

Flussi Potenziali

In un flusso incomprimibile:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

Posso definire:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (2)$$

tale che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

Un flusso che rispetta tale condizione è **irrotazionale**. Infatti:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

Visto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, posso anche definire:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (6)$$

Dove \vec{a} è un vettore qualsiasi. Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\hat{i} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Quindi posso scrivere:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (8)$$

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (9)$$

In un flusso bidimensionale (nel piano xy) il vettore \vec{a} deve essere orientato lungo k , in modo che la componente del vettore velocità lungo l'asse z sia nulla. Pertanto posso definire

$$\vec{a} = \psi \hat{k} \quad (10)$$

Infatti in questo modo:

$$u = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (11)$$

$$v = \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (12)$$

$$w = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0 \quad \text{essendo } a_1 = a_2 = 0 \quad (13)$$

Posso pertanto definire due funzioni ϕ e ψ tali che:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (14)$$

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \psi \hat{k} \quad (15)$$

In coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (16)$$

In coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (17)$$

Una proprietà importante di ψ (detta funzione di corrente) è che le curve a $\psi = \text{cost}$ sono linee di corrente del campo di moto. Infatti su tali curve:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0 \quad (18)$$

Perciò:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}} \quad (19)$$

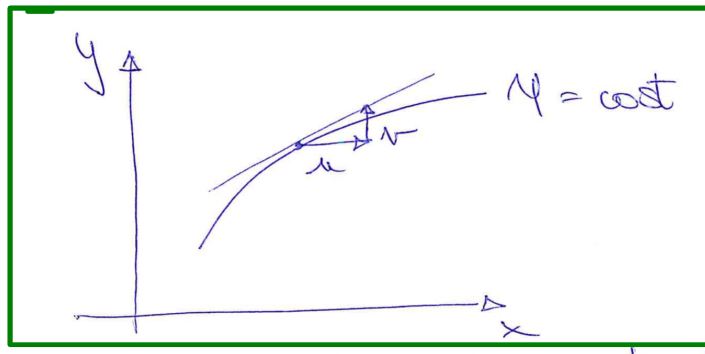


Figure 1: Le curve a $\psi = \text{cost}$ sono linee di corrente

Le curve a $\psi = \text{cost}$ è una linea di corrente (da cui il nome della funzione ψ) perché tangente in ogni punto al vettore velocità.

N.B.

Siccome le equazione del potenziale e della funzione di corrente per un flusso incomprimibile sono lineari ($\nabla^2 \phi = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \psi \hat{k}$), valgono tutte le proprietà valide per le equazioni lineari (per esempio, la somma di due soluzioni è essa stessa soluzione). Ciò consente di ottenere flussi complessi come composizione di flussi semplici.

1 Esempi di Flussi Semplici

1.1 Flusso Uniforme

Immaginiamo un flusso uniforme con vettore velocità orientato lungo la direzione x ($u = V_\infty$ e $v = 0$). In questo caso posso ricavare il potenziale e la funzione di corrente nel seguente modo:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = V_\infty x \quad (20)$$

$$u = \frac{\partial N}{\partial y} \Rightarrow \psi = V_\infty y \quad (21)$$

dove le costanti di integrazione sono state scelte pari a zero.

1.2 Sorgente

Immaginiamo un campo di moto con i vettori velocità in direzione radiale.

$$\vec{V} = V_r \hat{r} \quad (22)$$

Affinchè si conservi la portata Q

$$Q = V_r \cdot 2\pi r \quad (23)$$

$$\begin{cases} V_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{k}{r} \\ V_\theta = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Posso pertanto determinare le funzioni potenziale ϕ e di corrente ψ :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Rightarrow \phi = k \ln r \quad (25)$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow k = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow \psi = k\theta \quad (26)$$

