Rendimenti: Definizione

Course Notes

Contents

0.1 Rendimento Isentropico 2
0.2 Differenza tra Lavoro Isentropico e Lavoro Reale 3
0.3 Rendimento politropico 6
0.4 E nel Caso di un Fluido Incomprimibile? 7
0.5 Riassumendo 8

1 Espansione 9
1.1 Differenza tra lavoro isoentropico e lavoro reale 10
1.2 Rendimenti 11
1.3 Riassumendo 12
1.4 Nel Caso di Fluido (o meglio flusso) Incomprimibile 13

2 Riassumendo 14

In figura è rappresentato il processo di compressione in un diagramma T-s.

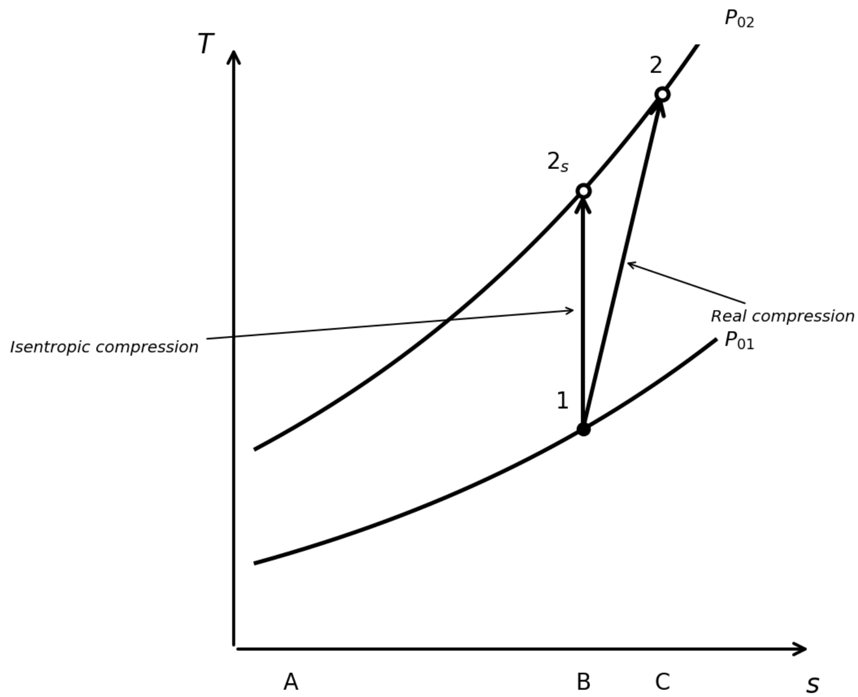

Figure 1: Diagramma T-s del processo di compressione

La transformazione $1 \rightarrow 2$ è la compressione reale, che può essere rappresentata come una politropica con esponente $m > \gamma$.

$$\frac{\rho^{m-1}}{T} = \text{cost} \quad ; \quad \frac{p}{\rho^m} = \text{cost} \quad ; \quad \frac{p}{T^{\frac{m}{m-1}}} = \text{cost} \tag{1}$$

I lavori di compressione reale e isentropico possono essere calcolati come segue:

$$w_C = -w_x = \int_1^2 dh_0 = c_p \int_1^2 dT_0 = c_p(T_{02} - T_{01}) \tag{2}$$

$$w_{C,IS} = -w_{x,IS} = \int_1^{2s} dh_{0,IS} = c_p \int_1^{2s} dT_{0,IS} = c_p(T_{02,IS} - T_{01}) \tag{3}$$

dove $dh_0 = c_p dT_0$ per un gas ideale. W

0.1 Rendimento Isentropico

Il rapporto tra lavoro isentropico e lavoro reale è il rendimento isentropico:

$$\eta_{IS} = \frac{w_{C,IS}}{w_C} = \frac{T_{02,IS} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{T_{02,IS}/T_{01} - 1}{T_{02}/T_{01} - 1} = \tag{4}$$

$$= \frac{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\beta^{\frac{m-1}{m}} - 1} \tag{5}$$

dove $\beta = \frac{p_{02}}{p_{01}}$ è il rapporto di compressione.
Graficamente, lavoro ideale (isentropico) e lavoro reale possono essere visti nel seguente modo:

