Corso di Laurea Magistrale in Matematica Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - Soluzioni (25/02/2026)
(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.
Data la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$
i) scrivere il suo sviluppo in serie di potenze nella bolla $B_2(0)$ *(suggerimento: sfruttare la derivazione termine a termine della serie geometrica)* ***(2,5 punti)****;*
ii) scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent nella corona circolare $C_{2,3}(0)$ ***(2,5 punti)****;*
iii) scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent nella corona circolare $C_{0,1}(2)$ ***(2,5 punti)****;*
iv) classificare la sua singolarità isolata $z_0 = 2$ ***(1,5 punti)****.*

i) La funzione assegnata è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{2\}$, quindi ha una singolarità isolata in 2 ed è dunque sviluppabile in serie di Laurent in ogni corona circolare contenuta in D. Consideriamo la bolla $B_2(0)$: in essa $f(z)$ è olomorfa, e dunque sviluppabile in serie di potenze. Seguendo il suggerimento (e dato, anche, che si ha a che fare con funzioni razionali fratte), consideriamo la serie geometrica

$$(1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{per } |z| < 1.$$

Sappiamo che la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze con raggio di convergenza uguale a quello della serie di partenza, e che la sua somma è la derivata della funzione somma della serie originaria; pertanto, derivando termine a termine si trova

$$(1-z)^{-2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad \text{per } |z| < 1. \tag{1}$$

La nostra funzione è simile a quella del primo membro della (1): osserviamo che

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}[-(z-2)^{-1}] = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{z-2}\right);$$

essendo

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

per $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, cioé per $|z| < 2$, derivando termine a termine si ricava

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\,z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}\,z^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,z + \frac{3}{16}\,z^2 + \cdots \quad \text{per } |z| < 2,$$

che è lo sviluppo richiesto.

ii) La corona circolare $C_{2,3}(0)$, centrata nell'origine e di raggi interno ed esterno pari a 2 e 3 rispettivamente, è data dall'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$. Si può quindi sfruttare nuovamente la derivazione termine a termine della serie geometrica, ma la si deve manipolare in modo diverso. Osservando che

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n-1}$$

per $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, cioé per $|z| > 2$, derivando termine a termine si ottiene

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n z^{-n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\frac{1}{z^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^3}z + \frac{12}{z^4} + \cdots \quad \text{per } |z| > 2.$$

Lo sviluppo trovato vale, dunque, nell'intorno di infinito $C_{2,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$, che contiene, in particolare, la corona circolare $C_{2,3}(0)$.

Osserviamo che per entrambi i punti si può ragionare anche in modo un po' diverso: per esempio, dopo aver osservato che (sempre a partire dalla serie geometrica)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1} \quad \text{per } |z| < 1, \tag{2}$$

essendo $B_2(0) = \{|z| < 2\} = \left\{\frac{|z|}{2} < 1\right\}$, usando la (2) con $\frac{|z|}{2}$ al posto di z, si trova

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{4\left(1-\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}n\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}z^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{16}z^2 + \cdots$$

per $|z| < 2$.
Analogamente, osservando che l'insieme $\{|z| > 2\}$ contiene l'insieme $C_{2,3}(0) = \{2 < |z| < 3\}$, e che $\{|z| > 2\} = \left\{\frac{2}{|z|} < 1\right\}$ usando nuovamente la (2) con $\frac{2}{z}$ al posto di z, si trova

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{z^2\left(1-\frac{2}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{z}\right)^{n-1} = \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{12}{z^4} + \cdots \quad \text{per } |z| > 2.$$

iii) La corona circolare $C_{0,1}(2)$ non è altro che il disco bucato centrato in 2 e di raggio 1 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$. La funzione è già espressa come potenza di $z - z_0$ (qui $z_0 = 2$), pertanto la sua serie di Laurent in tale corona circolare è $f(z) = (z-2)^{-2}$.

iv) Sfruttando il punto iii), si ricava che $z_0 = 2$ è un polo doppio. In alternativa, si osserva che $\lim_{z\to 2} f(z) = \infty$ e $\lim_{z\to 2}(z-2)^2 f(z) = 1$.