La sorgente diventa un pozzo per $k < 0$

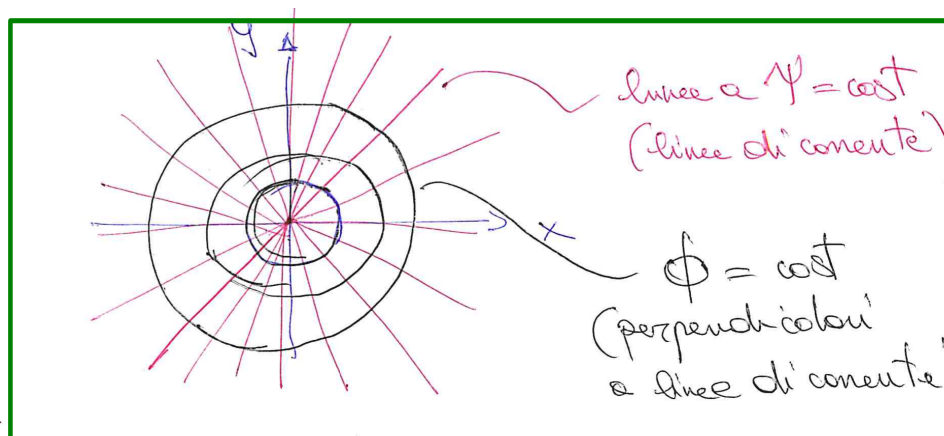


Figure 2: Sorgente: linee a $\psi = \text{cost}$ (linee di corrente), $\phi = \text{cost}$ (perpendicolari a linee di corrente)

1.3 Doppietta

Mettiamo insieme un pozzo P e una sorgente S con la stessa intensità a distanza piccola Δ :

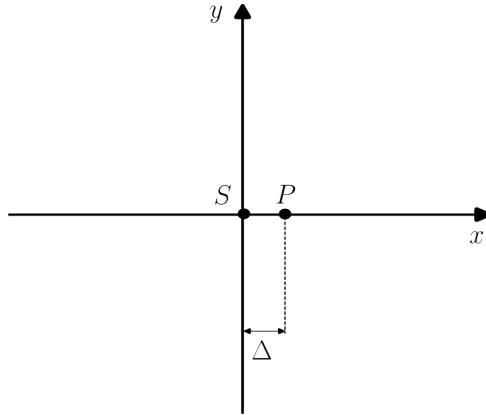


Figure 3: Doppietta come sovrapposizione dei campi di moto di sorgente e pozzo

Posso ricavare il potenziale come somma dei potenziali di sorgente e pozzo:

$$\phi = k \ln(r_S) - k \ln(r_P) = k \ln\left(\frac{r_S}{r_P}\right) = k \ln\left(1 + \frac{r_S - r_P}{r_P}\right) = k \ln\left(1 + \frac{r_S^2 - r_P^2}{r_P(r_S + r_P)}\right) \quad (27)$$

dove, per $\Delta \rightarrow 0$, posso riscrivere:

$$r_S^2 - r_P^2 = x^2 + y^2 - [(x - \Delta)^2 + y^2] \simeq 2\Delta x \quad (28)$$

$$\begin{aligned} r_P(r_S + r_P) &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - \Delta)^2 + y^2} + (x - \Delta)^2 + y^2 = \\ &= (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{\frac{(x - \Delta)^2 + y^2}{x^2 + y^2}} + (x - \Delta)^2 + y^2 \simeq \\ &\simeq (x^2 + y^2) \sqrt{1 - \frac{2\Delta x}{x^2 + y^2}} + (x - \Delta)^2 + y^2 \simeq \\ &\simeq 2(x^2 + y^2) = 2r^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Pertanto

$$\phi = k \ln\left(1 + \frac{2\Delta x}{2r^2}\right) \simeq \frac{k2\Delta x}{2r^2} = \frac{k\Delta r \cos \theta}{r^2} = \frac{m \cos \theta}{r} \quad (30)$$

Pertanto:

$$\boxed{\phi = \frac{m \cos \theta}{r}} \quad (31)$$

dove $m = k\Delta$

Possiamo quindi determinare il campo di moto dato da tale potenziale:

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{m \cos \theta}{r^2} \\ V_\theta = -\frac{m \sin \theta}{r} \end{cases} \quad (32)$$

Posso a questo punto anche ricavare la funzione di corrente ψ :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{m \cos \theta}{r} \Rightarrow \psi = -\frac{m \sin \theta}{r} \quad (33)$$

1.4 Ricapitolando

	ϕ	ψ
FLUSSO INDIST.	$V_\infty x$	$V_\infty y$
SORGENTE (POZZO)	$k \ln r$	$k\theta$
DOPPIETTA	$\frac{m \cos \theta}{r}$	$-\frac{m \sin \theta}{r}$

2 Flusso Intorno a un Cilindro

Il flusso attorno a un cilindro (non-viscoso) può essere studiato come somma tra una corrente indisturbata e una doppietta. Infatti:

$$\begin{aligned}\phi &= V_\infty r \cos \theta + \frac{m \cos \theta}{r} \\ \psi &= V_\infty r \sin \theta - \frac{m \sin \theta}{r}\end{aligned}\tag{34}$$

