Cagliari, 13/02/2026

Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Calcolo combinatorio: PIN (3 punti)

Si calcoli quanti sono i possibili codici PIN da 4 cifre diverse che si possono ottenere, utilizzando i numeri da 0 a 9.

2) Studio di funzione: Crescita e declino di una tecnologia emergente (13 punti)

Il Ciclo di Vita del Prodotto è un modello che descrive le fasi che un prodotto attraversa dalla sua introduzione fino al suo ritiro dal mercato. Queste fasi sono quattro: l'introduzione, in cui il prodotto viene lanciato e le vendite sono inizialmente basse; la crescita, durante la quale le vendite aumentano rapidamente mentre il prodotto guadagna popolarità; la maturità, caratterizzata da una stabilizzazione delle vendite con intensa concorrenza; il declino, quando le vendite diminuiscono poiché il prodotto viene sostituito da nuove innovazioni o cambiamenti nel comportamento dei consumatori. Questo modello aiuta le aziende a pianificare strategie di marketing e gestione delle risorse.

Sia data la seguente funzione, che modellizza il ciclo di vita di un certo prodotto in termini di numero di prodotti venduti (in numero di unità) in funzione del tempo (in anni):

$$N(t) = kt^3e^{-t}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Si ricavi dopo quanto tempo si raggiunge il massimo delle vendite. (2 punti)
b. Si calcoli il valore che deve assumere *k* perché nel nono anno risultino essere state vendute 900 unità. (1 punto)
c. Qual è il numero massimo di vendite annuali raggiunto? (1 punto)
d. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione N*(t)*, tracciandone il grafico. (7 punti)
e. Ricavare (con uno studio per punti) dopo quanto tempo si prevede che il prodotto non venga più acquistato. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Ciclo di vita di un'app (7 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza il numero di download di una certa applicazione in funzione del tempo (in anni):

$$n(t) = kt^3 e^{-t^4}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare la formula (i.e. funzione $N(t)$) che permette di calcolare il numero totale di download effettuati fino ad un certo tempo t_x. (4 punti)
b. Ricavare la costante k perché il numero totale di download effettuati durante il primo anno dal lancio dell'app sia pari a 1400. (1 punti)
c. Quanto risulta essere, approssimativamente, il ciclo di vita di questa app e quanti sono stati i download totali? (2 punti)

4) Statistica: Confronto tra applicazioni (7 punti)

Tre diverse startup mettono sul mercato tre applicazioni simili.
Sia data la seguente tabella che lega il numero di download al costo di sviluppo di ciascuna delle app:

APPLICAZIONI	A	B	C
Spesa totale	10 500 €	12 300 €	11 900 €
Numero di download	7332	9035	8871

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra il costo di sviluppo ed il numero di download. (3 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
c) Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il rapporto tra la spesa totale e il numero di download, ovvero il costo per download, sia di 1.50€. (2 punti)

Permutazioni semplici	$P_n = n!$
Permutazioni con ripetizioni	$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$
Disposizioni semplici	$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Disposizioni con ripetizioni	$D'_{n,k} = n^k$
Combinazioni semplici	$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$
Combinazioni con ripetizioni	$C'_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$

Valori di riferimento per i test di ipotesi

Test T				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.895	2.365	3.499	5.408
8	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.833	2.262	3.250	4.781
10	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.646
39	1.685	2.023	2.708	3.558
49	1.677	2.010	2.680	3.500
59	1.671	2.001	2.662	3.463
69	1.667	1.995	2.649	3.437
79	1.664	1.990	2.640	3.418
89	1.662	1.987	2.632	3.403
99	1.660	1.984	2.626	3.392

Test Z				
α	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Test χ^2				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816
3	6.251	7.815	11.345	16.266
4	7.779	9.488	13.277	18.467
5	9.236	11.070	15.086	20.515
6	10.645	12.592	16.812	22.458
7	12.017	14.067	18.475	24.322
8	13.362	15.507	20.090	26.124
9	14.684	16.919	21.666	27.877
10	15.987	18.307	23.209	29.588
11	17.275	19.675	24.725	31.264
12	18.549	21.026	26.217	32.909
13	19.812	22.362	27.688	34.528
14	21.064	23.685	29.141	36.123
15	22.307	24.996	30.578	37.697
16	23.542	26.296	32.000	39.252
17	24.769	27.587	33.409	40.790
18	25.989	28.869	34.805	42.312
19	27.204	30.144	36.191	43.820
20	28.412	31.410	37.566	45.315
21	29.615	32.671	38.932	46.797
22	30.813	33.924	40.289	48.268
23	32.007	35.172	41.638	49.728
24	33.196	36.415	42.980	51.179
25	34.382	37.652	44.314	52.620
26	35.563	38.885	45.642	54.052
27	36.741	40.113	46.963	55.476
28	37.916	41.337	48.278	56.892
29	39.087	42.557	49.588	58.301
30	40.256	43.773	50.892	59.703

