Appunti – Similitudine nelle Turbomacchine

Turbomacchina

Una **turbomacchina** è una macchina *operatrice* (cede energia al fluido, $w < 0$) o *motrice* (prende energia dal fluido, $w > 0$), nella quale il trasferimento di lavoro avviene sfruttando la variazione di quantità di moto del fluido, impartita da una palettatura in rotazione attorno ad un asse (rotore).

Analisi Dimensionale per una Turbomacchina Idraulica (fluido incomprimibile), es. pompa

Posso pensare che le prestazioni della macchina (definite in termini dienergia specifica trasferita al fluido gH, rendimento η e potenza assorbita P) siano funzione dei seguenti parametri:

$$\begin{aligned} gH &= f_1(Q,\, \Omega,\, D,\, \rho,\, \mu) \\ \eta &= f_2(Q,\, \Omega,\, D,\, \rho,\, \mu) \\ P &= f_3(Q,\, \Omega,\, D,\, \rho,\, \mu) \end{aligned} \tag{1}$$

dove Q, Ω, D, ρ, e μ sono rispettivamente la portata volumetrica, la velocità di rotazione, il diametro della macchina, la densità e la viscosità dinamica del fluido. Le unità di misura di queste grandezze sono:

- $[gH] = \mathrm{m^2/s^2}$
- $[\eta] = -$
- $[P] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^3}$
- $[Q] = \mathrm{m^3/s}$
- $[\Omega] = 1/\mathrm{s}$
- $[D] = \mathrm{m}$
- $[\rho] = \mathrm{kg/m^3}$
- $[\mu] = \mathrm{kg/(m\,s)}$.

Con 6 grandezze e 3 unità di misura fondamentali (M, L, T) si ottengono **3 numeri adimensionali**.

Scegliendo Ω, D, ρ come variabili di riferimento si ricavano i tre gruppi adimensionali:

$$\frac{gH}{(\Omega D)^2} = g_1\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho\,\Omega D^2}{\mu}\right) \tag{2}$$

$$\eta = g_2\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho\,\Omega D^2}{\mu}\right) \tag{3}$$

$$\frac{P}{\rho\,\Omega^3 D^5} = g_3\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho\,\Omega D^2}{\mu}\right) \tag{4}$$

Il numero di Reynolds per turbomacchine è:

$$Re = \frac{\rho\,\Omega D^2}{\mu} \quad \longrightarrow \quad \text{forze inerziali / forze viscose} \tag{5}$$

Il **coefficiente di portata** (flow coefficient) è:

$$\phi \equiv \frac{Q}{\Omega D^3} = \frac{c_m\,A_m}{\Omega D^3} = \frac{c_m}{\Omega\,D}\frac{A_m}{D^2} = \frac{c_m}{U}\frac{A_m}{2D^2} \tag{6}$$

dove c_m e A_m sono rispettivamente la componente meridiana della velocità e l'area di passaggio.

Il **coefficiente di carico** (load coefficient) è:

$$\psi \equiv \frac{Q}{(\Omega D)^2} \tag{7}$$

Il **coefficiente di potenza** (power coefficient) è:

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho\Omega^3 D^5} \tag{8}$$

Il coefficiente di potenza $\hat{P}$ puo' essere ottenuto anche riscrivendo la potenza richiesta in funzione delle altre grandezze:

$$P = \frac{P_u}{\eta} = \frac{\rho\,Q\,gH}{\eta} = \frac{1}{\eta}\cdot\frac{Q}{\Omega D^3}\cdot\frac{gH}{(\Omega D)^2}\cdot\rho\,\Omega^3 D^5 \tag{9}$$

Pertanto, in una **macchina operatrice**:

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho\,\Omega^3 D^5} = \frac{1}{\eta}\cdot\frac{Q}{\Omega D^3}\cdot\frac{gH}{(\Omega D)^2} = \frac{1}{\eta}\phi\psi \tag{10}$$