Affinchè queste funzioni siano rappresentative del flusso attorno a un cilindro, il cilindro stesso deve essere una linea di corrente:

$$\psi \Big|_{r=R} = V_\infty R \sin \theta - \frac{m \sin \theta}{R} = \text{cost} = 0\tag{35}$$

La scelta di porre la costante pari a zero è arbitraria. Pertanto:

$$m = V_\infty R^2\tag{36}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\phi &= V_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \\ \psi &= V_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\end{aligned}\tag{37}$$

Le velocità possono essere ottenute derivando la funzione potenziale oppure quella di corrente:

$$\begin{aligned}V_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ V_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\end{aligned}\tag{38}$$

Sul cilindro ($r = R$):

$$\begin{aligned}V_r &= 0 \\ V_\theta &= -2V_\infty \sin \theta\end{aligned}\tag{39}$$

All'infinito a monte ($\theta = \pi, r = \infty$):

$$\begin{aligned}V_r &= -V_\infty \\ V_\theta &= 0\end{aligned}\tag{40}$$

La componente V_θ (e quindi anche la velocità, visto che la componente radiale è sempre nulla) sul cilindro si annulla per $\theta = 0, \pi$. Questi due punti rappresentano punti di ristagno.

Il coefficiente di pressione vale (essendo il flusso incomprimibile):

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{\frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V^2)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\tag{41}$$

Sostituendo $V = -2V_\infty \sin \theta$:

$$c_p = 1 - 4 \sin^2 \theta\tag{42}$$

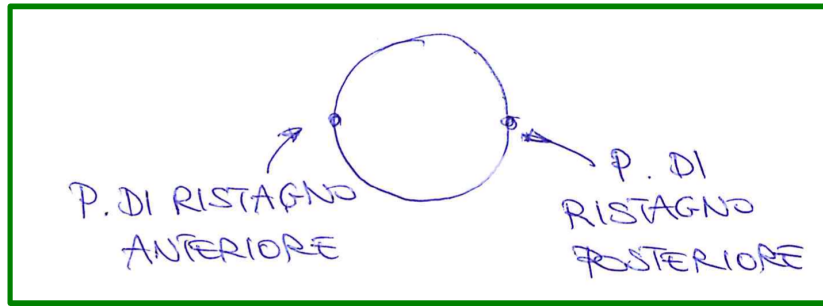


Figure 4: Punti di ristagno anteriore e posteriore

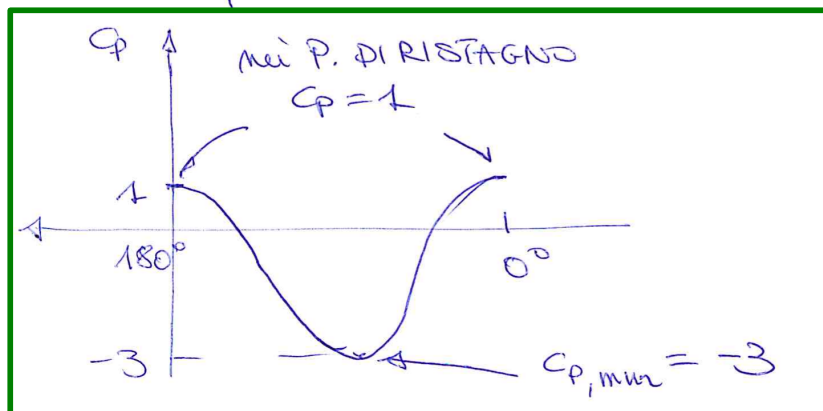


Figure 5: Andamento del coefficiente di pressione. Nei punti di ristagno $c_p = 1$, $c_{p, \min} = -3$