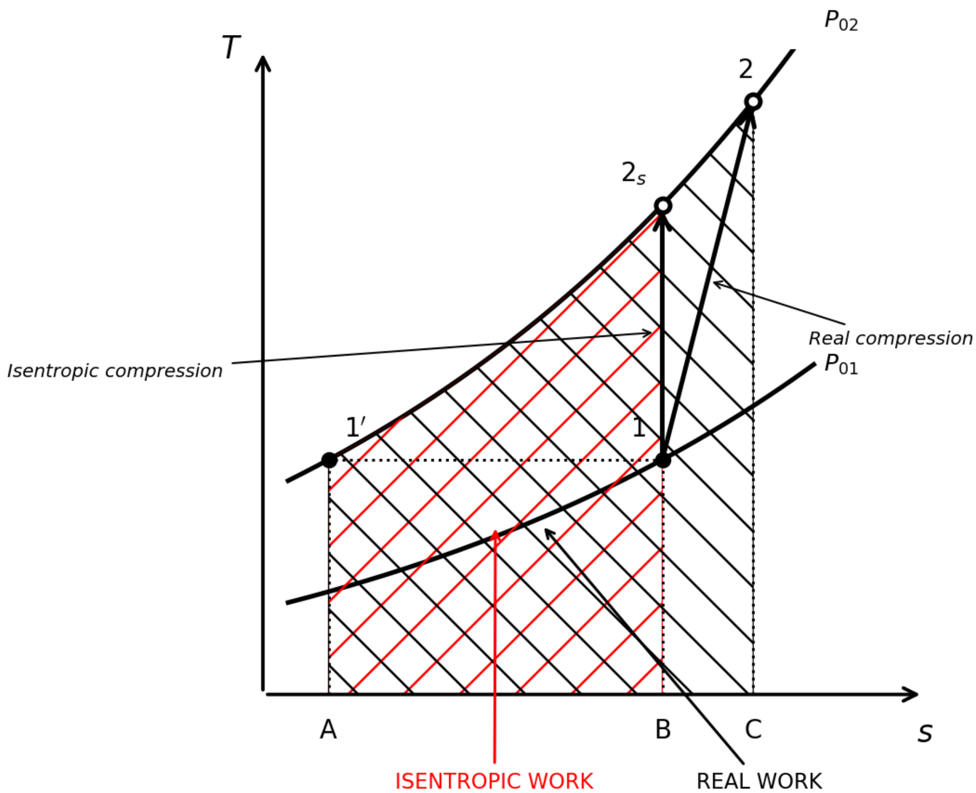

Figure 2: Rappresentazione grafica dei lavori nel diagramma T-s

L'area tratteggiata in rosso ($\mathrm{AREA}_{A1'2sB}$) rappresenta il lavoro isentropico, quella in nero il lavoro reale ($\mathrm{AREA}_{A1'2C}$).

0.2 Differenza tra Lavoro Isentropico e Lavoro Reale

La differenza tra il lavoro isentropico e il lavoro reale (A_{B2s2C}) è dato da 2 contributi:

1. $\int_1^2 Tds = \mathrm{AREA}_{B12C}$ (il lavoro perso, dovuto agli attriti)

2. AREA_{12s2}

   Quest'ultimo contributo viene chiamato lavoro di controrecupero, $w_{C,CR}$, ed è dovuto al fatto che il gas in una compressione reale ha una temperatura superiore (e quindi una densità inferiore) rispetto a quella che avrebbe avuto in una compressione isentropica. Infatti:

In una **compressione isoentropico**:

$$w_{C,IS} = \int_1^{2s} dh_{0,IS} = \int_1^{2s} T_0 ds + \int_1^{2s} \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{6}$$

Nella **compressione reale**:

$$w_C = \int_1^2 dh_0 = \int_1^2 T_0 ds + \int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{7}$$

$$\Delta W_C - \Delta W_{C,IS} = \underbrace{\int_1^2 T_0 ds}_{\text{LAVORO PERSO } w_{c,L}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0} - \int_1^{2s} \frac{dp_0}{\rho_0}}_{\text{LAVORO DI CONTRO-RECUPERO } w_{c_C R}} \tag{8}$$

Quando il lavoro di contro-recupero è dovuto non alle perdite, ma piuttosto alle minore densità del gas durante la compressione reale:

$$\int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0} > \int_1^{2s} \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{9}$$

Graficamente posso vedere questo fenomeno immaginando di sostituire alla transformazione reale $1 \to 2$ 2 trasformazioni isentropiche (come in figura), intervallate da un riscaldamento a pressione costante:

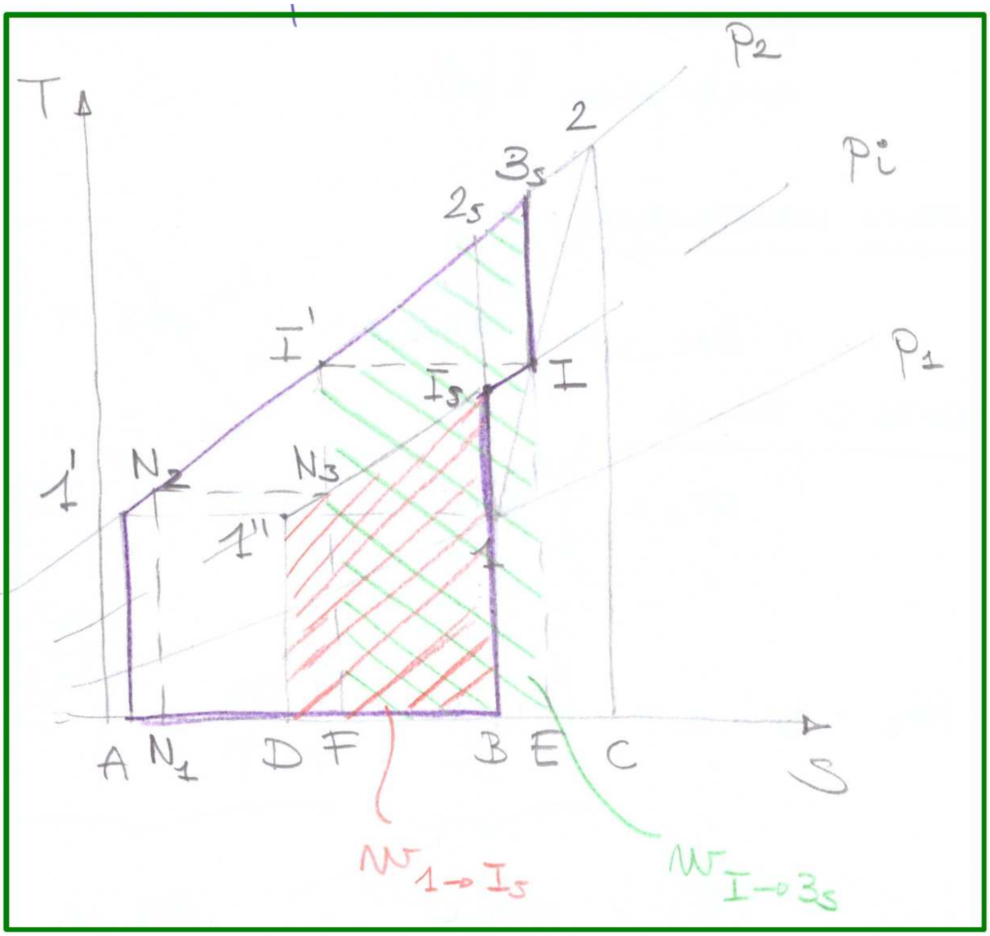

Figure 3: Trasformazioni isentropiche intervallate da riscaldamento a pressione costante

Il lavoro della transformazione $1 \to I_S$ è rappresentato dall'area $\text{AREA}_{DI'I_SB}$. Il lavoro della transformazione $I \to 3_S$ è rappresentato dall'area $\text{AREA}_{FI'3_sE}$.

Si può dimostrare che la somma dei due lavori è uguale all'area racchiusa in viola in figura ($AREA_{A1'3SIISB}$). Perché:

- L'area $AREA_{FN_3IE}$ è uguale a $AREA_{N_1N_2I'F}$
- L'area $AREA_{D1''N_3F}$ è uguale a $AREA_{A1'N_2N_1}$

Questo è dovuto al fatto che l'andamento della isobare in un piano T-s è funzione solo della temperatura (e non della pressione). Infatti in un'isobara:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \tag{10}$$

La precedente deriva direttamente dall'equazione del Tds, che per un'isobara diventa:

$$c_p dT = T ds + \frac{d\cancel{p}}{\cancel{\rho}} \tag{11}$$

subsectionArea Appena Calcolata e Numero di Compressioni Isoentropiche

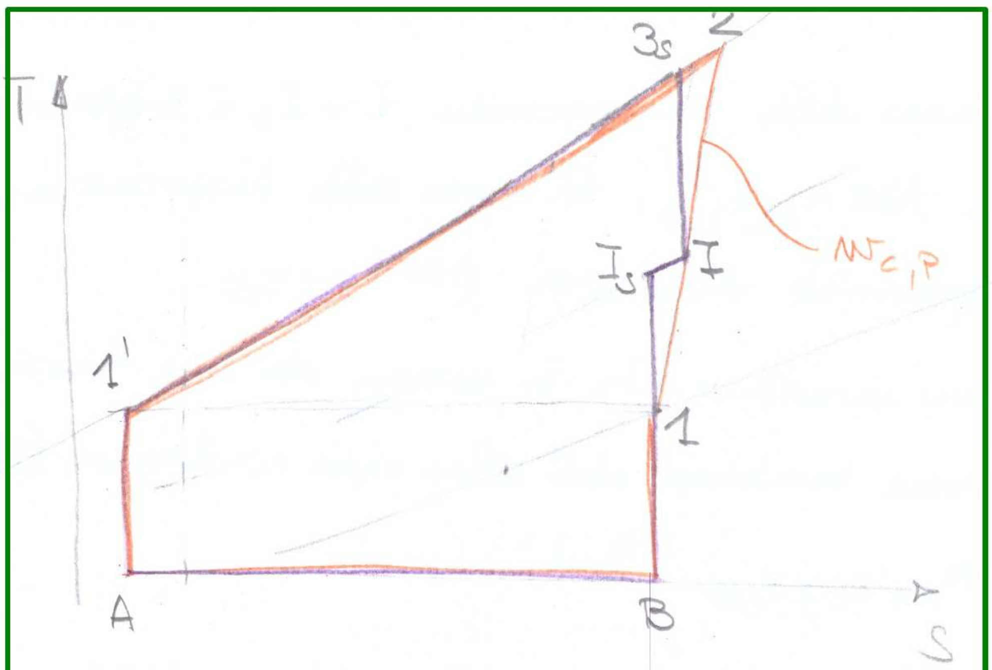

Figure 4: Area $AREA_{A1'3_SI_SB}$ e trasformazioni

L'area appena calcolata ($AREA_{A1'3_SII_SB}$) tende all'area $AREA_{A1'21B}$ se aumentiamo il numero di compressioni isentropiche (intervallate da riscaldamenti a pressione costante). Questo dimostra che il lavoro di contro-recupero è causato dal riscaldamento del gas. È quindi causato INDIRETTAMENTE (e non DIRETTAMENTE) dal lavoro perso.
La somma di lavoro isentropico e lavoro di contro-recupero prende il nome di lavoro politropico.

$$w_{C,P} = w_{C,IS} + w_{C,CR} == w_C - w_{C,L} \tag{12}$$

(è anche la differenza tra lavoro reale e lavoro perso $w_{C,L} = \int_1^2 T_0 ds$)