Al contrario, in una **macchina motrice**:

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho\,\Omega^3 D^5} = \eta\cdot\frac{Q}{\Omega D^3}\cdot\frac{gH}{(\Omega D)^2} = \eta\phi\psi \tag{11}$$

Effetto del numero di Reynolds

Se il Reynolds è alto ($Re > 2 \times 10^5$, solitamente) l'effetto del numero di Reynolds può essere trascurato:

$$\phi = \frac{gH}{(\Omega D)^2} = f_4\left(\frac{Q}{\Omega D^3}\right) \tag{12}$$

$$\eta = f_5\left(\frac{Q}{\Omega D^3}\right) \tag{13}$$

$$\psi = \frac{P}{\rho\,\Omega^3 D^5} = f_6\left(\frac{Q}{\Omega D^3}\right) \tag{14}$$

Caratteristiche di una pompa – Similitudine

La condizione di **similitudine** tra due macchine (1 e 2) è:

$$\frac{\dfrac{gH_1}{(\Omega_1 D_1)^2}}{\dfrac{gH_2}{(\Omega_2 D_2)^2}} = \frac{\dfrac{Q_1}{(\Omega_1 D_1^3)}}{\dfrac{Q_2}{\Omega_2 D_2^3}} = 1 \tag{15}$$

Se invece consideriamo un'unica macchina, operante in similitudine a due velocità di rotazione Ω_1 e Ω_2:

$$\frac{\dfrac{gH_1}{\Omega_1^2}}{\dfrac{gH_2}{\Omega_2^2}} = \frac{\dfrac{Q_1}{\Omega_1}}{\dfrac{Q_2}{\Omega_2}} = 1 \tag{16}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} gH_2 &= gH_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2 \\ Q_2 &= Q_1 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Mettendo insieme le due equazioni precedenti (elimando le Ω), si puo' vedere come punti in similitudine formano una parabola nel diagramma gH-Q (vedi figura **??**.

$$gH_2 = gH_1 \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \tag{18}$$

Comunemente (nei cataloghi) le prestazioni delle pompe sono rappresentate nei cosiddetti diagrammi collinari (vedi figura **??**) dove vengono mostrate curve caratteristiche a varie velocità di rotazione, insieme al rendimento sotto forma di curve isovalore.

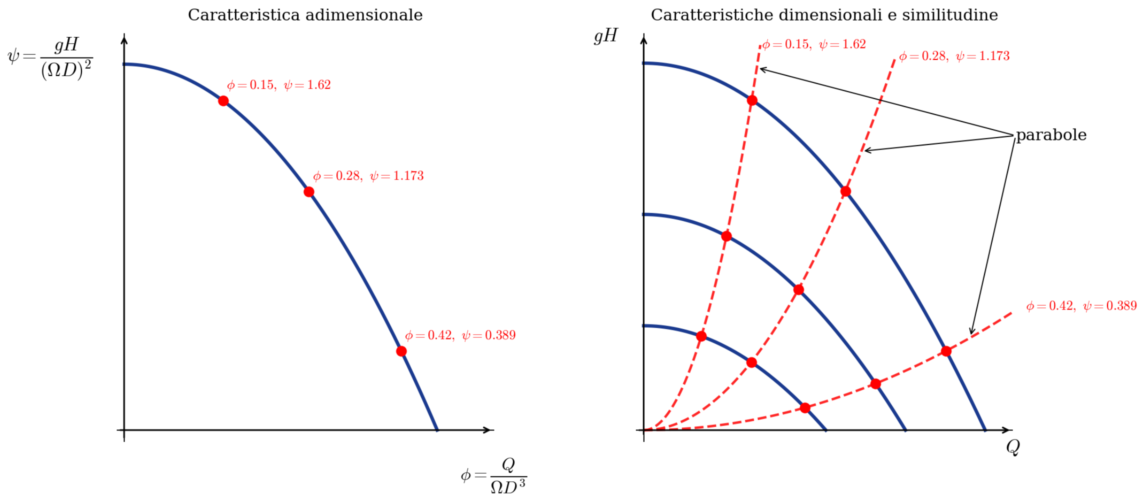

Figura 1: Caratteristiche adimensionali di una pompa (a sinistra: piano ψ–ϕ; in basso: piano gH–Q con parabole di similitudine).