Esercizio 2.
i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \frac{4}{t^2+4}$ ***(2,5 punti)****; per calcolare*

$\hat f(\omega)$ si può usare anche la formula di simmetria? Se si, come? ***(1,5 punti)***
ii) Dati i due segnali Laplace-trasformabili $f(t) = \sin t$ e $g(t) = t$, $t \geq 0$, dopo aver stabilito qual è la loro ascissa di convergenza, calcolare la trasformata di Laplace di $(f * g)(t)$ (utilizzare sia le proprietà della trasformazione di Laplace che il calcolo diretto) ***(3 punti)****.*

i) Osserviamo che $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, quindi è trasformabile secondo Fourier. Calcolando la sua trasformata si deve risolvere il seguente integrale

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{t^2+4}\, e^{-i\omega t} dt.$$

Similmente a quanto fatto nell'Esempio 1.10 a pag. 23 delle dispense sulle trasformate, si osserva che si tratta di un integrale di "tipo TF" (si veda il Teorema 2.47 a pag. 195 delle dispense di Analisi complessa), la cui formula risolutiva è

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \begin{cases} 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{4}{z^2+4}\, e^{-i\omega z}; z = 2i\right) & \text{se } -\omega > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{t^2+4}\, dt & \text{se } \omega = 0 \\ -2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{4}{z^2+4}\, e^{-i\omega z}; z = -2i\right) & \text{se } -\omega < 0, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = \begin{cases} 2\pi i \lim_{z\to 2i}(z-2i)\dfrac{4}{z^2+4} e^{-i\omega z} = 2\pi\, e^{2\omega} & \text{se } \omega < 0 \\ = \left[2\arctan\frac{t}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi & \text{se } \omega = 0 \\ -2\pi i \lim_{z\to -2i}(z+2i)\dfrac{4}{z^2+4} e^{-i\omega z} = 2\pi\, e^{-2\omega} & \text{se } \omega > 0, \end{cases}$$

cioé $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\pi e^{-2|\omega|}$.
Per rispondere alla seconda domanda, occorre ricordare che una funzione della forma $G(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$, $a > 0$, è la trasformata di Fourier della funzione $g_a(t) = e^{-a|t|}$ (si veda l'Esempio 1.2 a pag. 8 delle dispense). Riconoscendo che, in questo caso, $a = 2$ e $f(\omega) = \mathcal{F}[e^{-2|t|}](\omega)$, dalla formula di simmetria (che in questo caso è verificata, essendo $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e f derivabile in $\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g(t)]\right](\omega) = 2\pi g(-\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R},$$

si ricava immediatamente $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g_2(t)]\right](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\pi g_2(-\omega) = 2\pi e^{-2|\omega|}$.

ii) L'ascissa di convergenza di $f(t)$ è 0, così come quella di $g(t)$, come si ricava facilmente (per esempio) scrivendo la definizione di trasformata: gli integrali $\int_0^\infty \sin t e^{-st}\, dt$ e $\int_0^\infty te^{-st}\, dt$ sono convergenti in $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$. Sappiamo che il prodotto di convoluzione di due segnali Laplace trasformabili è trasformabile nel semipiano di convergenza intersezione dei due semipiani di convergenza dei segnali iniziali e si ha

$$\mathcal{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{1}{s^2},$$

in questo caso nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$ (se non si ricordano le trasformate delle funzioni trigonometriche e della funzione polinomiale, le si possono ricavare facilmente).

Usiamo ora il calcolo diretto. Calcoliamo prima la convoluzione dei due segnali, per $t \geq 0$:

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin(t-y)y\,dy = [y\cos(t-y)]_0^t - \int_0^t \cos(t-y)\,dy = t + [\sin(t-y)]_0^t = t - \sin t.$$

Quindi

$$\mathcal{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} = \frac{1}{s^2(1+s^2)}\,.$$

Domanda 1.
*i) Enunciare e dimostrare il Teorema di Liouville (**3 punti**);*
*ii) utilizzare tale teorema per dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra (**2 punti**);*
*iii) quale informazione sulle funzioni trascendenti elementari si può ricavare utilizzando il Teorema di Liouville? (**1,5 punti**)*
*iv) Un analogo del Teorema di Liouville vale anche per funzioni reali di variabile reale? Perché? (**1 punto**).*

Domanda 2.
*ii) Cosa sono le funzioni rapidamente decrescenti? (**2 punti**);*
*ii) Che legame c'è tra le funzioni a decrescenza rapida e la trasformazione di Fourier? (**2 punti**)*
*iii) Enunciare il Teorema di Plancherel e dimostrare il Lemma che si utilizza per dimostrare l'identità di Plancherel (**2,5 punti**).*