$$Z^* = \frac{|x - \mu|}{\sigma}\sqrt{n} \qquad T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}$$

$$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i^{expected} - f_i^{observed}\right)^2}{f_i^{expected}}$$

SOLUZIONI

1) CALCOLO COMBINATORIO

Si tratta di una disposizione semplice di n = 10 elementi in k = 4 posizioni senza ripetizioni:

$$D_{10,4} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$N(t) = kt^3\, e^{-t} \qquad t_b = 9 \qquad N(t_b) = N_b = 900$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$N'(t) = k[3t^2e^{-t} - t^3e^{-t}]$$

$$\boldsymbol{N'(t) = kt^2(3-t)e^{-t}}$$

$$N'(t) = 0 \;\; \rightarrow \;\; t = 0;\; t = 3 \;\; \rightarrow \;\; t_{max} = 3\; anni$$

b)

Sapendo il valore di *N*, pari a 900, per un dato valore di *t*, ovvero 9, possiamo calcolare *k*, invertendo la funzione *N(t)*:

$$N_b = kt_b{}^3\, e^{-t_b} \quad \rightarrow \quad k = \frac{N_b}{t_b{}^3\, e^{-t_b}} = 10\,000$$

La funzione sarà quindi:

$$N(t) = 10\,000\, t^3\, e^{-t}$$

Con derivata prima:

$$N'(t) = 10\,000\, t^2(3-t)e^{-t}$$

c)

Il numero massimo di vendite raggiunto sarà *N*(t_{max}):

$$N(t_{max}) = kt_{max}{}^3\, e^{-t_{max}} = 13\,443\; unità$$

d)

Lo studio della funzione *N(t)* dev'essere fatto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente *t* che quella dipendente *N* corrispondano a grandezze positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$N(t) = 10\,000\ t^3\ e^{-t}$$

- Dominio:

$$D: \forall t \in R \qquad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$N(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0; 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad N(t = 0)\ = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0; 0)$$

- Studio del segno:

$$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad C > 0$$

$10\,000\ t^3 > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0}$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} kt^3\ e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{kt^3}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{kt^3}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3kt^2}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{6kt}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{6k}{e^t} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$\boldsymbol{N'(t) = 10\,000\ t^2(3 - t)e^{-t}}$$

$N'(t) = 0 \ \rightarrow \ t = 0;\ t = 3$

$N(t = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_0(0; 0)}$

$N(t = 3) = 13\,443 \quad \rightarrow \quad M(3; 13\,443)$

$$N'(t) > 0$$

$t^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$3 - t > 0 \quad \rightarrow \quad -t > -3 \quad \rightarrow \quad t < 3$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{N'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t < 3}$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$$N'(t) = k\,[3t^2e^{-t} - t^3e^{-t}]$$

$$N''(t) = k(6t\,e^{-t} - 3t^2e^{-t} - 3t^2e^{-t} + t^3e^{-t})$$

$$\boldsymbol{N''(t) = 10\,000\,t(t^2 - 6t + 6)e^{-t}}$$

$$N''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F_0 \equiv P_0(0;\ 0)}$$

$$N''(t) = 0 \rightarrow \quad t^2 - 6t + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} t_1 = 4.732\ anni \\ t_2 = 1.268\ anni \end{cases}$$