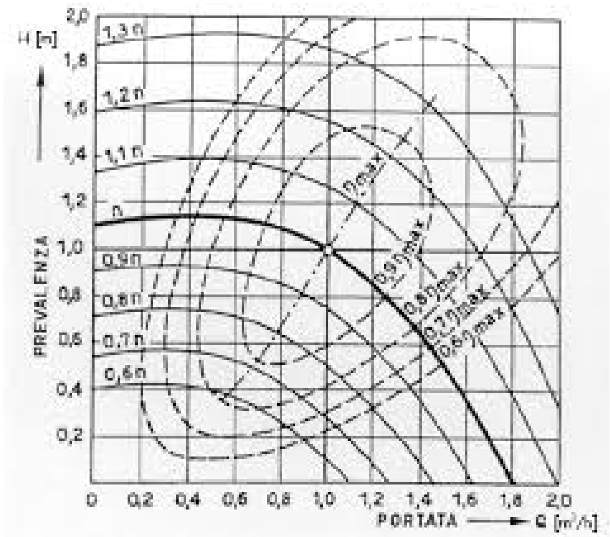

Figura 2: Diagramma collinare per una pompa centrifuga

Macchine Termiche (fuidi comprimibili)

Per una macchina termica (che evolve un fluido comprimibile) le prestazioni (esprimibili in termini di lavoro specifico Δh_0, rendimento η e potenza richiesta P) dipendono anche da altre grandezze, oltre a quelle discusse precedentemente nel caso di macchine idrauliche. In particolare, la portata (massiva) ($\dot{m}$), la velocità di rotazione Ω, il diametro D, la densità del fluido ρ_{01} (in condizioni di ristagno all'ingresso), la viscosità del fluido μ e la velocità del suono a_{01}, calori specifici a pressione e volume costante c_p e c_v. Possiamo pertanto scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta h_0 &= f_1(\mu,\, \Omega,\, D,\, \dot{m},\, \rho_{01},\, a_{01}) \\ \eta &= f_2(\mu,\, \Omega,\, D,\, \dot{m},\, \rho_{01},\, a_{01}) \\ P &= f_3(\mu,\, \Omega,\, D,\, \dot{m},\, \rho_{01},\, a_{01}) \end{aligned} \tag{19}$$

Le unità di misura sono rispettivamente:

- $[\Delta h_0] = \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$
- $[\eta] = -$
- $[P] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3$
- $[\dot{m}] = \mathrm{kg/s}$
- $[\Omega] = 1/\mathrm{s}$
- $[D] = \mathrm{m}$
- $[\rho_{01}] = \mathrm{kg/m}^3$
- $[\mu] = \mathrm{kg/(m\,s)}$
- $[a_{01}] = \mathrm{m/s}$
- $[c_p] = \mathrm{m}^2/(\mathrm{s}^2\,K)$
- $[c_v] = \mathrm{m}^2/(\mathrm{s}^2\,K)$

Con 9 grandezze e 4 unità di misura, si possono definire **5 gruppi adimensionali**:

$$\frac{\Delta h_0}{(\Omega D)^2} = g_1\left(\frac{\dot{m}}{\rho_{01}\,\Omega D^3},\ \frac{\rho_{01}\,\Omega D^2}{\mu},\ \frac{\Omega D}{a_{01}},\ \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{20}$$

$$\eta = g_2\left(\frac{\dot{m}}{\rho_{01}\,\Omega D^3},\ \frac{\rho_{01}\,\Omega D^2}{\mu},\ \frac{\Omega D}{a_{01}},\ \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{21}$$

$$\frac{P}{\Omega^3 D^5} = g_3\left(\frac{\dot{m}}{\rho_{01}\,\Omega D^3},\ \frac{\rho_{01}\,\Omega D^2}{\mu},\ \frac{\Omega D}{a_{01}},\ \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{22}$$

