

Soluzione di un problema ai limiti non omogeneo*

Prerequisiti: completezza del sistema di autofunzioni in L^2 , spazi di Sobolev in dimensione 1.

Idea della dimostrazione. Per dimostrare che la condizione

$$(58.22) \quad \int_0^\ell g(x)y_k dx = 0$$

è sufficiente per l'esistenza di una soluzione y del problema ai limiti non omogeneo

$$(58.19) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = g(x) \\ y(0) = y(\ell) = 0 \end{cases}$$

nell'ipotesi che λ sia in realtà un autovalore λ_k del problema omogeneo associato, si può costruire lo sviluppo di Fourier di y procedendo come segue. Usiamo la

$$(58.21) \quad \int_0^\ell y (y_k'' + \lambda_k y_k) dx = \int_0^\ell g(x)y_k dx$$

con ogni autofunzione y_h , $h \neq k$, al posto di y_k , mentre il parametro λ_k non cambia. Sostituiamo y''_h con $-\lambda_h y_h$ e così esprimiamo tutti i coefficienti di Fourier a_h di y mediante quelli di g divisi per $(\lambda_k - \lambda_h)$. Essendo g continua, per la disuguaglianza di Bessel i suoi coefficienti sono quadrato-sommabili.

Osservazione iniziale. Applicando la disuguaglianza

$$(9.23) \quad 2|a_k| = 2k|a_k| \frac{1}{k} \leq k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2}$$

con h al posto di k , ai coefficienti a_h di y , li maggioriamo con la somma di due termini: il secondo è evidentemente sommabile, mentre il primo è del tipo $h^2 a_h^2 / \lambda_h^2$ per $h \rightarrow +\infty$, essendo α_h il coefficiente di g . Ma siccome gli autovalori λ_h sono noti esplicitamente:

$$(58.17) \quad \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}$$

si vede che sono come h^2 per $h \rightarrow +\infty$, quindi i coefficienti a_h sono sommabili (sono in l^1) e la relativa serie di Fourier converge uniformemente ad una funzione continua y . In particolare, y soddisfa le condizioni agli estremi.

La funzione y risolve (58.19). Partendo, invece che dalla (9.23), dalla disuguaglianza

$$h^4 a_h^2 \leq C \alpha_h^2$$

si vede che i coefficienti di Fourier della derivata seconda, che sono come $h^2 a_h$ per la (9.19), sono quadrato sommabili e quindi la serie di Fourier di y converge in $W^{2,2}$ (y'' è quadrato-sommabile). Consideriamo allora la funzione $y'' + \lambda_k y - g(x)$, che sta in L^2 , e verifichiamo che i suoi coefficienti di Fourier sono tutti nulli. Moltiplicando per l'autofunzione y_h e integrando per parti, si trova zero per la definizione di y . Conclusioni: la funzione $y'' + \lambda_k y - g(x)$ è nulla in L^2 , dunque è quasi ovunque nulla, ma allora la $y'' = g(x) + \lambda_k y$ coincide q.o. con una funzione continua. Pertanto y è di classe C^2 e soddisfa l'equazione differenziale in senso classico. Infine, aggiungendo ad y i multipli della k -esima autofunzione, si generano le infinito-a-uno soluzioni del problema (58.19).

* Cfr. Fusco, Marcellini e Sbordone: Lezioni di analisi matematica due, Zanichelli, pagg. 224-225.