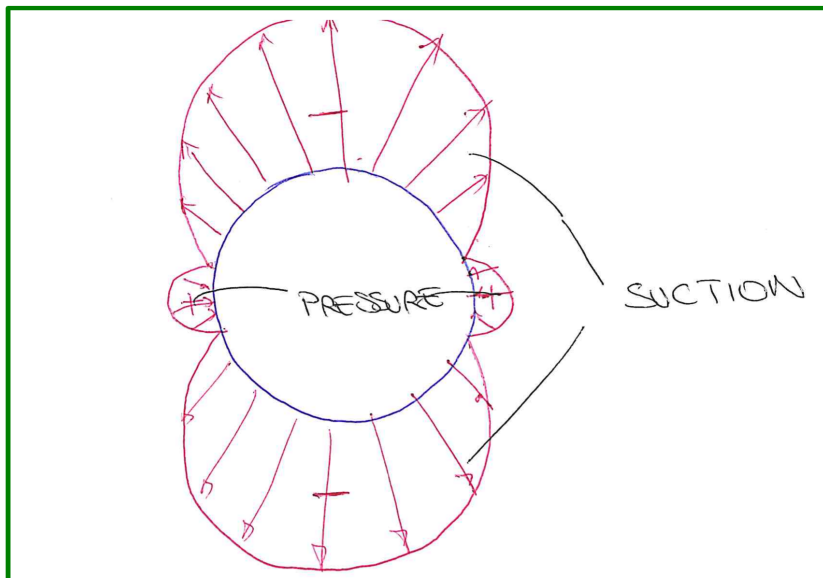


Figure 6: Pressioni agenti sul cilindro

Il campo di pressione è simmetrico sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y , pertanto la risultante delle forze in qualsiasi direzione è 0.

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 0 \quad (\text{coefficiente di portanza})$$

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 0 \quad (\text{coefficiente di resistenza})$$
(43)

In un flusso viscoso questo non avviene, perché il flusso si separa in presenza di un gradiente di pressione avverso ($\frac{\partial p}{\partial s} > 0$), dove s è la coordinata curvilinea sul cilindro.

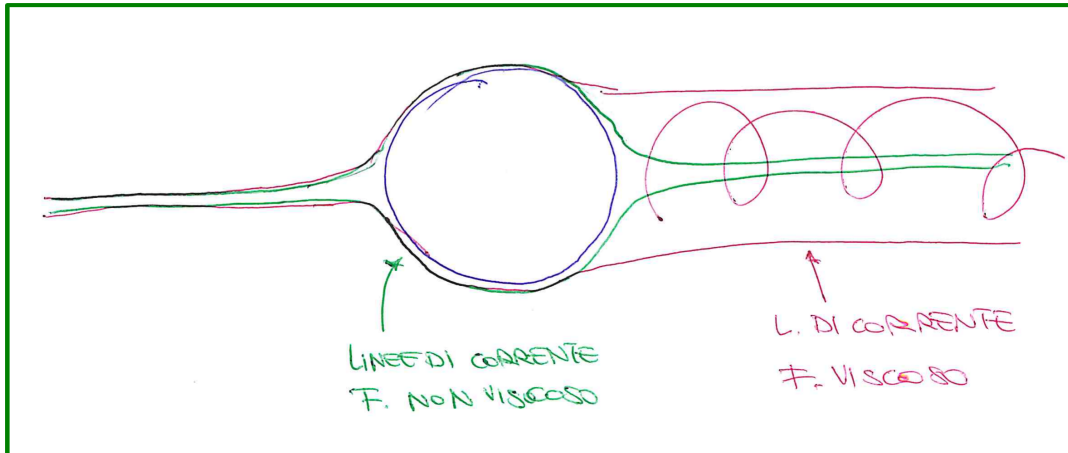


Figure 7: Linee di corrente: flusso non viscoso vs. flusso viscoso

La separazione del flusso è dovuta a situazioni di questo tipo:

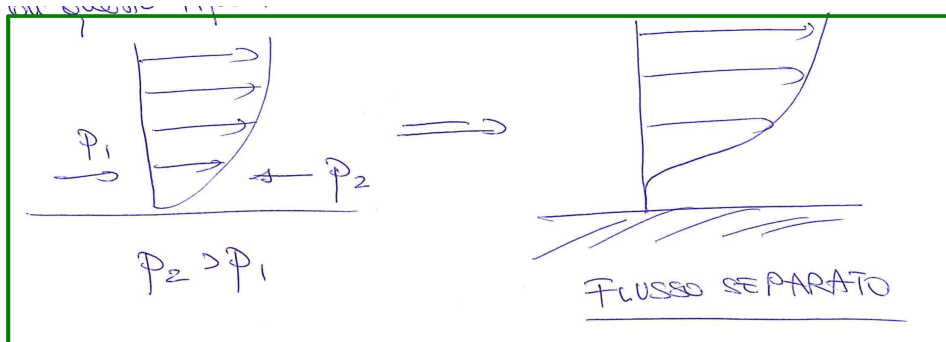


Figure 8: $P_2 > P_1$ (flusso separato)

La separazione del flusso \mathcal{B} non permette il recupero di pressione nella parte posteriore del cilindro, generando così **RESISTENZA DI FORMA** (che è preponderante nei corpi tozzi rispetto alla **RESISTENZA DI ATTRITO** che invece domina nei corpi affusolati).

