

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 25/02/2026

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.

Data la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$

- i) scrivere il suo sviluppo in serie di potenze nella bolla $B_2(0)$ (suggerimento: sfruttare la derivazione termine a termine della serie geometrica) (**2,5 punti**);
- ii) scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent nella corona circolare $C_{2,3}(0)$ (**2,5 punti**);
- iii) scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent nella corona circolare $C_{0,1}(2)$ (**2,5 punti**);
- iv) classificare la sua singolarità isolata $z_0 = 2$ (**1,5 punti**).

Esercizio 2.

- i) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \frac{4}{t^2+4}$ (**2,5 punti**); per calcolare $\hat{f}(\omega)$ si può usare anche la formula di simmetria? Se sì, come? (**1,5 punti**)
- ii) Dati i due segnali Laplace-trasformabili $f(t) = \sin t$ e $g(t) = t$, $t \geq 0$, dopo aver stabilito qual è la loro ascissa di convergenza, calcolare la trasformata di Laplace di $(f * g)(t)$ (utilizzare sia le proprietà della trasformazione di Laplace che il calcolo diretto) (**3 punti**).

Domanda 1.

- i) Enunciare e dimostrare il Teorema di Liouville (**3 punti**);
- ii) utilizzare tale teorema per dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra (**2 punti**);
- iii) quale informazione sulle funzioni trascendenti elementari si può ricavare utilizzando il Teorema di Liouville? (**1,5 punti**)
- iv) Un analogo del Teorema di Liouville vale anche per funzioni reali di variabile reale? Perché? (**1 punto**).

Domanda 2.

- i) Cosa sono le funzioni rapidamente decrescenti? (**2 punti**);
- ii) Che legame c'è tra le funzioni a decrescenza rapida e la trasformazione di Fourier? (**2 punti**)
- iii) Enunciare il Teorema di Plancherel e dimostrare il Lemma che si utilizza per dimostrare l'identità di Plancherel (**2,5 punti**).