0.3 Rendimento politropico

Si puo' pertanto definire anche un rendimento politropico nel seguente modo:

$$\eta_P = \frac{w_{C,P}}{w_C} = \frac{w_C - \int_1^2 T_0 ds}{\Delta W_C} = \tag{13}$$

$$= \frac{\int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0}}{\int_1^2 dh_0} \tag{14}$$

$$w_C = \int_1^2 dh_0 = c_p(T_{02} - T_{01}) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R(T_{02} - T_{01}) = c_p(T_{02} - T_{01}) \tag{15}$$

$$w_{C,P} = \int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{16}$$

Sfruttando il fatto che $\frac{p_m}{\rho_0^m} = K$ (costante):

$$w_{C,P} = K^{1/m} \cdot \int_1^2 \frac{dp_0}{p_0^{1/m}} = K^{1/m} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{m} + 1} p_0^{-\frac{1}{m}+1} \Big|_1^2 \tag{17}$$

$$= \frac{p_0^{1/m}}{\rho_0} \frac{m}{m-1} p_0^{-\frac{1}{m}+1} \Big|_1^2 = \frac{m}{m-1} \frac{p_{02}}{\rho_{02}} \Big|_1^2 = \frac{m}{m-1} R(T_{02} - T_{01}) \tag{18}$$

Quindi:

$$\eta_P = \frac{\frac{m}{m-1}}{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{19}$$

Si può anche dimostrare che il rendimento politropico è il limite del rendimento isentropico per una compressione infinitesima. Infatti:

$$\eta_{C,P} = \eta_{C,IS}(\beta \to 1) = \frac{dh_{0s}}{dh_0} = \frac{\frac{dp_0}{\rho_0}}{dh_0} = \frac{dp_0}{\rho_0 dh_0} = \tag{20}$$

$$= \frac{dp_0}{dh_0} \cdot \frac{RT_0}{p_0} = \frac{dp_0}{dT_0} \cdot \frac{R}{c_p} \cdot \frac{T_0}{p_0} \tag{21}$$

Quindi:

$$\eta_{C,P} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \cdot \frac{dT_0}{T_0} = \frac{dp_0}{p_0} \tag{22}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta}P} \tag{23}$$

e quindi

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma \eta_{C,P}} = \frac{m-1}{m} \tag{24}$$

ovvero

$$\eta_{C,P} = \frac{\frac{m}{m-1}}{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{25}$$

che è appunto la stessa relazione trovata in precedenza. La relazione precedente implica che m debba essere maggiore di γ.

0.4 E nel Caso di un Fluido Incomprimibile?

Il rendimento isoentropico:

$$\eta_{C,IS} = \frac{w_{C,IS}}{w_C} = \frac{\int_{2S}^{1} \frac{dP_0}{\rho_0}}{w_C} \tag{26}$$

Essendo $\rho_0 = cost$

$$\int_{2S}^{1} \frac{dP_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}(p_{02} - p_{01}) = \frac{1}{\rho_0}(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) = gH \tag{27}$$

Pertanto

$$\eta_{C,IS} = \frac{gH}{w_C} \tag{28}$$

Il rendimento politropico:

$$\eta_{C,P} = \frac{w_{C,P}}{w_C} = \frac{\int_{2}^{1} \frac{dP_0}{\rho_0}}{w_C} \tag{29}$$

Essendo $\rho_0 = cost$

$$\int_{2}^{1} \frac{dP_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}(p_{02} - p_{01}) = \frac{1}{\rho_0}(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) = gH \tag{30}$$

Quindi, come per le compressori, $\eta_{C,IS}$ e $\eta_{C,P}$, per il fatto che $\rho = cost$, e si parla semplicemente di rendimento idraulico della macchina operatrice