$$N(t_1) = 5\,737$$

$$N(t_2) = 9\,334$$

$$\boldsymbol{F_1(4.7;\ 5\,737)}$$

$$\boldsymbol{F_2(1.3;\ 9\,334)}$$

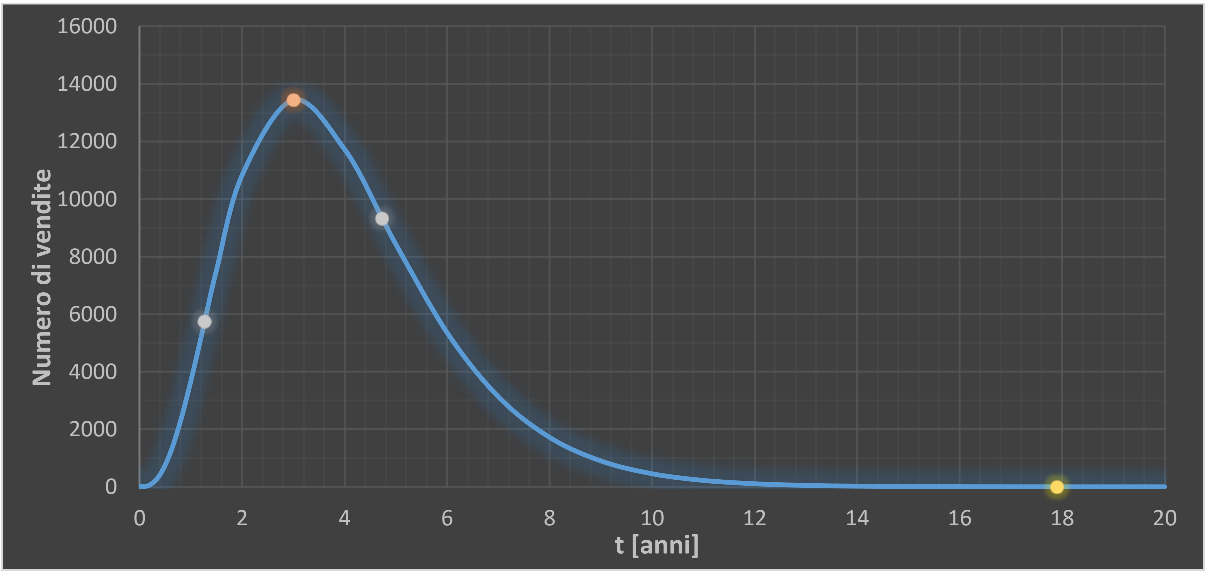
$N''(t) > 0$

$t > 0$

$t^2 - 6t + 6 > 0 \quad \rightarrow \quad t < 3 - \sqrt{3} \cup t > 3 + \sqrt{3}$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$N''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < t < 3 - \sqrt{3} \cup t > 3 + \sqrt{3}$$



Si fa notare la tangenza orizzontale in P_0 (0;0) dato che, in corrispondenza di questo punto, si annulla la derivata prima. Annullandosi anche la derivata seconda, non si tratta di un estremo ma di un punto di flesso F_0 (come calcolato in precedenza).

e)

Di seguito, viene riportata la tabella relativa allo studio della funzione per punti. Il numero di vendite scende al di sotto dell'unità dopo quasi 18 anni.

t [anni]	N
0	0.00
0.2	65.50
0.4	429.00
0.6	1185.43
0.8	2300.56
1	3678.79
1.2	5204.64
1.268	**5736.83**
1.5	7530.64
2	10826.82
3	**13442.51**
4	11722.01
4.732	**9333.68**
5	8422.43
6	5354.10
7	3127.76
8	1717.57
9	899.66
10	454.00
11	222.30
12	106.17
13	49.66
14	22.82
15	10.32
16	4.61
17	2.03
17.5	1.35
17.8	1.05
17.9	**0.97**
18	0.89
19	0.38
20	0.16

3) INTEGRALE

DATI

$$n(t) = kt^3\, e^{-t^4} \qquad N_{1°\, anno} = 1\,400$$

a)

Per calcolare il numero di download effettuati fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x :

$$N(t) = \int_0^{t_x} n(t)dt = k\int_0^{t_x} t^3\, e^{-t^4}\, dt = k\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^{t_x} (-4)t^3\, e^{-t^4}\, dt = -\frac{k}{4}\left[e^{-t^4} + c\right]_0^{t_x}$$

$$N(t) = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - \left(e^{-0^4} + c\right)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - (1 + c)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} - 1\right]$$

$$\boldsymbol{N(t) = \frac{k}{4}\left(1 - e^{-t_x{}^4}\right)}$$

b)

$$N_{1°\, anno} = N(t_x = 1) = N_1 = 1\,400 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{4\, N_1}{e^{-1} - 1} = \frac{4\, N_1}{1 - e^{-1}} \quad \rightarrow \quad k = 8\,859$$

c)

