Prova scritta di Analisi Matematica 3 25.02.2026 Sol. 1

1. Studiamo prima l'andamento della funzione lungo le rette per l'origine:

$$\begin{cases} x = \ell t \\ y = mt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0$$

Abbiamo

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ell^2}{m^2} \sqrt{\ell^2 + m^2}\, |t| = 0 \qquad \forall m, \ell \quad \text{con } m \neq 0.$$

Dunque, se esiste, il limite deve necessariamente valere 0. Esaminiamo l'andamento sulla parabola $y = x^2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^4} \sqrt{x^2 + x^4} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = +\infty.$$

Di conseguenza il limite <u>non esiste</u>.

2. Calcoliamo le derivate prime di f e i suoi eventuali punti stazionari.

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + 3y^2 + 2y - 1$$

$$Df = 0 \iff \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases},$$

il sistema ottenuto è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2+2y-1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x^2-1=0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha le soluzioni $(0,-1)$ e $(0,1/3)$, mentre il secondo $(1,0)$, $(-1,0)$.

Calcoliamo le derivate seconde e le matrici hessiane in questi quattro punti stazionari.

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yy} = 6y+2$$

$$D^2f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autovalori negativi} \Downarrow \text{p.to di massimo rel.}$$

$$D^2f(0,1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autovalori positivi} \Downarrow \text{p.to di minimo rel.}$$

$$D^2f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{determinante} = -4 < 0 \Downarrow \text{p.to di sella}$$

$$D^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{determinante} = -4 < 0$$

$\Downarrow$

P.to di Sella.

3. L'insieme E è un dominio normale rispetto al piano xz. Poniamo $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z \le 1, e^{-z} \le x \le e^{z}\}$ e calcoliamo l'integrale per segmenti.

$$\iiint_E \frac{ze^y}{x}\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dz \int_{2\ln x}^{\ln(x^2+z^2)} \frac{ze^y}{x}\,dy$$

ricordando che $2\ln x = \ln x^2$, abbiamo

$$\int_{2\ln x}^{\ln(x^2+z^2)} \frac{ze^y}{x}\,dy = \frac{z}{x}\, e^y \Big|_{\ln x^2}^{\ln(x^2+z^2)} = \frac{z}{x}(x^2+z^2-x^2) = \frac{z^3}{x}$$

da cui

$$\iiint_E \frac{ze^y}{x}\,dx\,dy\,dz = \iint_D \frac{z^3}{x}\,dx\,dz = \int_0^1 dz \int_{e^{-z}}^{e^{z}} \frac{z^3}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 z^3(z-(-z))\,dz = \int_0^1 2z^4\,dz = \frac{2}{5} z^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

4.

a) Essendo $\rho(-\pi/4) = \rho(\pi/4) = 0$ il punto iniziale e quello finale della curva coincidono con l'origine, in particolare sono uguali e dunque la curva è chiusa.

$\rho(\theta) \in C^1([-\pi/4, \pi/4])$, $\rho'(\theta) = -4\sin(2\theta)$

$$\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta) = 4\cos^2(2\theta) + 16\sin^2(2\theta)$$
$$= 4\left(1 + 3\sin^2(2\theta)\right) \geq 4 > 0$$
$$\forall \theta \in [-\pi/4, \pi/4],$$

per cui la curva è regolare.

b) $$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = 2\cos(2\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta = 2\cos(2\theta)\sin\theta \end{cases}, \theta \in [-\pi/4, \pi/4].$$

c) $ds = \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta = 2\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\, d\theta$,

quindi

$$\int_\gamma ds = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\, d\theta.$$

Dalle equazioni parametriche ricaviamo i differenziali

$$dx = -2\,(2\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta)\,d\theta$$

$$dy = 2\,(-2\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)\,d\theta,$$

Per cui abbiamo

$$\int_\gamma \omega = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4\,(-2\cos 2\theta\cos\theta\sin 2\theta\sin\theta$$

$$+\cos^2 2\theta\cos^2\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta\sin 2\theta\sin\theta + \cos^2 2\theta\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,d\theta$$

integranda pari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine

formula di bisezione per il coseno

$$= 2\left(\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}.$$