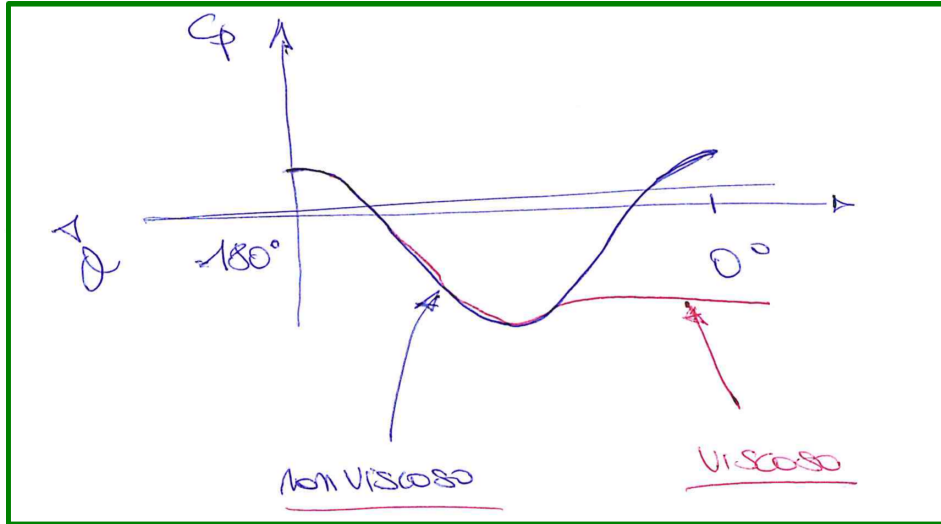


Figure 9: Coefficiente di pressione vs angolo

3 Vortice Libero

Il vortice libero è un campo di moto caratterizzato da componente radiale della velocità nulla e componente tangenziale che decresce in modo inversamente proporzionale al raggio:

$$V_r = 0; \quad V_\theta = \frac{k}{r} \quad (44)$$

A partire dal campo di velocità di possono ricavare funzioni potenziale e di corrente:

$$\begin{aligned} V_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{k}{r} \Rightarrow \phi = k\theta \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \Rightarrow \psi = -k \ln r \end{aligned} \quad (45)$$

Spesso si introduce il concetto di CIRCUITAZIONE:

$$\Gamma = \oint \vec{\phi} \cdot d\vec{\ell} = - \oint \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad (46)$$

su una curva chiusa percorsa in senso orario. Se integriamo su una circonferenza di raggio r :

$$\Gamma = - \int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{k}{r} r d\theta = -k \cdot 2\pi \quad (47)$$

Possiamo pertanto sostituire:

$$k = -\frac{\Gamma}{2\pi} \quad (48)$$

e pertanto:

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (49)$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (50)$$

Abbiamo scelto di definire Γ (circuitazione) come l'integrale su una curva chiusa percorsa in senso orario perchè (come vedremo in seguito) una circuitazione positiva in questa direzione dà luogo a una portanza positiva.

N.B. Teorema di Stokes

$$\oint_S \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (51)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \hat{k} \quad (52)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{0}{r} \quad (53)$$

Quindi il rotore di \vec{V} è zero dovunque tranne che nell'origine (dove è indeterminato). Ciò fa sì che la circuitazione Γ sia costante su qualsiasi curva che racchiude l'origine del vortice.

