$

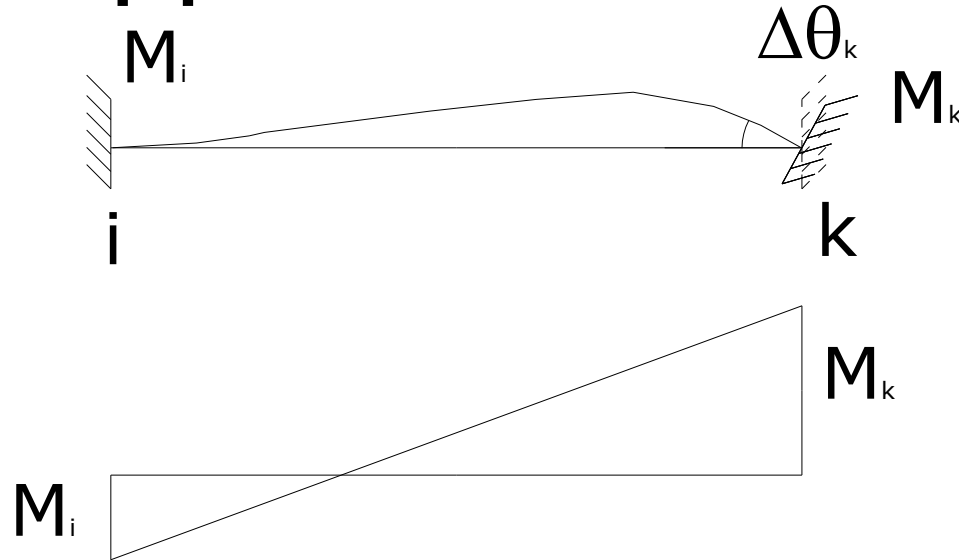
Asta doppiamente incastrate



$$\left(\alpha_{ki} - \frac{\beta_{ik}^2}{\alpha_{ik}} \right) = \frac{1}{W_{ki}} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{3} \frac{L}{EJ} - \frac{\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{EJ} \right)^2}{\frac{1}{3} \frac{L}{EJ}} \right) = \frac{1}{4} \frac{L}{EJ}$$

$$V_{ik} = -W_{ki} \cdot \frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} = -4 \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \frac{-\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{EJ}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{EJ}} = 2 \cdot \frac{EJ}{L}$$

Asta doppiamente incastrate



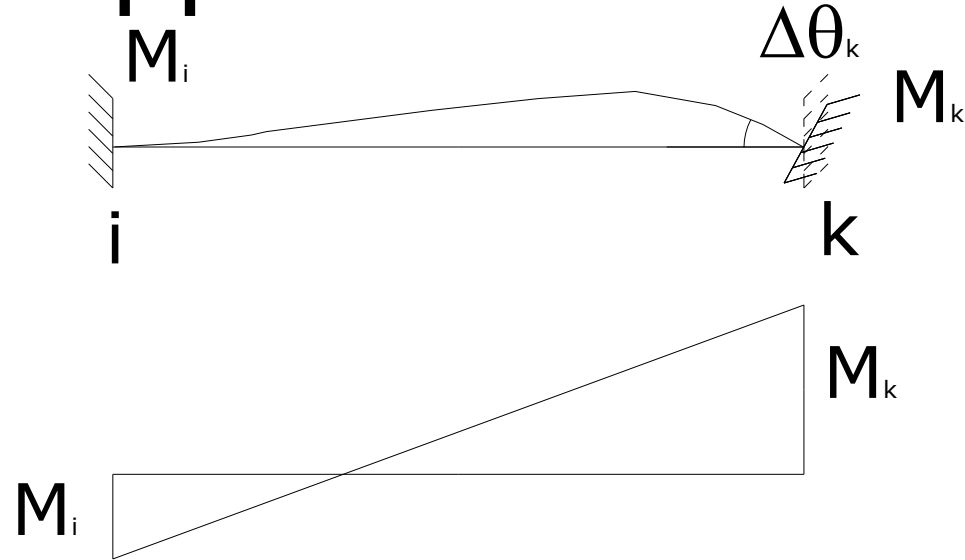
➔ W_{ki} è il coefficiente di rigidezza

è il momento che si genera nell'estremo incastrato k di un'asta doppiamente incastrata quando nell'estremo k è presente una rotazione oraria unitaria