$$\eta_I = \eta_{C,P} = \eta_{C,IS} = \frac{gH}{w} \tag{31}$$

0.5 Riassumendo

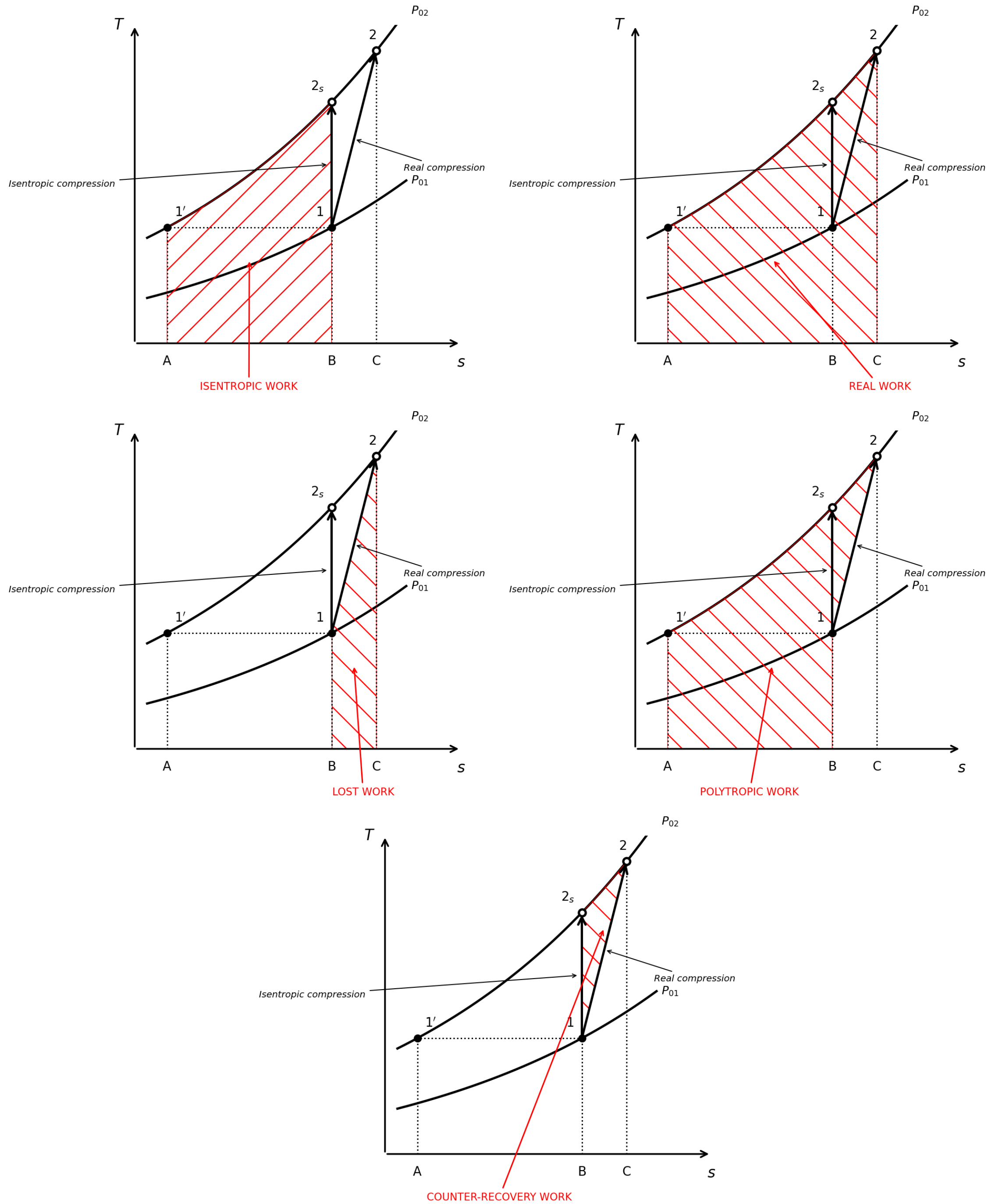

Figure 5: Riassunto dei diversi tipi di lavoro per compressione

In un compressore, il lavoro politropico è maggiore del lavoro isentropico. Di conseguenza, il suo rendimento politropico è maggiore di quello isentropico.

1 Espansione

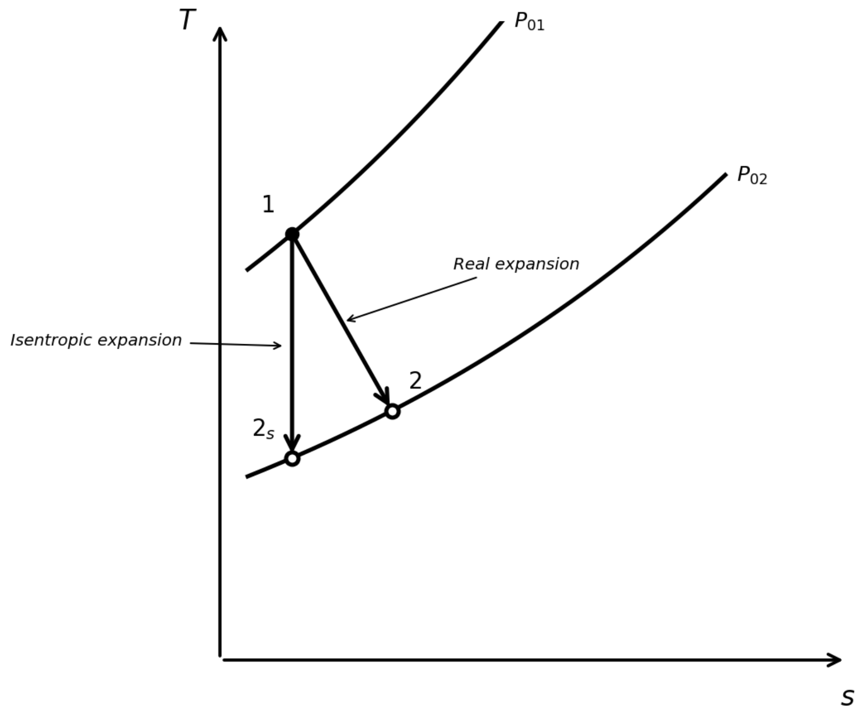

Figure 6: Diagramma T-s per una turbina

In una turbina:

$$w_T = w_x = \int_2^1 dh_0 > 0 \tag{32}$$

$$= \underbrace{\int_2^1 T_0 ds}_{} < 0 + \underbrace{\int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0}}_{} > 0 \tag{33}$$

quindi in una turbina il lavoro perso diminuisce il lavoro disponibile (quello effettivamente trasferito dal fluido alle macchine).