Utilizzando la formula trovata sopra e sostituendo a t_x un certo valore annuale, si ottiene il numero di download effettuati fino a quel momento. Per calcolare il ciclo di vita del prodotto, basta verificare dopo quanto tempo il prodotto non viene più venduto ed il valore di *N* non aumenta più. In particolare, si ottiene che dal secondo anno in poi (i.e. $t_x = 2$) il valore di *N* resta invariato:

$$N(2) = \frac{k}{4}\left(1 - e^{-2^4}\right) \approx 2\,215$$

t [anni]	N
0	0
1	1400
2	**2215**
3	2215
4	2215

4) STATISTICA

APPLICAZIONI	A	B	C
Spesa totale	10 500 €	12 300 €	11 900 €
Numero di download	7332	9035	8871

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

Prodotti	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Spesa totale	11 566.67 €	893 333.33 €	945.16 €
Numero di download	8 412.67	882 604.33	939.47

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} = 880\,933$$

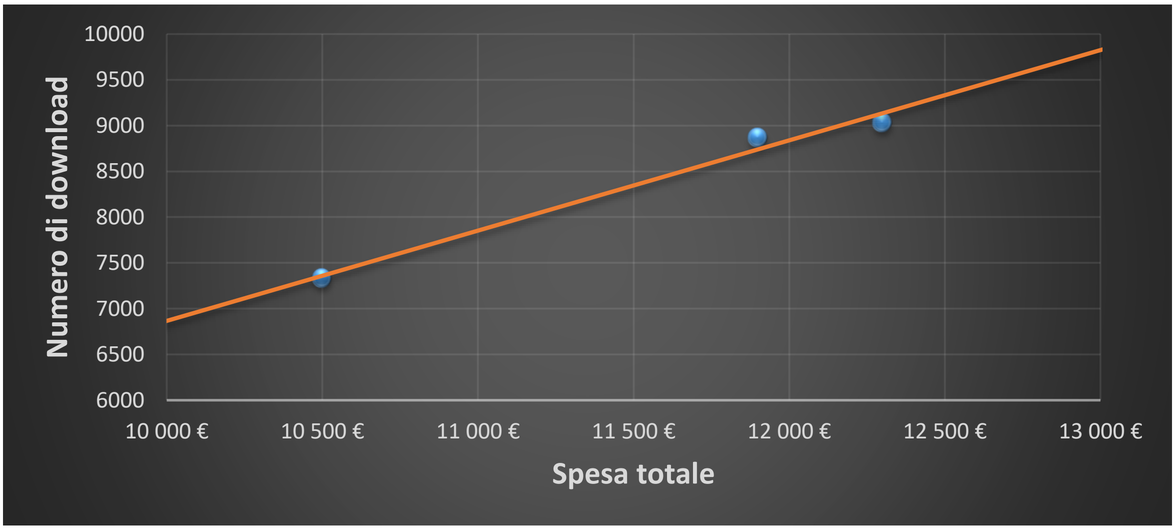
$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0.992$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono direttamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = 0.986\,x - 2993.5}$$



c)

Il test fa riferimento al costo per download, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati mediante il rapporto tra la spesa totale ed il numero di download per ogni app:

APPLICAZIONI	A	B	C
Spesa totale	10 500 €	12 300 €	11 900 €
Numero di download	7 332	9 035	8 871
Rapporto	1.43 €	1.36 €	1.34 €

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a $n = 3$ (A, B, C). Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo *t-Student* con gradi di libertà pari a $\nu = n - 1 = 2$ e dovrà essere utilizzata la seguente quantità pivotale:

$$\boxed{T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard campionaria della serie di dati ottenuta:

Media	1.38 €
Varianza C	0.00227
Dev Std C	0.04763
Pivot T	**4.426**

Test T				
α / ν	**0.10**	**0.05**	**0.01**	**0.001**
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati per $\nu = 2$, si ottiene che l'ipotesi nulla H_0 secondo la quale il costo specifico in termini di costo per download di un'app sia pari a 1.50€ è <u>negabile al 95% ma non al 99%</u>.