➔ V_{ik} è il coefficiente di rigidezza

è il momento che si genera nell'estremo incastrato i di un'asta doppiamente incastrata quando nell'estremo k è presente una rotazione oraria unitaria

Asta doppiamente incastrate

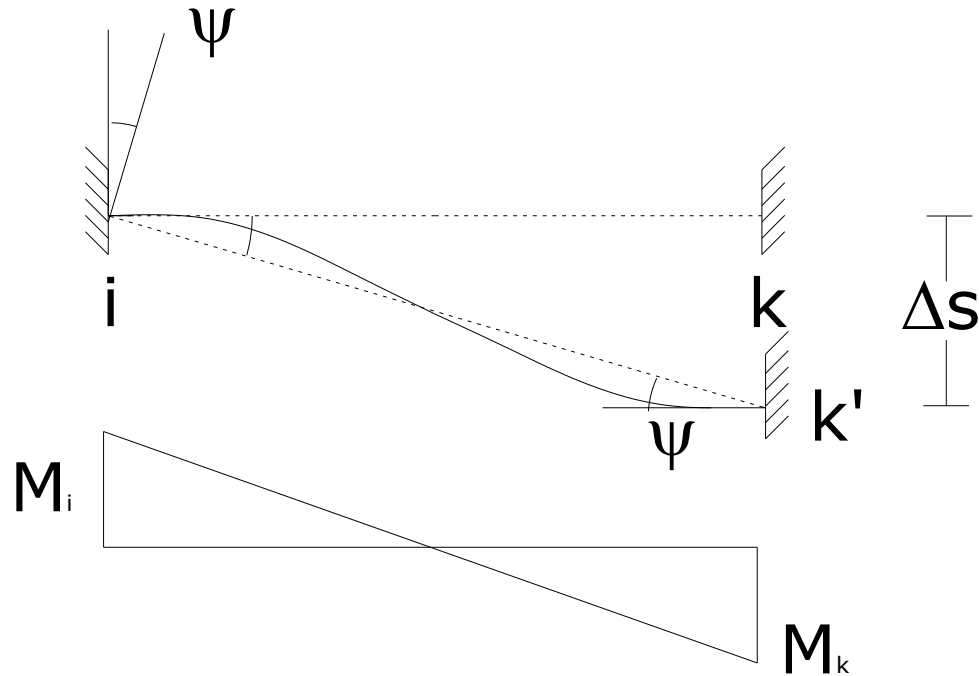


applicata una distorsione $\Delta\vartheta_k$ in k in i ed in k si generano i seguenti momenti:

$$M_k = W_{ki} \cdot \Delta\vartheta_k = 4 \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \Delta\vartheta_k$$

$$M_i = V_{ik} \cdot \Delta\vartheta_k = 2 \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \Delta\vartheta_k$$