I parametri adimensionali sono:

- $\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}\,\Omega D^3}$ $\longrightarrow$ coefficiente di flusso
- $\psi = \frac{\Delta h_0}{(\Omega D)^2}$ $\longrightarrow$ coefficiente di carico
- $\dfrac{\Omega D}{a_{01}}$ $\longrightarrow$ numero di Mach
- $\dfrac{\dot{m}}{\rho_{01}\,\Omega D^3}$ $\longrightarrow$ portata non dimensionale $\propto \dfrac{c_m}{U}$
- $\dfrac{\rho_{01}\,\Omega D^2}{\mu}$ $\longrightarrow$ numero di Reynolds
- $\gamma = c_p/c_v$ $\longrightarrow$ rapporto dei calori specifici

Curve Caratteristiche

Per le turbomacchine termiche, le caratteristiche sono più comunemente riportate in termini di rapporto di pressione $\beta = \frac{p_{0,exit}}{p_{0,in}}$ in funzione della portata adimensionalizzata $\dot{m}_{ad} = \frac{\dot{m}\sqrt{c_p T_{01}}}{A\, p_0}$. Entrambi questi parametri adimensionali possono infatti essere riscritti in funzione dei precedenti:

La portata non dimensionale può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{\rho_{01}\, a_{01} D^2} &= \frac{\dot{m}\, R T_{01}}{p_{01}\sqrt{\gamma R T_{01}}\, D^2} = \frac{\dot{m}\sqrt{R T_{01}}}{p_{01}\, D^2} = \frac{\dot{m}\sqrt{c_p T_{01}}}{p_{01}\, A}\sqrt{\frac{c_p}{R}}\frac{D^2}{A} \\ &= \frac{\dot{m}\sqrt{c_p T_{01}}}{p_{01}\, A}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{D^2}{A} \end{aligned} \tag{23}$$

dove il rapporto D^2/A è un fattore geometrico che dipende esclusivamente dalla macchina.

Il rapporto di pressione può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(\frac{T_{0,exit}}{T_{0,in}}\right)^{\frac{\gamma\eta_p}{\gamma-1}} = \left(\frac{\Delta h_0}{c_p T_{0,in}} + 1\right)^{\frac{\gamma\eta_p}{\gamma-1}} = \left(\frac{\Delta h_0}{(\Omega D)^2}\frac{(\Omega D)^2}{c_p T_{0,in}} + 1\right)^{\frac{\gamma\eta_p}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{\Delta h_0}{(\Omega D)^2}\frac{(\Omega D)^2}{\gamma R T_{0,in}}(\gamma-1) + 1\right)^{\frac{\gamma\eta_p}{\gamma-1}} \end{aligned} \tag{24}$$

In figura **??** sono rappresentate le curve caratteristiche di un compressore assiale.

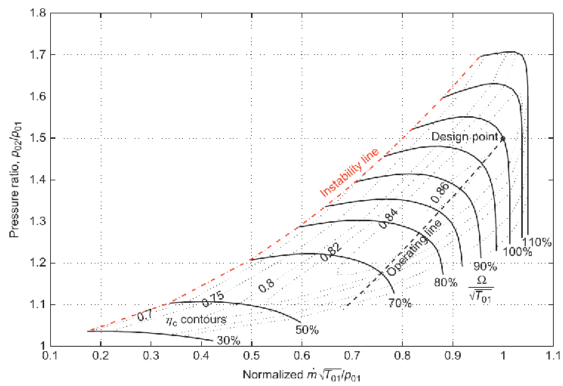

Figura 3: Curve caratteristiche di un compressore assiale

Scelta del tipo di turbomacchina

I parametri adimensionali sono fondamentali per la scelta del tipo di turbomacchina più appropriato per un certo utilizzo. A tal fine vengono utilizzati principalmente due parametri, che possono essere derivati a partire da:

$$\phi = \frac{Q}{\Omega D^3}, \qquad \psi = \frac{gH}{\Omega^2 D^2}, \tag{25}$$

I due nuovi parametri adimensionali si ottengono a partire dai coefficienti di portata e di carico, elimando una volta il diametro e una volta la velocità di rotazione:

$$\phi^a \psi^b = \left(\frac{Q}{\Omega D^3} \right)^a \left(\frac{gH}{\Omega^2 D^2} \right)^b = Q^a (gH)^b \Omega^{-a-2b} D^{-3a-2b} \tag{26}$$

Il primo parametro, detto **velocità specifica** e indicato con Ω_s viene ottenuto imponendo che sia indipendente dal diametro e direttamente proporzionale alla velocità di rotazione:

$$\begin{cases} -a - 2b = 1 \\ -3a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3/4 \end{cases} \tag{27}$$

Il primo parametro, detto **diametro specifica** e indicato con D_s viene ottenuto imponendo che sia proporzionale al diametro e indipendente dalla velocità di rotazione:

$$\begin{cases} -a - 2b = 0 \\ -3a - 2b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/4 \end{cases} \tag{28}$$

Pertanto:

$$\boxed{\Omega_s = \frac{\phi^{1/2}}{\psi^{3/4}} = \frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}}\, \Omega} \tag{29}$$

$$\boxed{D_s = \frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}} = \frac{(gH)^{1/4}}{(Q)^{1/2}}\, D} \tag{30}$$

Power Specific Speed

Un altro parametro, usato soprattutto nelle turbine idrauliche, è il **Power Specific Speed**:

$$\Omega_{sp} = \frac{\hat{P}^{1/2}}{\psi^{5/4}} = \frac{(P/\rho)^{1/2}}{(gH)^{5/4}}\, \Omega \tag{31}$$

Il rapporto tra le due velocità specifiche è:

$$\frac{\Omega_{sp}}{\Omega_s} = \frac{(P/\rho)^{1/2}}{(gH)^{5/4}} \cdot \frac{(gH)^{3/4}}{Q^{1/2}} = \frac{(P/\rho)^{1/2}}{(gH)^{1/2}\, Q^{1/2}} = \left(\frac{P}{\rho\, Q\, gH} \right)^{1/2} = \sqrt{\eta^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \tag{32}$$

Negli anni, sono stati sviluppati diagrammi statistici (come quelli rappresentati di seguito) per la scelta ottimale delle macchine al variare della velocità specifica.