4 Corrente Uniforme + Doppietta + Vortice

Posso ottenere il flusso composto partendo da funzione potenziale o funzione di corrente e sommando i singoli contributi

$$\begin{aligned} \phi &= V_\infty r \cos \theta + \frac{k \cos \theta}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi &= V_\infty r \sin \theta - \frac{k \sin \theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \quad (54)$$

Riprendiamo il cilindro di raggio R . Se voglio che sia una linea di corrente, è necessario imporre che la funzione di corrente sia costante sullo stesso:

$$\psi \Big|_{r=R} = V_\infty R \sin \theta - \frac{k \sin \theta}{R} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R = \text{cost.} \quad (55)$$

Considerando che l'ultimo termine ($\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$) è di per sé costante, la soluzione è la stessa che si aveva per il caso di corrente uniforme e doppietta. Quindi $k = V_\infty R^2$. Sostituendo:

$$\begin{aligned} \phi &= V_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi &= V_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \quad (56)$$

Le velocità si possono ottenere derivando ϕ o ψ :

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ V_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (57)$$

Sul cilindro ($r = R$):

$$\begin{aligned} V_r &= 0 \\ V_\theta &= -2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{aligned} \quad (58)$$

La soluzione è data somma delle soluzioni per un flusso indisturbato attorno a un cilindro (corrente uniforme e doppietta) più quella di un cilindro in moto rotatorio.

Ci chiediamo:

1) Dove la velocità è nulla (punto di ristagno)?

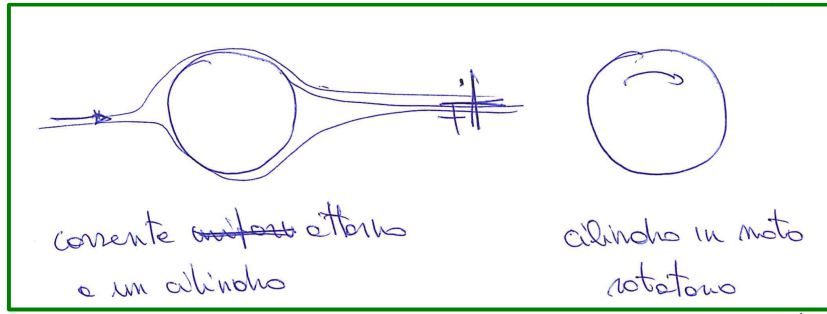


Figure 10: Corrente attorno a un cilindro vs cilindro in moto rotatorio

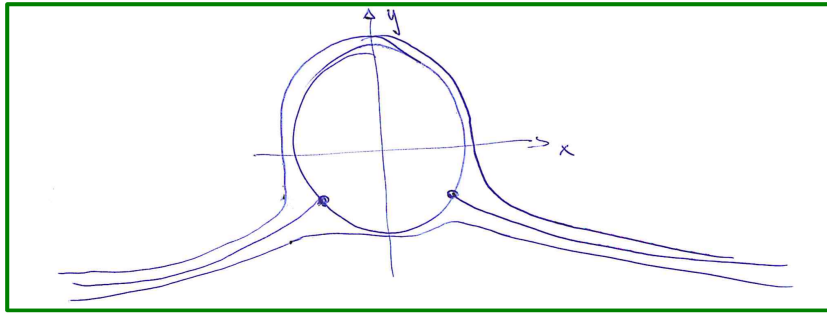


Figure 11: Punti di ristagno per $\Gamma < 4\pi RV_\infty$

$$V_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty} \quad (59)$$

Se $|\Gamma| < 4\pi RV_\infty$ ho 2 punti di ristagno, come mostrato in figura. In caso contrario, posso avere uno o nessun punto di ristagno.

2) Quanto vale il coefficiente di pressione?

$$\begin{aligned} c_p &= 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi RV_\infty}}{V_\infty}\right)^2 = \\ &= 1 - 4 \sin^2 \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi RV_\infty}\right)^2 - \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi RV_\infty} \end{aligned} \quad (60)$$

3) Quanto valgono le forze agenti sul cilindro?

$$c_D = 0 \quad (\text{per simmetria}) \quad (61)$$

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 (2R)} = \frac{\int_0^{2\pi} p(-\sin \theta) R d\theta}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \cdot 2R} = \frac{\int_0^{2\pi} (p - p_\infty)(-\sin \theta) R d\theta}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \cdot 2R} \quad (62)$$

$$c_L = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -c_p \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\left[1 - 4 \sin^2 \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi RV_\infty}\right)^2 - \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi RV_\infty}\right] \sin \theta d\theta \quad (63)$$

L'integrale tra zero e 2π di potenze dispari del seno è nullo. Pertanto:

$$c_L = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2\Gamma \sin^2 \theta}{\pi RV_\infty} d\theta = \frac{\Gamma}{\pi RV_\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\Gamma}{\pi RV_\infty} \cdot \pi \quad (64)$$