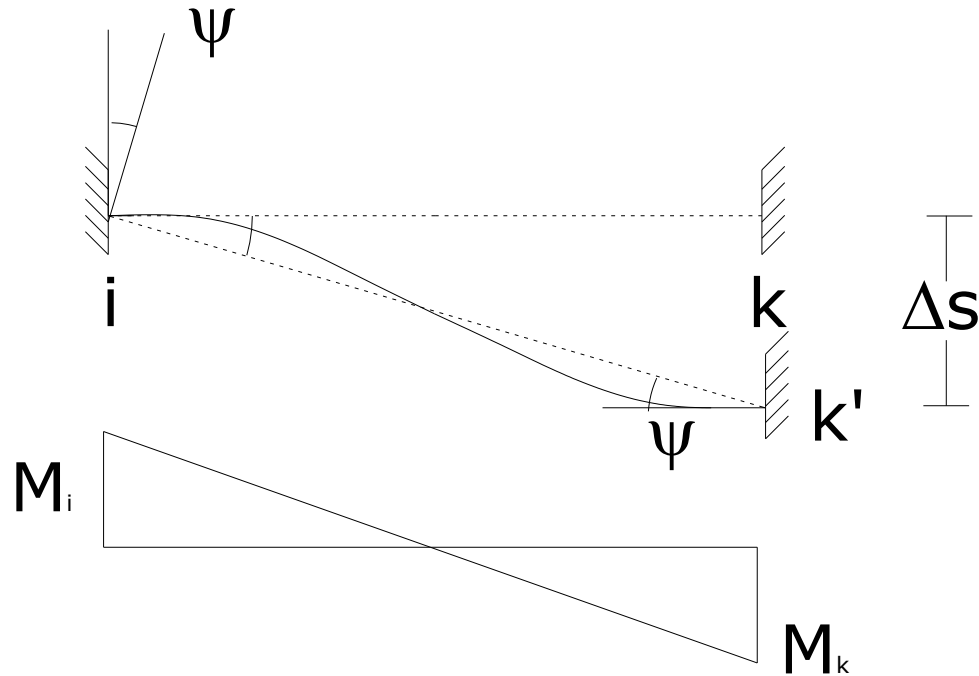
Asta doppiamente incastrate



Se un estremo subisce una traslazione Δs , si osserva che ciò equivale ad una applicazione di **una distorsione angolare** ai due estremi.

$$\psi = \frac{\Delta s}{L}$$

Asta doppiamente incastrate



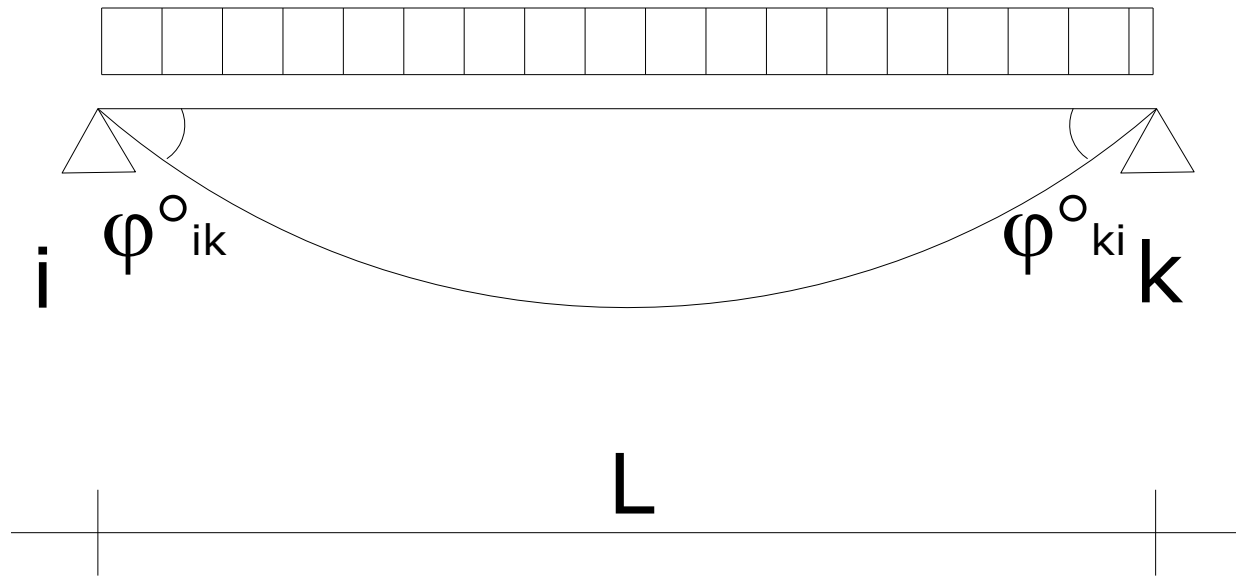
Per la congruenza nei vincoli i e k si generano rispettivamente i momenti:

$$M_i = -W_{ik} \cdot \psi - V_{ik} \cdot \psi = -S_{ik} \cdot \psi = -6 \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \psi$$

$$M_k = -W_{ki} \cdot \psi - V_{ki} \cdot \psi = -S_{ki} \cdot \psi = -6 \cdot \frac{EJ}{L} \cdot \psi$$

Effetti prodotti da carichi esterni

Trave appoggiata



$$\varphi_{0i} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M'_i}{EJ} dx$$

$$\varphi_{0k} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M'_k}{EJ} dx$$

$$M_0(x) = q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M'_i = 1 - \frac{x}{L}$$