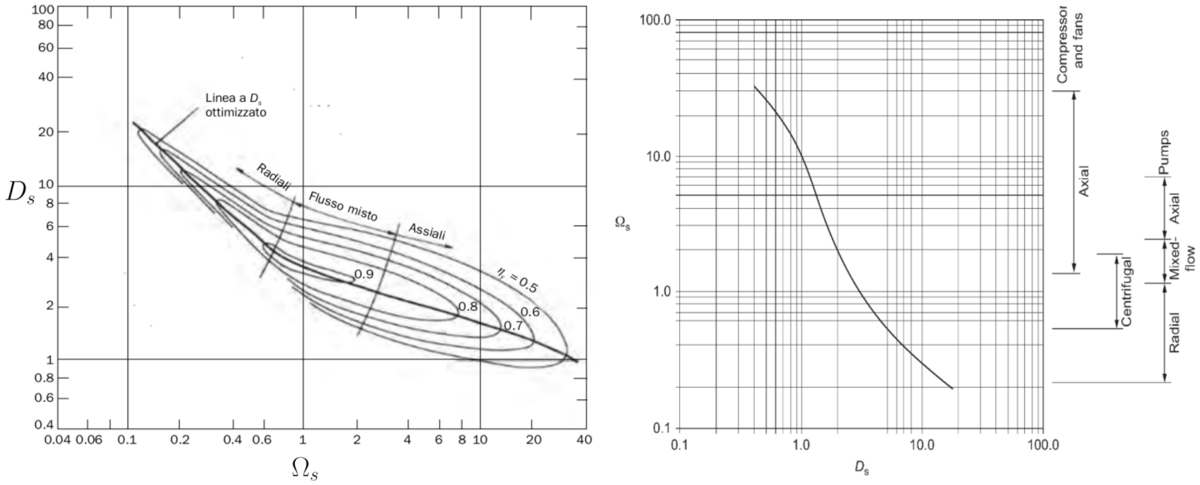

Figura 4: Diagramma di Balje per la scelta delle pompe (sinistra) e diagramma di Cordier per turbomacchine operatrici (destra)

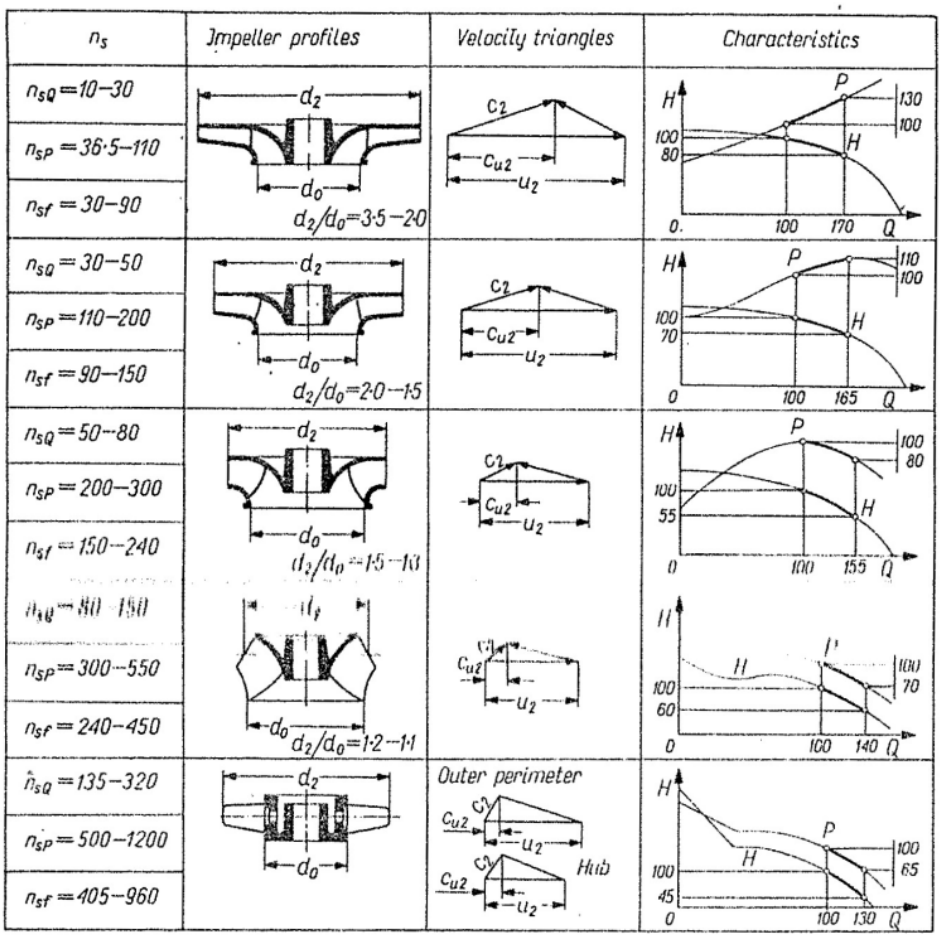

Figura 5: Tipologia ottimale di pompa al variare della velocità specifica