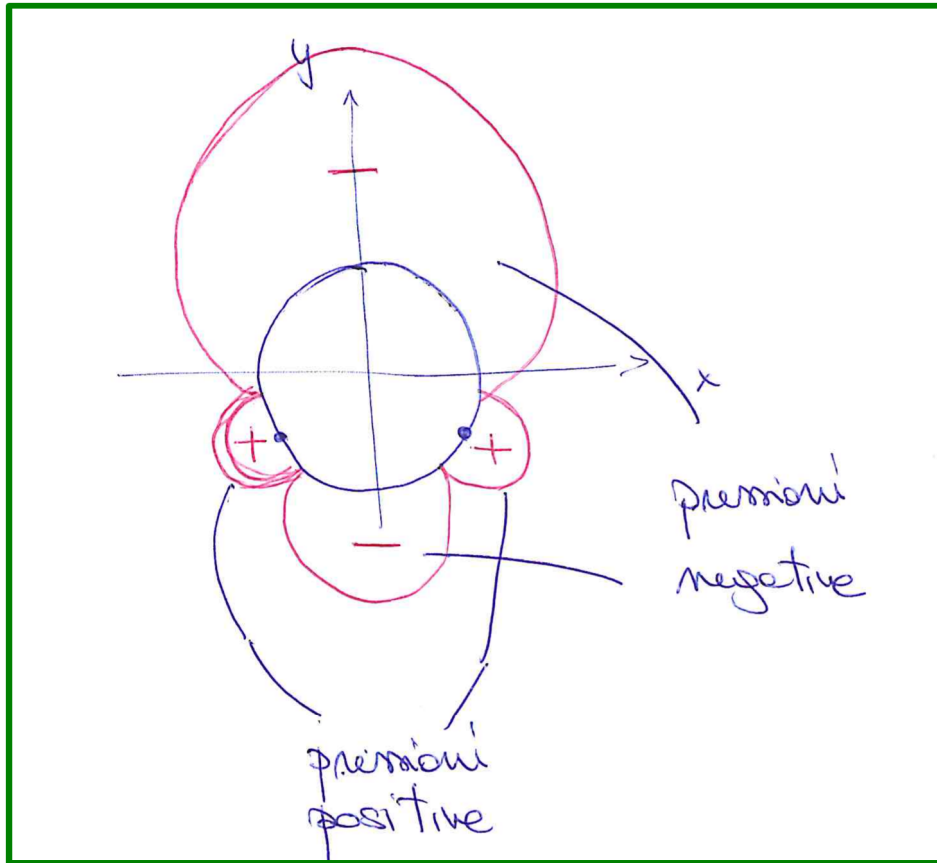


Figure 12: Pressioni agenti sul cilindro

dove anche l'integrale del $\cos 2\theta$ è nullo in quanto funzione periodica con periodo π . Pertanto il coefficiente di portanza vale:

$$c_L = \frac{\Gamma}{RV_\infty} \quad (65)$$

e la portanza

$$L = c_L \cdot \left(\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 2R\right) = \rho V_\infty \Gamma \quad (66)$$

Questo è un risultato importante perché ci dice che la portanza dipende dalla circuitazione. In un flusso non viscoso, un profilo può essere studiato come una serie di doppiette e vortici:

Questo metodo prende il nome di **METODO DEI PANNELLI** (PANEL METHOD). X-Foil di Mark DRELA si basa su questo metodo, al quale accompagna un metodo integrale per il calcolo dello sviluppo dello strato limite.



Figure 13: Vortici e Doppiette attorno a un profilo

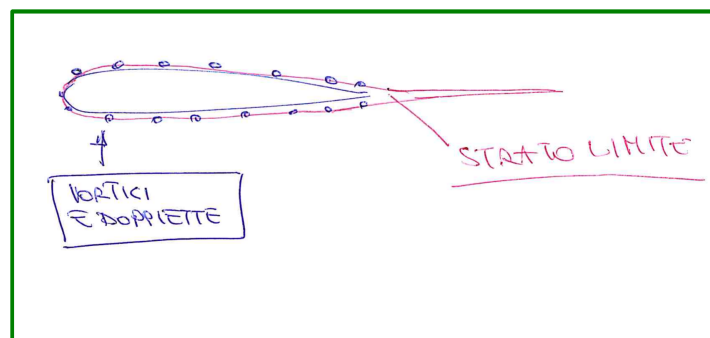


Figure 14: Strato limite