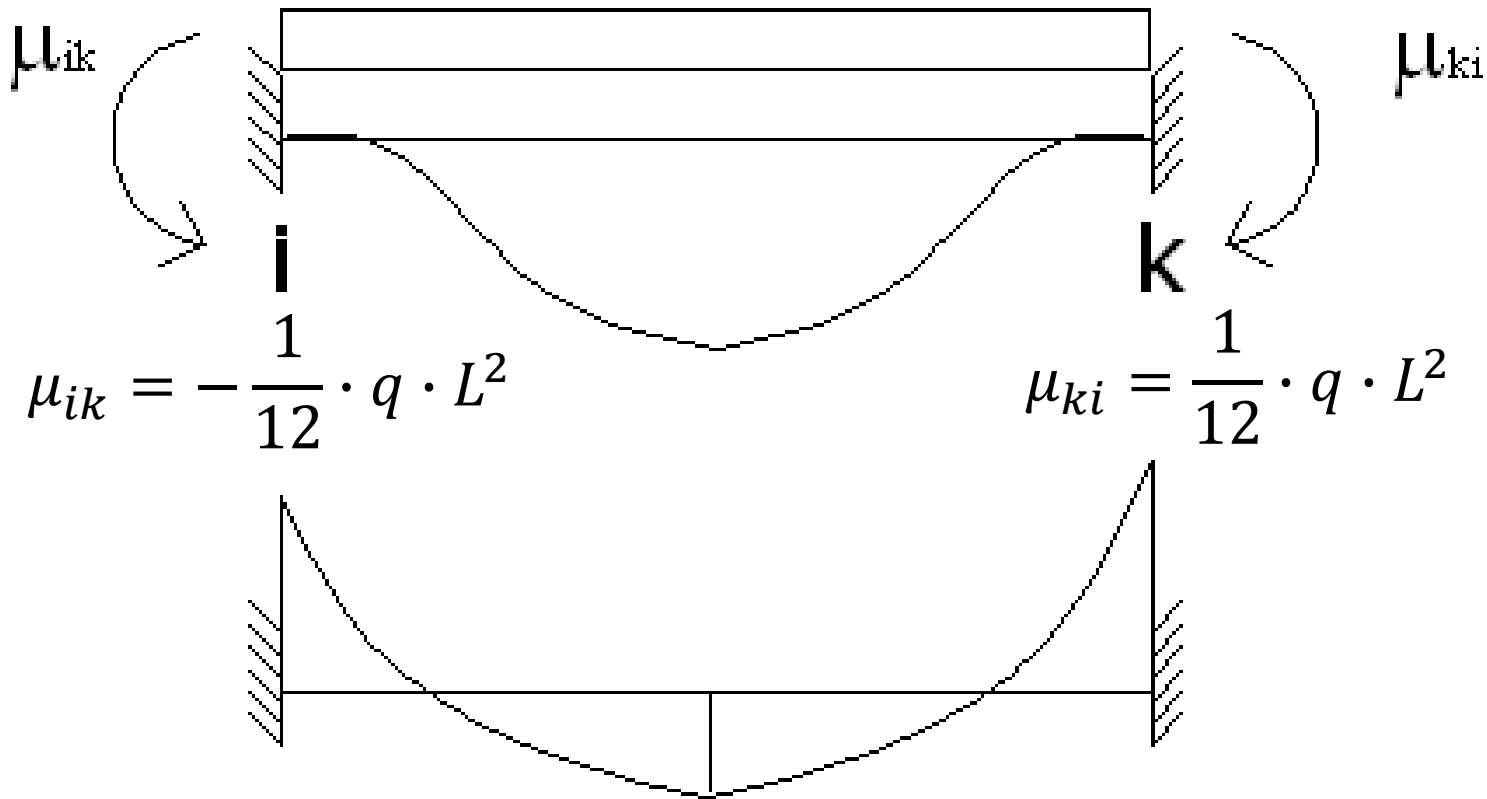
$$M'_k = -\frac{x}{L}$$

$$\varphi_{0i} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M'_i}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^L \left(\frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot EJ}$$

$$\varphi_{0k} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M'_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^L \left(\frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) \cdot \left(-\frac{x}{L} \right) dx = -\frac{q \cdot L^3}{24 \cdot EJ}$$