Graficamente

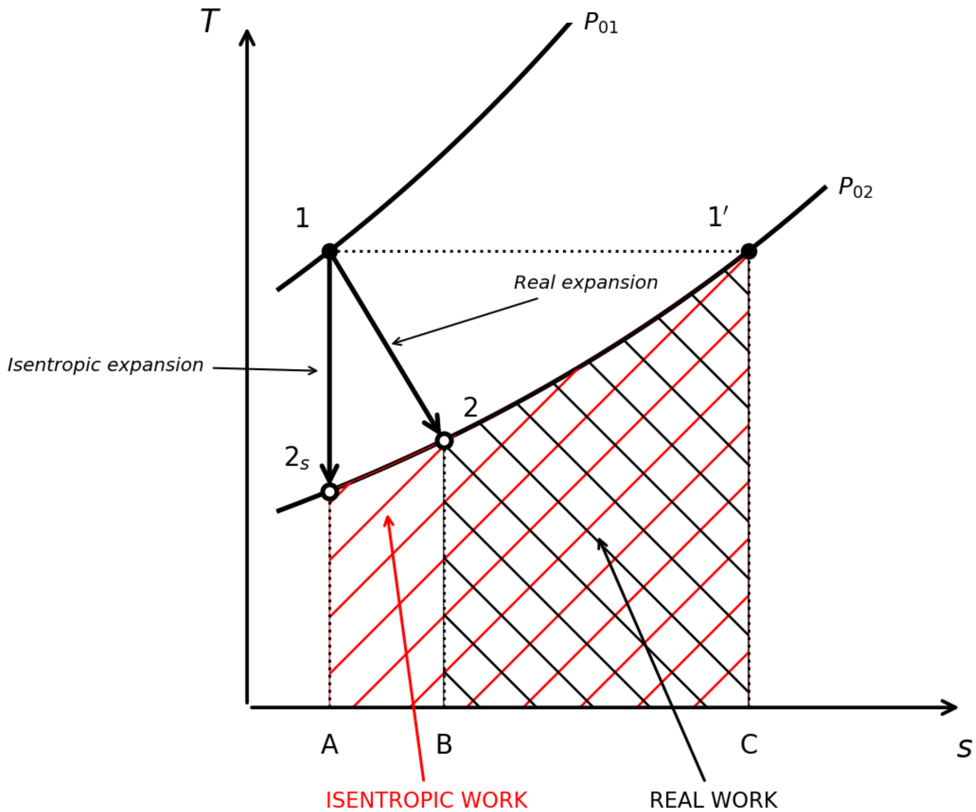

Figure 7: Rappresentazione grafica dei lavori in una turbina

1.1 Differenza tra lavoro isoentropico e lavoro reale

Il lavoro reale è AREA$_{B21'C}$:

$$w_T = \int_2^1 dh_0 = \int_2^1 T_0 ds + \int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{34}$$

Il lavoro isentropico è AREA$_{A2s1'C}$:

$$w_{T,IS} = \int_{2s}^1 dh_{0,IS} = \int_{2s}^1 \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{35}$$

La differenza tra il lavoro isentropico e il lavoro reale è dato dall'area AREA$_{A2s2B}$, che è minore del lavoro perso:

$$w_{T,IS} - w_T < \int_1^2 T_0 ds \tag{36}$$

Questa quantità mancante prende il nome di lavoro di recupero.

Il lavoro di recupero $w_{T,R}$ (positivo) esiste questa volta a nostro "vantaggio". Infatti il gas, sempre a causa del lavoro perso, ha una temperatura maggiore (e quindi una densità minore) di quella che avrebbe avuto in un processo di espansione senza perdite, e ciò permette di produrre più lavoro.

In un'espansione isoentropica:

$$w_{T,IS} = -\int_1^{2s} dh_0 = -\int_1^{2s} \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{37}$$

Nell'espansione reale:

$$w_T = -\int_1^2 dh_0 = -\int_1^2 T_0 ds - \int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0} \tag{38}$$

Pertanto:

$$w_{T,IS} - w_T = \int_1^2 T_0 ds + \int_1^2 \frac{dp_0}{\rho_0} - \int_1^{2S} \frac{dp_0}{\rho_0} = \underbrace{\int_1^2 T_0 ds}_{\text{LAVORO PERSO } w_{T,L}>0} - \underbrace{\int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0} - \int_{2S}^1 \frac{dp_0}{\rho_0}}_{\text{LAVORO DI RECUPERO } w_{T,R}>0} \tag{39}$$

Il lavoro di recupero è $\int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0} - \int_{2s}^1 \frac{dp_0}{\rho_0}$, ed è positivo per il fatto che la densità nell'espansione reale è minore che in quella reale:

$$w_{T,L} \rightarrow \text{LAVORO PERSO} \rightarrow \text{AREA}_{A12B} \tag{40}$$

$$w_{T,R} \rightarrow \text{LAVORO DI RECUPERO} \rightarrow \text{AREA}_{2s12} \tag{41}$$

Anche in questo caso posso inoltre definire il lavoro politropico:

$$w_{T,P} = w_T + w_{T,L} = \int_2^1 dh_0 + \int_1^2 T_0 ds = \int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0} = w_{T,IS} + w_{T,R} \tag{42}$$

1.2 Rendimenti

Posso anche qui definire due rendimenti:

- il rendimento isontropico:

$$\eta_{T,IS} = \frac{w_T}{w_{T,IS}} = \frac{\int_2^1 dh_0}{\int_{2s}^1 dh_{0,IS}} = \frac{c_p(T_{01} - T_{02})}{c_p(T_{01} - T_{02s})} = \tag{43}$$

$$= \frac{1 - \frac{T_{02}}{T_{01}}}{1 - \frac{T_{02s}}{T_{01}}} = \frac{1 - \frac{1}{\beta^{\frac{m-1}{m}}}}{1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} \tag{44}$$

  dove $\beta = \frac{p_{01}}{p_{02}}$ è il rapporto di compressione.