Effetti prodotti da carichi esterni

Trave incastrata



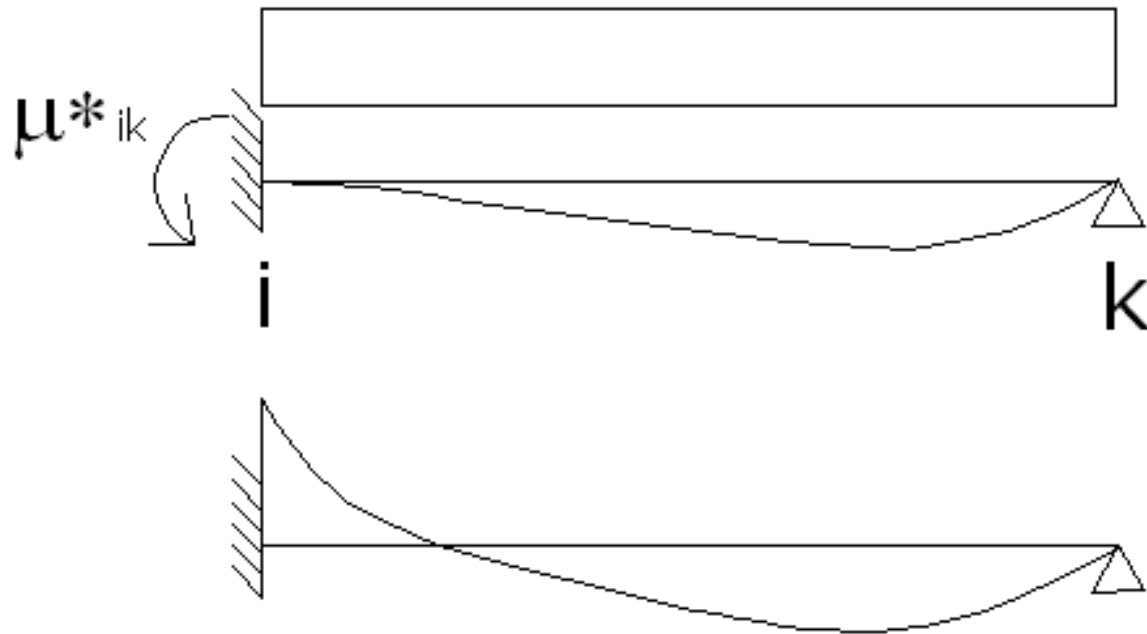
$$\mu_{ik} = -\frac{1}{12} \cdot q \cdot L^2$$

$$\mu_{ki} = \frac{1}{12} \cdot q \cdot L^2$$

$$\alpha_{ik} \cdot \mu_{ik} + \beta_{ik} \cdot \mu_{ki} = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ} \quad \beta_{ki} \cdot \mu_{ik} + \alpha_{ki} \cdot \mu_{ki} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ}$$

Effetti prodotti da carichi esterni

Trave incastrata-appoggiata

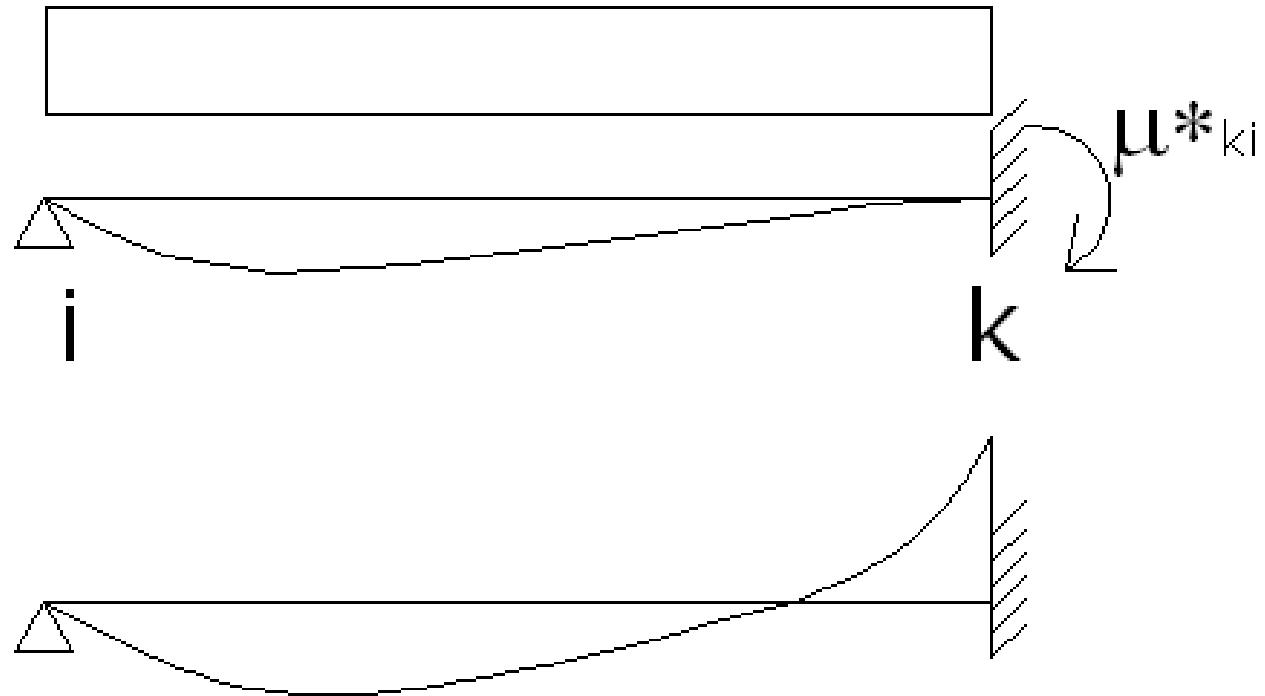


$$\alpha_{ik} \cdot \mu_{ik}^* = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ}$$

$$\mu_{ik}^* = -\frac{1}{8} \cdot qL^2$$

Effetti prodotti da carichi esterni

Trave incastrata-appoggiata

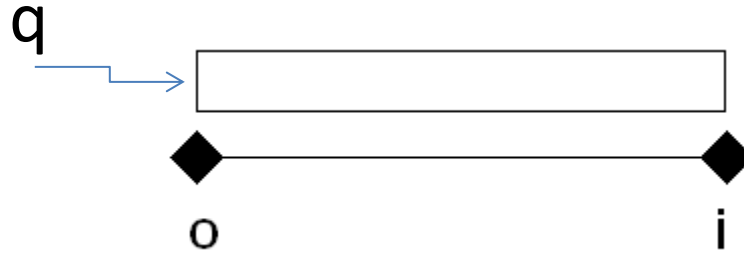


$$\alpha_{ki} \cdot \mu_{ki}^* = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ}$$

$$\mu_{ki}^* = \frac{1}{8} \cdot qL^2$$

Aste incastrate alle estremità

Riepilogo

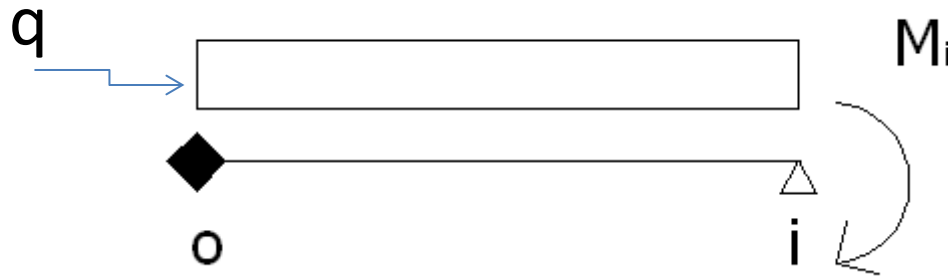


Se sono presenti: φ_o , φ_i , ψ_{oi} e un carico agente lungo l'asta q :

$$M_{oi} = \varphi_o \cdot W_{oi} + \varphi_i \cdot V_{oi} - \psi_{oi} \cdot S_{oi} + \mu_{oi}$$

Aste incastrate - incernierate

Riepilogo



Se sono presenti: φ_o , φ_i , ψ_{oi} , un carico agente lungo l'asta q ed una coppia M_i applicata all'estremità incernierata i :

$$M_{oi}^* = \varphi_o \cdot U_{oi} - \psi_{oi} \cdot U_{oi} + \mu_{oi}^* + \zeta_{io} \cdot M_i$$