- il rendimento politropico:

$$\eta_{T,P} = \frac{w_T}{w_{T,P}} = \frac{\int_2^1 dh_0}{\int_2^1 dh_0 - \int_1^2 T ds} = \frac{\int_2^1 dh_0}{\int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0}} = \tag{45}$$

$$= \frac{c_p(T_{01} - T_{02})}{\frac{m}{m-1} R(T_{01} - T_{02})} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{\frac{m}{m-1}} \tag{46}$$

1.3 Riassumendo

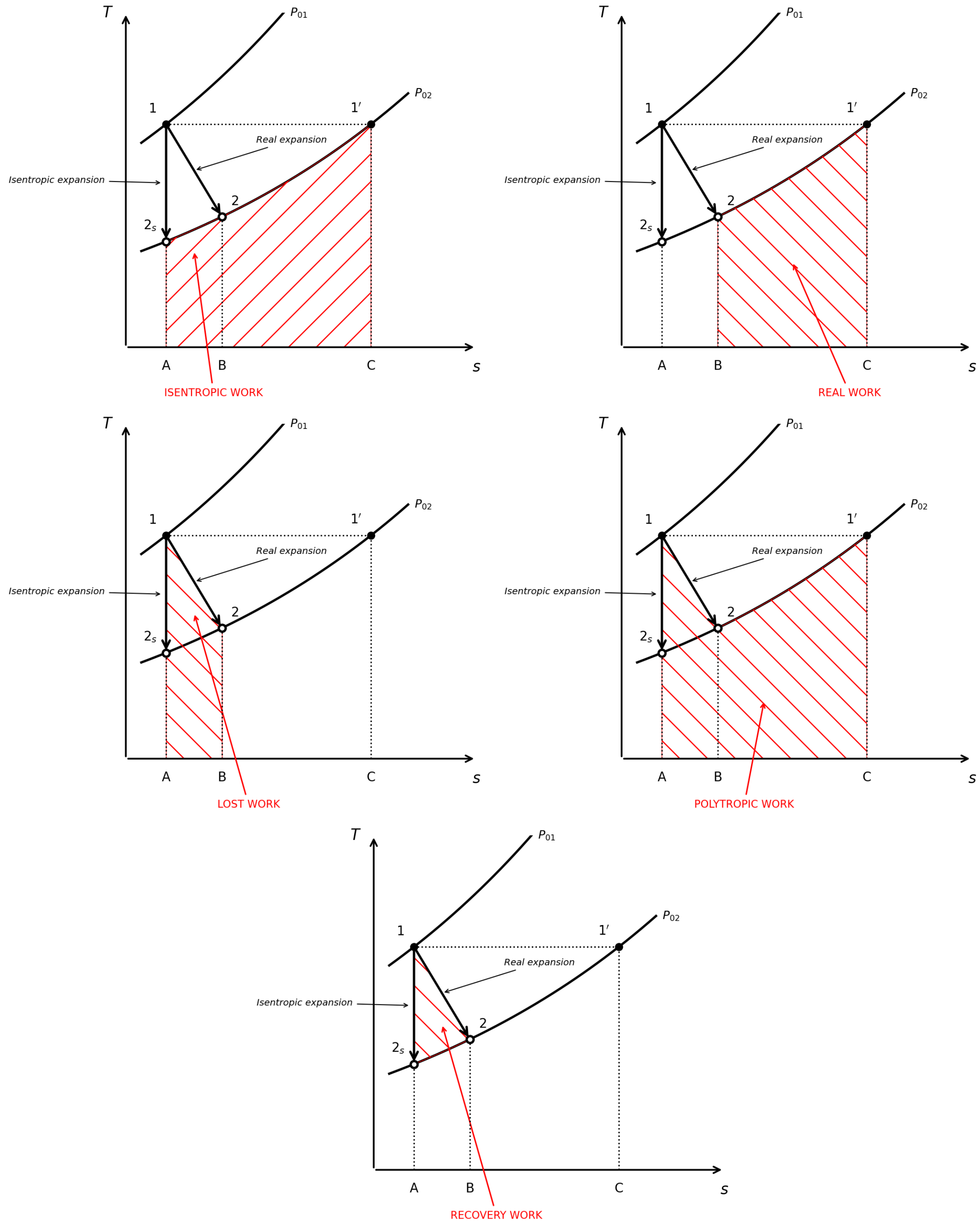

Figure 8: Riassunto dei diversi tipi di lavoro per espansione

In una turbina, il lavoro politropico è maggiore di quello isentropico. Di conseguenza, il suo rendimento politropico è minore di quello isentropico.

Si può anche e in questo caso vedere come il rendimento isentropico coincide con quello politropico per trasformazioni infinitesime:

$$\eta_{T,P} = \eta_{T,IS}(\beta \to 1) = \frac{dh_0}{dh_{0,IS}} = \frac{dh_0}{\frac{dp_0}{\rho_0}} = \frac{\rho_0 dh_0}{dp_0} = \tag{47}$$

$$= \frac{p_0}{RT_0} \cdot c_p dT_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT_0}{T_0} \cdot \frac{p_0}{dp_0} \tag{48}$$

$$\eta_{T,P}(\frac{\gamma - 1}{\gamma})\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dT_0}{T_0} \implies \frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\eta_{T,P}} \tag{49}$$

Pertanto:

$$\eta_{T,P}\frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{m - 1}{m} \tag{50}$$

Questa è la stessa relazione trovata in precedenza.

$$\eta_{T,P} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}}{\frac{m}{m-1}} \tag{51}$$

che implica che m deve essere minore di γ.

1.4 Nel Caso di Fluido (o meglio flusso) Incomprimibile

$$\eta_{T,IS} = \frac{\int_2^1 dh_0}{\int_{2s}^1 dh_{0,IS}} = \frac{w_T}{\int_{2s}^1 \frac{dp_0}{\rho_0}} \tag{52}$$

Essendo ($\rho_0 = \rho = \text{cost}$):

$$\int_{2s}^1 \frac{dp_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}(p_{01} - p_{02}) = gH \tag{53}$$

$$\eta_{T,P} = \frac{\int_2^1 dh_0}{\int_2^1 dh_0 + \int_1^2 T_0 ds} = \frac{\int_2^1 dh_0}{\int_2^1 \frac{dp_0}{\rho_0}} = \tag{54}$$

Essendo ($\rho_0 = \rho = \text{cost}$):

$$\int_{2s}^1 \frac{dp_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}(p_{01} - p_{02}) = gH \tag{55}$$

Quindi, come per le compressori, $\eta_{T,IS}$ e $\eta_{T,P}$ coincidono nel anche per una turbina. In presenza di un fluido incomprimibile si parla quindi semplicemente di rendimento idraulico di turbina.

$$\eta_I = \eta_{T,P} = \eta_{T,IS} = \frac{w_T}{gH} \tag{56}$$

2 Riassumendo

COMPRESSORE: $\frac{m-1}{m} = \frac{\gamma-1}{\gamma \eta_{C,P}}$
TURBINA: $\frac{m-1}{m} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\eta_{T,P}$

In un compressore:

$$\frac{m-1}{m} > \frac{\gamma-1}{\gamma} \implies 1 - \frac{1}{m} > 1 - \frac{1}{\gamma} \tag{57}$$

$$\boxed{m > \gamma} \tag{58}$$

In una turbina:

$$\frac{m-1}{m} < \frac{\gamma-1}{\gamma} \implies 1 - \frac{1}{m} < 1 - \frac{1}{\gamma} \tag{59}$$

$$\boxed{m < \gamma} \tag{60}$$

$$\text{COMPRESSORE: } \eta_{C,IS} = \frac{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_{C,P}}} - 1} \qquad \text{TURBINA: } \eta_{T,IS} = \frac{1 - 1/\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\eta_{T,P}}}{1 - 1/\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{61}$$

In figura sono mostrati gli andamenti dei rendimenti isoentropici di compressione e espansione al variare del rapporto di compressione β per un dato valore del rendimento politropico.

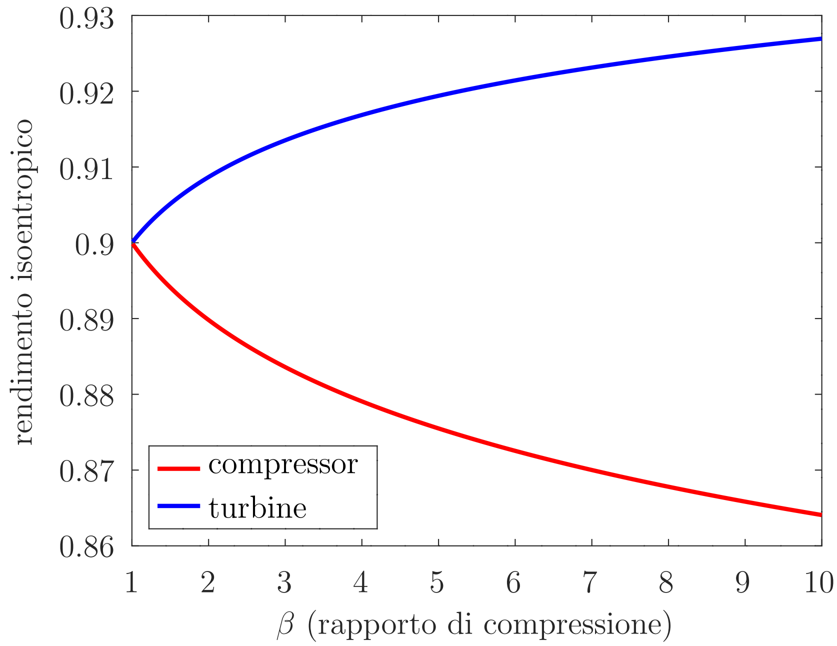

Figure 9: Confronto tra rendimenti isoentropici per compressore e turbina in funzione del rapporto di pressione per un dato valore di rendimento politropico (0.9)